

Effet de la modulation en phase des conditions aux limites relatives à la température sur la Stabilité d'une couche fluide confinée en cellule de Hele-Shaw

K. SOUHAR

Univ. Ibn Zohr, Faculté Polydisciplinaire de Taroudant, Taroudant, Maroc
Souhar_khalid@yahoo.fr

S. ANISS

Univ. Hassan II, Faculté des Sciences Aïn-Chock, Laboratoire de Mécanique, Casablanca, Maroc
s.aniss@etude.univcasa.ma

M. T. OUZZANI

Univ. Hassan II, Faculté des Sciences Aïn-Chock, Laboratoire de Mécanique, Casablanca, Maroc

Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'effet d'une modulation en phase des conditions aux limites relatives à la température sur le seuil de convection d'une couche liquide confinée dans une cellule de Hele-Shaw. La cellule est maintenue à la même température modulée, $T_m + T_s \cos(\omega^* t^*)$, aux parois horizontales supérieure et inférieure. Ici la composante stationnaire du gradient de température appliqué est nulle. L'objectif de la présente étude, est de déterminer les paramètres critiques correspondant au seuil de convection, et de montrer qu'il est possible de contrôler ce seuil par une variation de la fréquence de modulation. Ainsi la théorie de Floquet combinée avec une méthode numérique qui consiste à transformer un problème aux valeurs propres, que l'on obtient à partir d'une analyse de stabilité linéaire, en un problème aux conditions initiales, pour déterminer des solutions harmoniques correspondant au seuil de convection. Nous montrons que pour les basses et les hautes fréquences, l'état de base tend vers une configuration d'équilibre stable alors que pour des fréquences intermédiaire le système est potentiellement instable. Les résultats obtenus à partir d'une étude asymptotique pour les hautes et les basses fréquences sans dimension sont en bon accord avec les résultats numériques.

Abstract

The convective stability of a horizontal Hele-Shaw liquid layer is investigated when the time-dependent periodic temperature, $T_m + T_s \cos(\omega^* t^*)$, is applied on the horizontal walls. Here, the stationary component of the applied temperature gradient is set to zero. The objective of the present study is to find the critical

conditions under which thermal convection starts and to show that it is possible to advance or to delay the onset of convection by proper tuning of the modulation frequency. Thus, the Floquet theory and a technique of converting a boundary value problem to an initial value problem are used to solve the linear system of equations corresponding to the onset of convection. We show that in the limit of low and high dimensionless frequency, the basic state tends to a stable equilibrium configuration and for the intermediate dimensionless frequency, the system is potentially unstable. Here, only the harmonic solutions exist. The results obtained from an asymptotic study for low and high dimensionless frequencies are in good agreement with the numerical results.

1. INTRODUCTION

Le contrôle des instabilités thermoconvectives peut se faire par des modulations des conditions aux limites relatives à la température. Ce type de modulation se produit lorsque les conditions aux limites habituelles sur la température possèdent des termes dépendant du temps. Ceci est réalisé en ajoutant aux conditions aux limites habituelles sur la température des composantes dépendantes du temps. Dans cette situation, la solution de base dépend du temps et de l'espace. De plus, le nombre de Rayleigh devient, d'une certaine façon, modulé dans le temps par l'intermédiaire de l'écart de température caractéristique. L'effet de cette modulation a été étudié par plusieurs auteurs. Venezian [1] s'est intéressé au cas où le gradient de température imposé à la couche fluide possède une composante stationnaire et une autre fluctuante de façon sinusoïdale avec une faible amplitude. En utilisant une méthode de perturbation et en effectuant une analyse de stabilité linéaire restreinte à des perturbations bidimensionnelles et au cas libre-libre, Venezian [1] a montré que la modulation de la température à la frontière peut avoir un effet stabilisant ou déstabilisant. Ce même problème a été abordé par Rosenblat et Herbert [2] en considérant une modulation de température à basses fréquences et à amplitudes quelconques. Après avoir utilisé une méthode de Galerkin, ils ont obtenu une solution asymptotique au moyen de la méthode de perturbation WKB. Yih et Li [3] ont considéré que l'amplitude et la fréquence de modulation sont arbitraires et ont utilisé une méthode de Galerkin pour effectuer une analyse de stabilité linéaire. Ils ont montré que le seuil critique de convection peut correspondre à des solutions harmoniques ou sous harmoniques. Finucane et Kelly [4] ont effectué une étude expérimentale ainsi qu'une analyse théorique tenant compte des termes non linéaires et ils ont montré que la modulation à basses fréquences est déstabilisante. Une synthèse sur l'étude de solutions de base indépendantes de l'espace est donnée par Gershuni et Zhukhovitskii [5]. Le cas où les perturbations par rapport à la solution de base sont tridimensionnelles a été traité avec une analyse faiblement non linéaire par Roppo et al. [6]. A l'aide d'un développement de la vitesse, de la pression et de la température en termes de

puissance d'un paramètre relatif à l'amplitude du mouvement convectif, ils ont établi les courbes de stabilité relatives à la fréquence de modulation de la température, pour diverses valeurs du nombre de Prandtl. Bhadauria et Bhatia [7] ont étudié l'effet de différents profils de température imposés aux frontières supérieure et inférieure. Après avoir exprimé ces profils en série de Fourier, ils ont examiné les effets stabilisant et déstabilisant dans le cas d'une modulation en phase et en déphasage. Aniss et al. [8] ont étudié l'effet d'une modulation de température en cellule de Hele-Shaw et ont montré que l'instabilité paramétriques n'a lieu que pour de faibles nombres de Prandtl, dans ce cas, les solutions au seuil de convection sont harmoniques ou sous harmoniques. Récemment, Oukada et al. [9] ont analysé l'effet de la modulation de la température, appliquée aux parois horizontales, sur le seuil de convection d'une couche horizontale d'un fluide de Maxwell. Ils ont utilisé la théorie de Floquet combinée avec la méthode de Tir pour résoudre le système d'équations correspondant au seuil de convection. Ils ont montré que la nature viscoélastique du fluide a un effet déstabilisant comparée avec la nature newtonienne du fluide. Plus récemment, Bhadauria [10] a étudié l'effet de la modulation de la température sur le seuil de convection dans un fluide conducteur de courant électrique en milieu poreux. En utilisant l'analyse de stabilité linéaire, il a montré que le seuil de convection peut être retardé ou avancé par un réglage de la fréquence de modulation. Bhadauria et al. [11] ont effectué une analyse faiblement non-linéaire en considérant une modulation de la température aux frontières. Ils ont considéré un profil de température similaire à la variation de la température de l'atmosphère près de la surface de la terre au cours d'un cycle complet jour-nuit. Ils ont montré que la modulation produit une gamme d'hexagones stables au voisinage de la valeur critique du nombre de Rayleigh.

Dans ce travail, nous présentons une analyse de stabilité linéaire d'un liquide Newtonien confiné dans une cellule de Hele-Shaw horizontale d'extension infinie avec des parois verticales parfaitement isolantes. La même température modulée, $T_m + T_s \cos(\omega^* t^*)$, est appliquée sur les parois horizontales de la cellule. Nous étudions alors l'influence de cette modulation sur le seuil d'instabilité convectif correspondant au déclenchement du mouvement de convection au sein du fluide.

2. FORMULATION

Nous considérons un fluide Newtonien confiné dans une cellule de Hele-Shaw horizontale d'extension infinie en x^* , et d'épaisseur e dans la direction de y^* . La distance entre les parois horizontales est d (Figure 1). Le rapport d'aspect géométrique de la cellule est défini par

$\varepsilon = e/d \ll 1$ supposé très petit devant 1. Les parois verticales de la cavité, situées en $y^* = \pm e/2$ sont supposées adiabatiques.

La température $T_m + T_s \cos(\omega^* t^*)$ est imposée sur les parois inférieure et supérieure situées en $z^* = 0, d$. Afin de garder constantes les caractéristiques physiques du fluide à la température ambiante T_m , nous considérons de plus que l'amplitude de modulation T_s vérifie $T_s \ll T_m$.

Les variables (z^*, t^*, T^*) sont adimensionnées par $(d, d^2/\kappa, T_s)$, où κ est la diffusivité thermique du fluide. L'état d'équilibre est défini par un champ de vitesse nul et une température adimensionnelle, $\bar{T} = (T^* - T_m)/T_s$, solution de l'équation de diffusion adimensionnelle:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \text{ avec } \bar{T} = \cos(\omega t) \text{ en } z = 0, 1 \quad (1)$$

où $\omega = \omega^* d^2 / \kappa$ est une fréquence adimensionnelle. La solution de l'équation (1) est donnée par l'expression suivante:

$$\bar{T} = T_1(z) \cos(\omega t) + T_2(z) \sin(\omega t) \quad (2)$$

avec

$$T_1(z) = \frac{\cos(\sigma z) \cosh(\sigma(1-z)) + \cosh(\sigma z) \cos(\sigma(1-z))}{\cosh(\sigma) + \cos(\sigma)}$$

$$T_2(z) = \frac{\sinh(\sigma z) \sin(\sigma(1-z)) + \sin(\sigma z) \sinh(\sigma(1-z))}{\cosh(\sigma) + \cos(\sigma)}$$

où $\sigma = \sqrt{\omega/2}$.

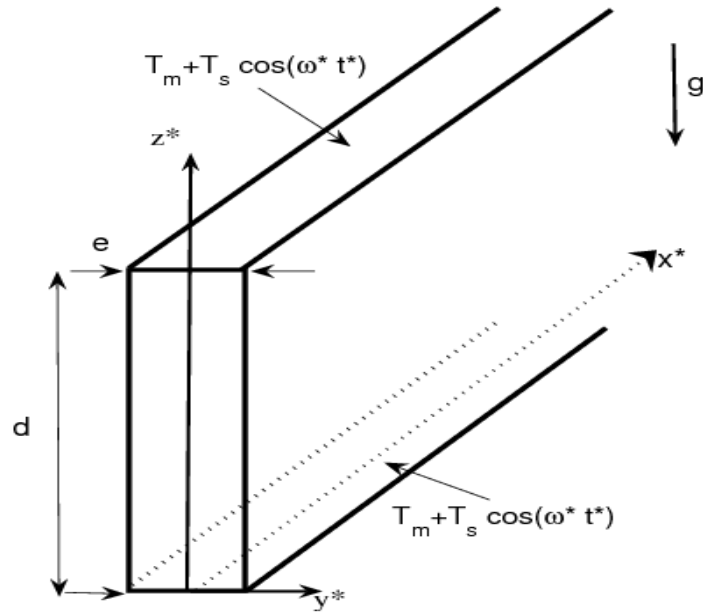


Figure 1: Configuration géométrique de Hele-Shaw.

En approximation de Boussinesq, le système d'équations linéaire correspondant à la perturbation de l'état d'équilibre est donné par les équations de Navier-Stokes suivantes:

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Pr}^{*-1} \frac{\partial u_o}{\partial t} = -\frac{\partial p_o}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} \quad (4)$$

$$\text{Pr}^{*-1} \frac{\partial w_o}{\partial t} = -\frac{\partial p_o}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + RaT_o \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial t} - \frac{w}{6} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \Delta_2 T_o \quad (6)$$

où $\Delta_2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$. Le nombre de Prandtl effectif, Pr^* , intervenant dans les équations (3)-(6) est lié au nombre de Prandtl, $\text{Pr} = \nu / \kappa$, par $\text{Pr} = \varepsilon^2 \text{Pr}^*$. Cette formulation que nous avons adopté correspond au cas où le nombre de Prandtl du liquide est faible ($\text{Pr} = O(\varepsilon^2)$) [12-13], c'est le cas des métaux liquides par exemple. Dans cette situation, les termes inertiels persistent dans les équations de mouvement et permettent de générer une instabilité paramétrique convective [13]. Le nombre de Rayleigh de la cellule, Ra , est défini par $Ra = \beta g T_s e^2 d / (\nu \kappa)$. Nous notons que ce

nombre n'est pas défini à partir d'une différence de température mais à partir d'une amplitude de modulation comme c'est le cas dans la référence [3]. En approximation de Hele-Shaw, nous considérons les champs de vitesse suivant [13]:

$$u_o = (y^2 - 1/4) \tilde{u}(x, z, t), \quad w_o = (y^2 - 1/4) \tilde{w}(x, z, t), \quad T_o = \tilde{T}(x, z, t)$$

L'analyse de stabilité linéaire est effectuée en cherchant les solutions du système (3)-(6) en modes normaux:

$$\tilde{u} = u(z, t) \exp(i q x), \quad \tilde{w} = w(z, t) \exp(i q x) \quad \text{et} \quad \tilde{T} = T(z, t) \exp(i q x)$$

où q est le nombre d'onde. Avec ces considérations et après avoir moyenné le champ de vitesse par rapport à la variable y , le système d'équations (3)-(6) se réduit à:

$$\left(\frac{1}{6Pr^*} \frac{\partial}{\partial t} + 2 \right) M w - q^2 Ra T = 0 \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - M \right) w - \frac{w}{6} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

avec $M = \partial^2 / \partial z^2 - q^2$. Les conditions aux limites associées à ce système sont:

$$w = T = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, 1 \quad (9)$$

3. RESOLUTION NUMERIQUE

Le système (7)-(8) est un système de Floquet dont les solutions sont développées sous la forme:

$$(w, T) = \exp(\mu \omega t) \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} \{w_p(z), T_p(z)\} \exp(i p \omega t) \quad (10)$$

Le terme $\mu = \mu_r + i\mu_i$ est l'exposant de Floquet, $i^2 = -1$ et p est un entier. Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de stabilité marginale ($\mu_r = 0$) correspondant à des solutions harmoniques ($\mu_i = 0$). Nous exprimons la température d'équilibre sous sa forme complexe:

$$\bar{T}(z, t) = G(z) e^{i\omega t} + G^*(z) e^{-i\omega t},$$

avec $G(z) = T_1(z) - iT_2(z)$ et G^* est le complexe conjugué de G . Nous introduisons l'expression (10) dans le système (7)-(8), nous obtenons donc une hiérarchie de systèmes où les inconnues sont w_p et T_p :

$$\left(\frac{i\omega p}{6\text{Pr}^*} + 2\right)(D^2 - q^2)w_p = q^2 Ra T_p \quad (11)$$

$$(D^2 - q^2 - i\omega p)T_p = \frac{1}{6}(DG w_{p-1} + DG^* w_{p+1}) \quad (12)$$

L'opérateur D désigne $\frac{d}{dz}$.

Les conditions aux limites (9) s'écrivent maintenant:

$$w_p = T_p = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, 1 \quad (13)$$

La hiérarchie de systèmes d'équations, tronquée à l'ordre P avec $-P \leq p \leq P$, est transformée en un système d'équations différentielles du premier ordre dont les inconnues sont: w_p , Dw_p , T_p et DT_p .

La méthode de résolution consiste à transformer le problème aux valeurs propres (11)-(12) en un problème aux conditions initiales [14]. Un ensemble de solutions indépendantes, satisfaisant les conditions aux limites en $z=0$, sont construites par un schéma numérique de Runge-Kutta du quatrième ordre avec un pas de l'ordre de 0.001. Une combinaison linéaire de ces solutions vérifiant les conditions aux limites en $z=1$, mène à un système algébrique homogène dont les inconnus sont les coefficients d'une telle combinaison. La condition nécessaire pour l'existence de solutions non nulles est que le déterminant, d'ordre $2(2P+1)$, de ce système soit nul; ceci mène à l'équation de dispersion reliant la fréquence adimensionnelle, ω , le nombre de Prandtl, Pr^* , le nombre d'onde, q , et le nombre de Rayleigh, Ra .

La convergence des résultats numériques est assumée lorsque la valeur du nombre de Rayleigh critique, Ra_c , correspondant à P dans la série de Fourier est à 2% de celle correspondant à $P+1$. La convergence des résultats numériques dépend fortement de l'ordre de troncature des séries de Fourier. Pour les basses fréquences, l'ordre de troncature P est supérieur à 20. Par contre pour les hautes fréquences, la valeur $P=6$ est suffisante pour la convergence des solutions.

Un exemple de courbe de stabilité marginale, correspondant à l'évolution du nombre de Rayleigh Ra en fonction du nombre d'onde q pour $\omega=40.5$ et $\text{Pr}^*=1$, est présenté sur la figure 2. La Figure 3

illustre l'évolution du nombre de Rayleigh critique, Ra_c , en fonction de l'inverse de la fréquence, $1/\omega$. Cette figure montre que le système est potentiellement instable pour une certaine fréquence intermédiaire et la déstabilisation est maximale pour la fréquence $\omega = 9.68$. Les valeurs critiques en ce point de déstabilisation sont définies par des nombres de Rayleigh critique, $Ra_c = 2359$ et d'onde critique $q_c = 4$. Cependant, la couche fluide s'oriente vers une configuration d'équilibre stable dans le cas des hautes et des basses fréquences puisque le nombre de Rayleigh critique, Ra_c , tend vers des valeurs très grandes. La figure 4 représente l'évolution du nombre d'onde critique, q_c , en fonction de $1/\omega$. Nous remarquons que cette courbe présente un minimum en $\omega = 3.98$ et tend vers la valeur $q_c = 4.69$ pour les basses fréquences ($\omega < 0.2$).

4. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

4.1 Basses fréquences

Dans le cas des basses fréquences $\sigma \ll 1$, le développement asymptotique de la température de l'équilibre, \bar{T} , est donné par:

$$\bar{T} = \left[1 - \frac{z}{6} (1 - 2z^2 + z^3) \sigma^4 + o(\sigma^8) \right] \cos(\omega t) + \left[(1-z)z \sigma^2 + o(\sigma^6) \right] \sin(\omega t) \quad (14)$$

Compte tenu de ceci et en introduisant la nouvelle variable du temps, $\tau = \omega t$, le système (11)-(12) devient:

$$\left[\frac{\omega}{6Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} + 2 \right] (D^2 - q^2) T = q^2 Ra T \quad (15)$$

$$\left[(D^2 - q^2) - \omega \frac{\partial}{\partial \tau} \right] T = -\frac{1}{6} \left[\sigma^2 (1-2z) \sin(\tau) - \frac{\sigma^4}{6} (1-6z^2+4z^3) \right] \cos(\tau) w \quad (16)$$

Nous utilisons, par la suite, une approximation quasi-stationnaire en négligeant le terme $\partial/\partial\tau$ dans les équations ci-dessus. Le temps τ apparaîtra donc comme un paramètre. On distingue deux cas:

Premièrement, lorsque $\sin(\tau) \neq 0$, les termes d'ordre σ^4 sont négligés, et le système d'équations différentielles (15)-(16) se réduit à un système différentiel ordinaire :

$$(D^2 - q^2) \hat{w} = \frac{q^2}{2} \hat{Ra} T \quad (17)$$

$$(D^2 - q^2) T = \frac{(1 - 2z)}{6} \hat{w} \quad (18)$$

où $\hat{Ra} = Ra \sigma^2 \sin(\tau)$ et $\hat{w} = \sigma^2 \sin(\tau) w$. La résolution numérique du problème stationnaire (17)-(18) nous permet d'obtenir, $\hat{Ra}_c = 2828$ correspondant à $q_c = 4.68$. Par conséquent, le nombre de Rayleigh critique asymptotique, Ra_c , correspondant à $\sin(\tau) = 1$ est:

$$Ra_c = 2828 \sigma^{-2} \quad (19)$$

Dans le second cas où $\sin(\tau) = 0$, la température de base est de l'ordre de σ^4 et cette fois-ci le système à résoudre est:

$$(D^2 - q^2) \tilde{w} = \frac{q^2}{2} \tilde{Ra} T \quad (20)$$

$$(D^2 - q^2) T = \frac{1}{36} (1 - 2z)(1 + 2z - 2z^2) \tilde{w} \quad (21)$$

où $\tilde{w} = \sigma^4 w$ et $\tilde{Ra} = \sigma^4 Ra$. La résolution du système (20)-(21) permet d'obtenir les valeurs critiques, $\tilde{Ra}_c = 12644$, et, $q_c = 4.64$. Le nombre de Rayleigh critique asymptotique est donc donné par:

$$Ra_c = 12644 \sigma^{-4} \quad (22)$$

Nous illustrons sur la figure 5, les résultats asymptotiques et numériques pour les basses fréquences. La courbe (droite 1) représente l'évolution asymptotique du nombre de Rayleigh critique, Ra_c , donnée par l'équation (19), en fonction de l'inverse de la fréquence $1/\omega$, alors que la courbe (droite 2) représente celle déduite à partir de l'équation (22). Nous constatons à partir de ces courbes que seul le premier comportement asymptotique donné par l'équation (19) est en bon accord avec les résultats numériques. La déviation entre les résultats asymptotiques et ceux numériques concernant le nombre de Rayleigh critique est inférieure à 2%, pour des fréquences $\omega < 0.02$.

4.2 Hautes fréquences

Dans cette situation, l'instabilité a lieu dans une couche de peau thermique d'épaisseur $\delta = \sqrt{2\kappa/\omega^*}$ [5]. Le choix de la grandeur caractéristique, d , n'est donc plus valable. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire le changement de variable: $\tilde{z} = \omega^{1/2} z$, $\tilde{q} = \omega^{1/2} q$ et $\tau = \omega t$. Une comparaison des différents termes de l'équation (8) permet d'obtenir la relation $T \sim \omega^{1/2} w$. Tenir compte de ce résultat dans l'équation (7), où les termes de chaque membre de l'équation doivent être du même ordre, permet d'aboutir à: $Ra_c = Ra' \omega^{3/2}$ et $q_c = q' \omega^{1/2}$. Les résultats numériques obtenus prouvent ce comportement et permettent de déterminer les valeurs de Ra' et de q' . Nous obtenons ainsi

$$Ra_c \sim 74.25 \omega^{3/2} \quad (23)$$

$$q_c \sim 1.55 \omega^{1/2} \quad (24)$$

Dans le cas des hautes fréquences, nous illustrons sur la figure 6, le comportement asymptotique du nombre de Rayleigh critique obtenu à partir de l'équation (23). On montre que le nombre de Rayleigh critique varie suivant la loi asymptotique $Ra_c \approx 74.25\omega^{3/2}$. Ce résultat est en bon accord avec les résultats numériques et la déviation entre les résultats asymptotiques et ceux numériques est inférieure à 5% pour des fréquences $\omega > 160$. Concernant le comportement asymptotique du nombre d'onde, la déviation entre les deux résultats est de 0.5% pour des fréquences $\omega > 160$ (figure 4).

5. CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons étudié l'influence d'une modulation en phase des conditions aux limites relatives à la température sur l'instabilité convective d'un fluide Newtonien confiné dans une cellule de Hele-Shaw. Nous avons adopté dans la formulation des nombres de Prandtl très faibles afin de garder les termes inertiels dans les équations de mouvement. L'objectif était de déterminer les évolutions du nombre Rayleigh critique et du nombre d'onde critique, correspondants au déclenchement du mouvement de convection, en fonction de la fréquence adimensionnelle de la modulation. Nous avons utilisé la théorie de Floquet et la méthode transformant un problème aux valeurs propres en un problème aux conditions initiales pour résoudre numériquement le problème de stabilité linéaire. Les résultats numériques montrent que la modulation en phase sans composante stationnaire du gradient de température peut, à elle seule, déstabiliser la couche fluide. Pour les hautes et les basses fréquences, la couche fluide est en configuration stable et pour une certaine valeur

intermédiaire elle est potentiellement instable. Enfin, Nous avons aussi effectué une étude asymptotique pour les hautes et les basses fréquences. Les résultats asymptotiques sont en bon accord avec les résultats numériques.

L'intérêt de travailler en configuration géométrique de Hele-Shaw est de permettre de simuler les écoulements convectifs dans les milieux poreux [15-20]. L'étude que nous avons présenté peut servir de modèle théorique pour étudier l'effet de la modulation des conditions aux limites relatives à la température sur le seuil d'instabilité convectif en milieux poreux.

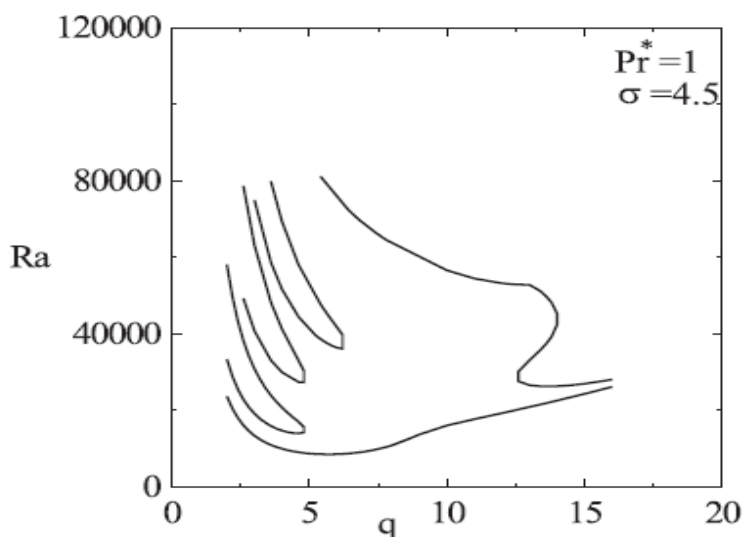


Figure 2: Courbes de stabilité marginale pour $Pr^* = 1$ et $\sigma = 4.5$ ($\omega = 40.5$).

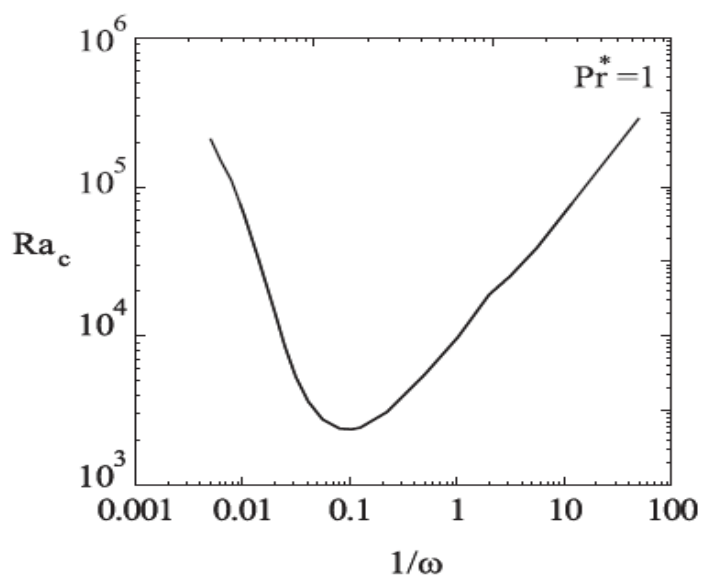


Figure 3: Evolution numérique du nombre de Rayleigh Critique; Ra_c ; en fonction de $1/\omega$.

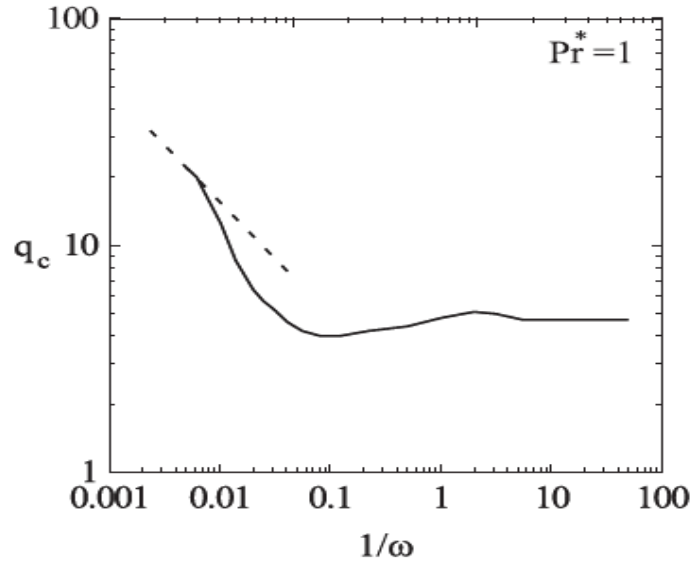


Figure 4: Evolution numérique et comportement asymptotique du nombre d'onde critique; q_c ; en fonction, de $1/\omega$. (----) Comportement asymptotique: $q_c = 1.55 \sqrt{\omega}$.

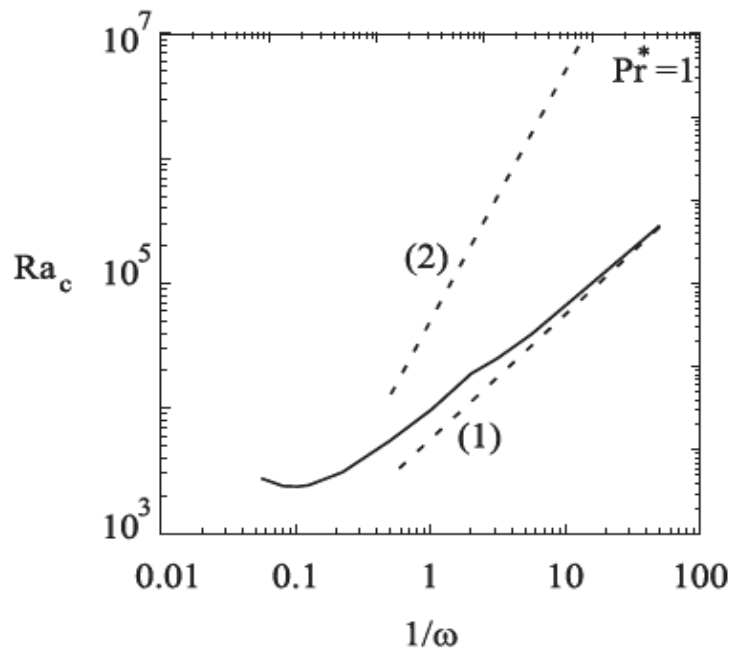


Figure 5: (—) Evolution numérique et comportement asymptotique du nombre de Rayleigh critique en fonction de $1/\omega$ pour des faibles fréquences. $^{(1)} Ra_c = 5656 \omega^{-1}$, $^{(2)} Ra_c = 50576 \omega^{-2}$.

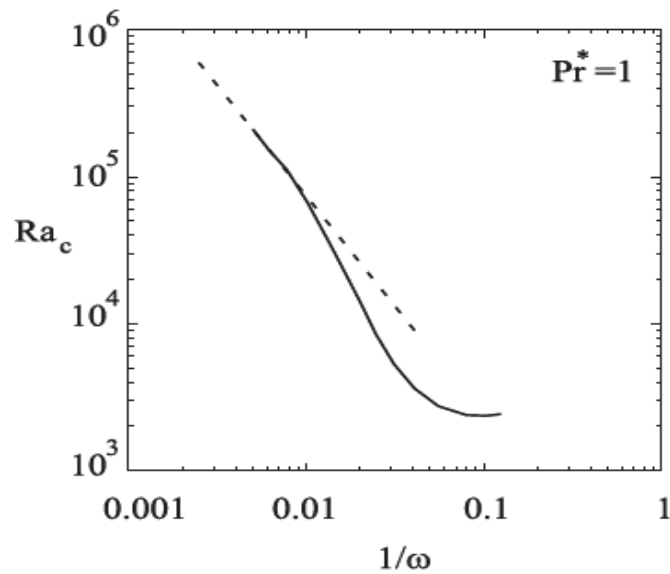


Figure 6: Evolution numérique et comportement asymptotique du nombre de Rayleigh critique en fonction de $1/\omega$ pour les hautes fréquences. (----) $Ra_c = 74.25 \omega^{3/2}$.

6. REFERENCES

- [1] Venezian G., "Effect of modulation on the onset of thermal convection. Part 2. Convective instability," *J. Fluid Mech.*, 35, pp. 243-254 (1969).
- [2] Rosenblat S. and Herbert D. M., "Low frequency modulation of thermal instability," *J. Fluid Mech.*, 43, part 2, pp. 385-398 (1970).
- [3] Yih C. S. and Li C. H., "Instability of unsteady flows or configurations. Part 2. Convective instability", *J. Fluid Mech.* 54, pp. 143-152, (1972).
- [4] Finucane R. G. and Kelly R. E., "Onset of instability in a fluid layer heated sinusoidally from below", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 19, pp. 71-85, (1976).
- [5] Gershuni G. Z. and Zhukhovitskii E. M., "*Convective Instability of Incompressible Fluid*," Keter Publisher, Jerusalem, pp. 223-229, (1976).
- [6] Roppo M. N., Davis S. H. and Rosenblat S., "Bénard convection with time-periodic heating," *Phys. Fluids*, 27 (4), pp. 796-803, (1984).
- [7] Bhatia P. K., B. S. Bhadauria, and Z. Naturforsch, "Effect of modulation on thermal convection instability," *A: Phys. Sci.* 55, pp. 957-966, (2000).
- [8] Aniss S., Belhaq M., Souhar M., Velarde M. G., "Asymptotic Study of Rayleigh-Bénard Convection under Time Periodic Heating in Hele-Shaw Cell" *Physica Scripta*. Vol. 71, pp. 1-7, 2005.
- [9] Oukada B., Ouazzani M. T. and Aniss S., "Effet d'une modulation en phase de température à la frontière sur l'instabilité convective d'une couche liquide viscoélastique", *C. R. Acad. Sci., Ser. IIb: Mec., phys., Chim., Astron.* 334, pp. 205-211, (2006).
- [10] Bhadauria B. S., "Combined effect of temperature modulation and magnetic field on the onset of convection in an electrically conducting-fluid-saturated porous medium", *J. Heat Transfer*, 130 (5), (2008).

- [11] Bhadauria B., Bhatia P. K. and Lokenath D., "Weakly non-linear analysis of Rayleigh-Benard convection with time periodic heating", *Int. J. Non-Linear Mechanics* **44**, pp. 58-65, (2009).
- [12] Aniss S., Souhar M. and Brancher J. P., "Asymptotic study and weakly nonlinear analysis at the onset of Rayleigh-Benard convection in Hele-Shaw cell", *Phys. Fluids*, **7**, pp. 926-934, (1995).
- [13] Aniss S., Souhar M. and Belhaq M., "Asymptotic study of the convective parametric instability in hele-shaw cell," *Phys.Fluids A* **12**, pp. 262-268, (2000).
- [14] Platten J. K. and Legros J. C., *Convection in liquids*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, (1984).
- [15] Elder J.W., "Steady free convection in a porous medium heated from below", *J. Fluid Mech.* **2**), pp. 29-48, (1967).
- [16] Hartline, B. K. and Lister, C. R. B., "Thermal convection in Hele-Shaw cell", *J. Fluid Mech.* **79**, pp. 379-389, (1977).
- [17] Hartline, B.K. and Lister, C. R. B., "An experiment to verify the permeability of Hele-Shaw cell", *Geophys. Res. Lett.* **5** (4), pp. 225-228, (1978).
- [18] Kvernfold O., "On the stability of non linear convection in Hele-Shaw cell", *Int. J. Heat Mass Trans.* **22**, pp. 395-400, (1979).
- [19] Kvernfold, O. and Tyvand, P. A., "Nonlinear thermal convection in anisotropic porous media", *J. Fluid Mech.* **99**, pp. 673-686, (1980).
- [20] Combarous M. A. and Bories S. A., "Hydrothermal convection in saturated porous media", *Advances in Hydrosience*, Academic Press, **10**, pp. 231-307, (197)