

## **Méthode asymptotique numérique et méthodes sans maillage pour la résolution des problèmes non linéaires de Poisson**

A. TRI

Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences Aïn Chok, Université Hassan II Casablanca, Maroc

H. ZAHROUNI

Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux, LEM3, CNRS, UMR 7239, Université Paul Verlaine – Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz, France

M. POTIER-FERRY

Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux, LEM3, CNRS, UMR 7239, Université Paul Verlaine – Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz, France

### **Abstract:**

The proposed work deals with the combination of asymptotic numerical method and Meshless method to solve the non linear Poisson problem. The perturbation technique allows one to transform the non linear problem into a succession of differential linear problems with variable coefficients for which the fundamental solution is not available. However, the numerical method MFS-MPS (Fundamental Solution Method - Particular solution Method) and the Analog equation method (AEM) are used to solve the resulting linear partial differential equations with variable coefficients. This work permits to compute the branch solution of the nonlinear Poisson problem and to follow the bifurcated branches.

### **Résumé:**

L'association de la méthode de continuation asymptotique numérique et d'une méthode sans maillage est mise au point pour résoudre des problèmes non linéaires de Poisson. Grâce aux méthodes de perturbation, le problème non linéaire est transformé en une succession d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. Sachant que la solution fondamentale n'est pas toujours disponible et en particulier pour les opérateurs à coefficients variables, la méthode MFS-MPS (Méthode de Solutions fondamentales-Méthode de Solutions Particulières) combinée avec la méthode des équations analogues (AEM) est développée pour résoudre ces problèmes linéaires résultants et suivre les branches de solution non linéaire ainsi que les branches bifurquées.

**Mots clés :** Méthode Asymptotique Numérique (MAN), Méthode sans Maillage (Meshless), Méthode des Solutions fondamentales (MFS), Méthode des Solutions Particulières (MPS).

## 1. INTRODUCTION

L'efficacité des méthodes asymptotiques numériques (MAN) pour la résolution d'une certaine classe de problèmes non linéaires n'est plus à démontrer. De nombreuses applications ont établi la robustesse de ces méthodes en mécanique des solides et des fluides et dans d'autres domaines de la physique [1-3]. Ces techniques consistent en l'association d'une méthode de perturbation et d'une méthode de discrétisation, généralement la méthode des éléments finis. Depuis des décennies, des méthodes sans maillage ont été développées dans le but d'éviter certaines difficultés liées au maillage par éléments finis. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode des solutions fondamentales (MFS) [4] qui a prouvé son efficacité pour la résolution des équations différentielles homogènes et qui a été étendue aux équations aux dérivées partielles non homogènes grâce à l'utilisation des fonctions de base radiale (RBF) pour la détermination de la solution particulière dite MPS. Sachant que la solution fondamentale n'est pas toujours disponible et en particulier pour les opérateurs à coefficients variables, une approximation associant ces deux méthodes (MFS-MPS) [5-8] est mise au point pour suivre des branches de solutions complexes ainsi que des branches bifurquées.

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode qui combine les méthodes asymptotiques numériques et la méthode sans maillage MFS-MPS pour résoudre le problème non linéaire de Poisson suivant :

$$\Delta \mathbf{u} + \mathbf{N}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{f} \quad (1.1)$$

Avec des conditions de Dirichlet sur la frontière

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{g} \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{u}$  est l'inconnue du problème,  $\lambda$  est un paramètre de contrôle,  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  représente un opérateur non linéaire et  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont des fonctions données.

## 2. METHODE ASYMPTOTIQUE NUMERIQUE

Le terme non linéaire  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  de (1.1) peut être une fonction plus ou moins complexe. Pour faciliter la compréhension, nous avons choisi  $\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^2$  qui a une forme quadratique, la forme optimale et la mieux adaptée pour les développements asymptotiques. Les équations (1.1) et (1.2) s'écrivent alors sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u}^2 = \lambda \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \lambda \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\Omega$  représente le domaine étudié et  $\partial\Omega$  sa frontière. Les variables  $(\mathbf{u}, \lambda)$  sont alors développées en séries entières en fonction d'un paramètre de chemin ' $\mathbf{a}$ ' telle que,

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}) - \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \mathbf{a}^i \mathbf{u}_i \quad \lambda(\mathbf{a}) - \lambda_0 = \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \mathbf{a}^i \lambda_i \quad (2.2)$$

Avec  $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$  un point solution connu et  $\mathbf{p}$  est l'ordre de troncature de la série. Le paramètre de chemin ' $\mathbf{a}$ ' est défini par le produit scalaire suivant:

$$\mathbf{a} = \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0) \lambda_1 \quad (2.3)$$

Les équations (2.1), (2.2) et (2.3) mènent à une succession de problèmes linéaires pour chaque ordre de la série,

$$\text{Ordre 1: } \begin{cases} \mathbf{L}_1(\mathbf{u}_1) = \Delta \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{f} \\ \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{g} \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle + \lambda_1^2 = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\text{Ordre k: } \begin{cases} \mathbf{L}_k(\mathbf{u}_k) = \Delta \mathbf{u}_k + 2\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{f} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_{k-i} \\ \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{g} \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle + \lambda_k \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

On note que tous ces problèmes représentent des équations différentielles avec le même opérateur à coefficients variables, seul le second terme change à chaque ordre. Afin de déterminer toute la branche de solution, la technique de continuation asymptotique est utilisée. Cette méthode, qui est une technique de cheminement, permet l'application des méthodes de perturbation pas à pas. A chaque pas une représentation analytique de la branche est déterminée au voisinage d'un point solution, qui représente le point de départ du nouveau pas, à l'intérieur du rayon de convergence des séries entières. Ce point est déterminé grâce à la définition suivante de la valeur maximale du paramètre ' $\mathbf{a}$ ' [2],

$$\mathbf{a}_{\max} = \left( \varepsilon \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_p\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (2.6)$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre de précision. La fin du pas  $(\mathbf{u}(\mathbf{a}_{\max}), \lambda(\mathbf{a}_{\max}))$  défini par ce critère est alors considérée comme le point de départ  $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$  du pas suivant. Par conséquent, les opérateurs à coefficients variables de (2.4) et (2.5) changent à chaque pas.

### 3. METHODE DES SOLUTIONS FONDAMENTALES ET DES SOLUTIONS PARTICULIERES (MFS-MPS)

Dans cette section, nous proposons de résoudre par MFS-MPS les problèmes linéaires (2.4) et (2.5) pris sous la forme simple suivante à chaque pas,

$$\begin{cases} \Delta(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \\ \text{sur } \partial\Omega \end{array} \quad (3.1)$$

Ce sont des équations aux dérivées partielles (EDP) avec des opérateurs à coefficients variables et dont les solutions fondamentales ne sont pas disponibles. Pour palier à cet handicap, la méthode des équations analogues (AEM) [6-8] est utilisée pour les transformer en des problèmes de Poisson standards. Ceci consiste à maintenir le Laplacien, dont la solution fondamentale est connue, à gauche et les autres termes sont déplacés à droite et sont considérés comme un second membre. L'équation (3.1) devient alors,

$$\begin{cases} \Delta(\mathbf{u}) = -\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \\ \text{sur } \partial\Omega \end{array} \quad (3.2)$$

qui est facilement résolue par la méthode MFS si le terme  $\mathbf{h}$  est connu. Or  $\mathbf{h}$  dépend de l'inconnue  $\mathbf{u}$ , d'où la nécessité d'utiliser la méthode MFS-MPS.

### 3.1 Principe de la méthode MFS-MPS

Dans cette section, nous présentons brièvement la technique MFS-MPS nouvellement développée. L'idée suppose que la solution d'une EDP combine simultanément la solution particulière et la solution homogène. Ceci permet d'écrire cette solution sous la forme suivante:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N_t} \alpha_i \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^{N_b} \beta_i \mathbf{G}(\phi_i) \quad (3.3)$$

Où  $N_t = N_d + N_b$ ,  $N_d$  et  $N_b$  représentent respectivement les points d'interpolation à l'intérieur du domaine  $\Omega$  et le nombre de points sur sa frontière.  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{N_t}$  et  $\{\beta_i\}_{i=1}^{N_b}$  sont des coefficients inconnus à déterminer. Les fonctions  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_i)$  représentent les solutions particulières de l'opérateur de Laplace défini par,

$$\Delta(\mathbf{v}(\mathbf{r}_i)) = \phi(\mathbf{r}_i) \quad (3.4)$$

où les  $\phi(\mathbf{r}_i)$  sont des fonctions de base radiale qui permettent d'approcher le second terme de la première équation (3.2), ainsi:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{N_t} \alpha_j \phi(\mathbf{r}_j) \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{r}_i = \|(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - [(\mathbf{x})_i, \mathbf{y}_i]\|$  avec  $[(\mathbf{x})_i, \mathbf{y}_i]_{i=1..N_t}$  sont des points de collocation dans le domaine. On note également que,

$$G(\rho_i) = -\frac{1}{2\pi} \log(\rho_i) \tag{3.6}$$

est la solution fondamentale du Laplacien pour le problème 2D caractérisée par,

$$\Delta G(\rho) = 0 \tag{3.7}$$

$\rho_i = \|(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - [(\mathbf{x}s)_i, \mathbf{y}s_i]\|$  et  $[(\mathbf{x}s)_i, \mathbf{y}s_i]_{i=1..N_b}$  représentent les points sources pris sur une frontière fictive  $\Gamma$  contenant le domaine  $\Omega$ . Au lieu de chercher la solution particulière et la solution homogène séparément, on calcule les coefficients  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{N_t}$  et  $\{\beta_i\}_{i=1}^{N_b}$  simultanément. En introduisant (3.3) dans (3.2a), on obtient:

$$\sum_{i=1}^{N_t} \alpha_i \Psi(\mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^{N_b} \beta_i \Theta(\rho_i) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{dans } \Omega \tag{3.8}$$

Telle que

$$\Psi(\mathbf{r}_i) = \Delta v(\mathbf{r}_i) + \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})v(\mathbf{r}_i) = \phi(\mathbf{r}_i) + \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})v(\mathbf{r}_i) \tag{3.9}$$

$$\Theta(\rho_i) = \Delta G(\rho_i) + \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})G(\rho_i) = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})G(\rho_i) \tag{3.10}$$

La condition aux limites (3.2b) devient alors,

$$\sum_{i=1}^{N_t} \alpha_i v(\mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^{N_b} \beta_i G(\rho_i) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{3.11}$$

$\Psi(\mathbf{r})$  et  $\Theta(\rho)$  sont des fonctions connues.

### 3.2 Choix de l'approximation RBF

L'efficacité et la précision de l'interpolation dépend du choix des fonctions de base radiale  $\phi$ . En effet, les polynômes de Lagrange, les interpolants de Fourier, les fonctions radiales polynomiales, les Thin Plate Splines (TPS) ainsi que les fonctions multi-quadratiques (MQ) peuvent être utilisés [4, 5]. Dans ce papier, le choix s'est restreint aux fonctions de base radiales polynomiales et multi-quadratiques. Pour ce dernier choix, la méthode MFS-MPS peut coïncider avec la méthode de Kansas,

une des méthodes les plus connues dans la communauté Meshless [5]. Pour les fonctions polynomiales, on a utilisé la fonction radiale suivante :

$$\phi(\mathbf{r}) = 1 + r^3 \quad (3.12)$$

d'où

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{r^2}{4} + \frac{r^5}{25} \quad (3.13)$$

Pour le second choix, les fonctions multi-quadriques suivantes ont été choisies :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sqrt{c^2 + r^2} \quad (3.14)$$

d'où

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{9}(4c^2 + r^2)\sqrt{c^2 + r^2} - \frac{c^3}{3} \ln(c + \sqrt{c^2 + r^2}) \quad (3.15)$$

en 2D. Le paramètre  $c$  est une constante donnée.

### 3.3 Procédure d'implantation

Pour la mise en œuvre de cette technique, nous choisissons  $N_a$  points intérieurs dans le domaine  $\Omega$ ,  $N_b$  points sur la frontière  $\partial\Omega$  et  $N_c$  points source sur la frontière fictive  $\Gamma$ .

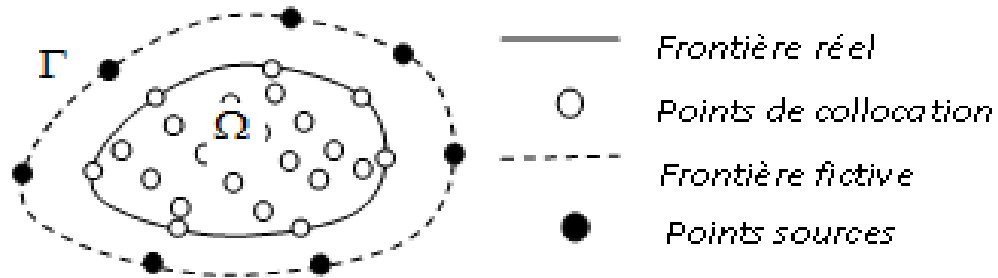


Figure 1: Le domaine  $\Omega$  et la frontière fictive

Par collocation, on obtient un système d'ordre  $[(N)_t + N_b] \times [(N)_t + N_b]$  à résoudre:

$$\begin{bmatrix} \Psi(r_{ij}) & \Theta(\rho_{ij}) \\ \mathbf{v}(r_{ij}) & \mathbf{G}(\rho_{ij}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Une fois les coefficients  $\{\alpha_i\}_{i=1}^{N_t}$  et  $\{\beta_i\}_{i=1}^{N_b}$  sont déterminés par (3.14), la solution approchée est obtenue à partir de (3.3).

## 4. APPLICATION NUMERIQUE

Pour montrer l'efficacité de l'algorithme développé dans les sections précédentes, nous résolvons le problème non linéaire de Poisson suivant dans un domaine circulaire 2D :

$$\begin{cases} \Delta(u) + u^2 = \lambda(4 + (x^2 + y^2)) & \text{dans } \Omega \\ u = \lambda[(x)^2 + y^2] & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\Omega = \{x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$ . La solution exacte, pour  $\lambda = 1$ , est donnée par:  $u_{\text{exact}} = x^2 + y^2$

Dans cet exemple, on discrétise le domaine avec 69 points intérieurs, 10 points sur le bord et 10 points sources pris sur un cercle de centre (0,0) et de rayon R=8 (Figure 2).

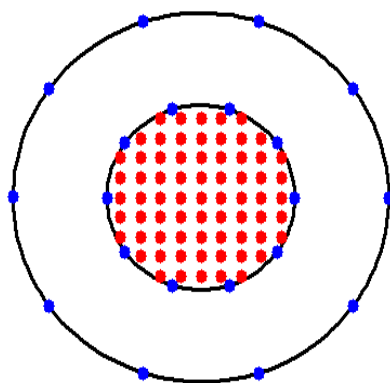


Figure 2: Discretisation du domaine  $\Omega$  et de la frontière fictive  $\Gamma$

Sur la figure 3, on reporte la solution  $u$  obtenue par la méthode proposée en fonction du paramètre  $\lambda$  au point  $(x = -0.4286, y = 0.6429)$  pour différents ordres de troncature des séries entières.

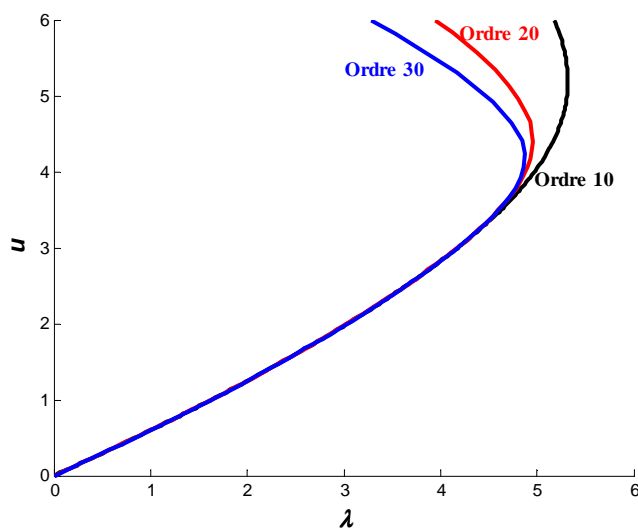


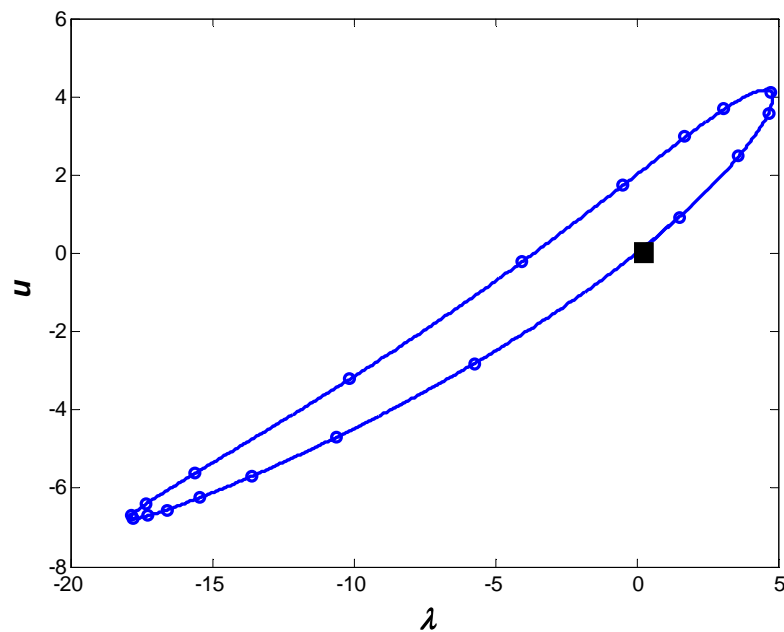
Figure 3: Solution  $u$  en fonction du paramètre  $\lambda$  obtenue par MAN-MFS-MPS pour le problème (4.1) pour différents ordres de troncature des séries

Sur la figure 3, on retrouve la principale caractéristique des séries entières et particulièrement la divergence des solutions au-delà du rayon de convergence, estimé pour cet exemple autour de  $\lambda \approx 4.5$ . Cette valeur qui dépasse largement  $\lambda = 1$ , nous permet de comparer la solution approchée avec la solution exacte connue pour  $\lambda = 1$ . Cette comparaison est reportée sur le Tableau 1.

$x$	$y$	$u_{\text{MAN-MFS-MPS}}$	$u_{\text{exact}}$	$ u_{\text{MAN-MFS-MPS}} - u_{\text{exact}} $
1.0000	0.0000	0.9999	1.0000	5.2076e-005
0.8090	0.5878	0.9999	1.0000	5.2306e-005
0.3090	0.9511	0.9999	1.0000	5.1407e-005
-0.4286	0.6429	0.5969	0.5969	3.9430e-005
0.2143	-0.8571	0.7806	0.7806	4.4045e-005
0.6429	-0.2143	0.4591	0.4592	4.0404e-005

**Tableau 1** : Comparaison de la solution analytique avec la solution numérique

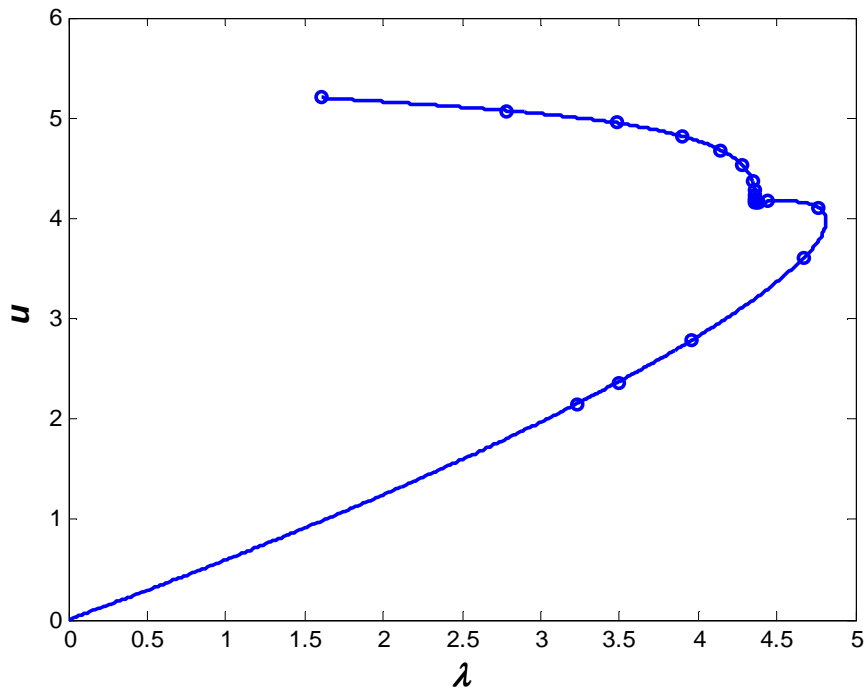
Il est clair, que l'erreur, incluant aussi bien les erreurs provenant de l'approximation MFS-MPS et celles provenant du développement asymptotique, est généralement inférieure à  $10^{-4}$ . Ceci montre que l'association des méthodes asymptotiques et de la méthode meshless développée dans cette étude donne une bonne approximation de la solution exacte.



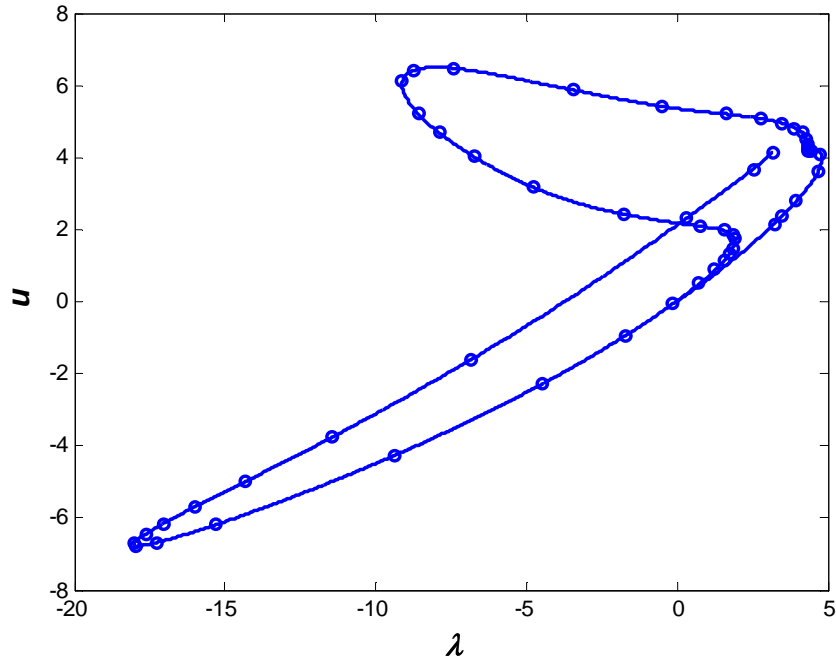
**Figure 4**: Solution  $u$  en fonction du paramètre  $\lambda$  obtenue par la MAN-MFS-MPS pour le problème (4.1) utilisant les fonctions de base radiale (3.12). Paramètres MAN : Ordre 20 et  $\varepsilon = 10^{-6}$ .



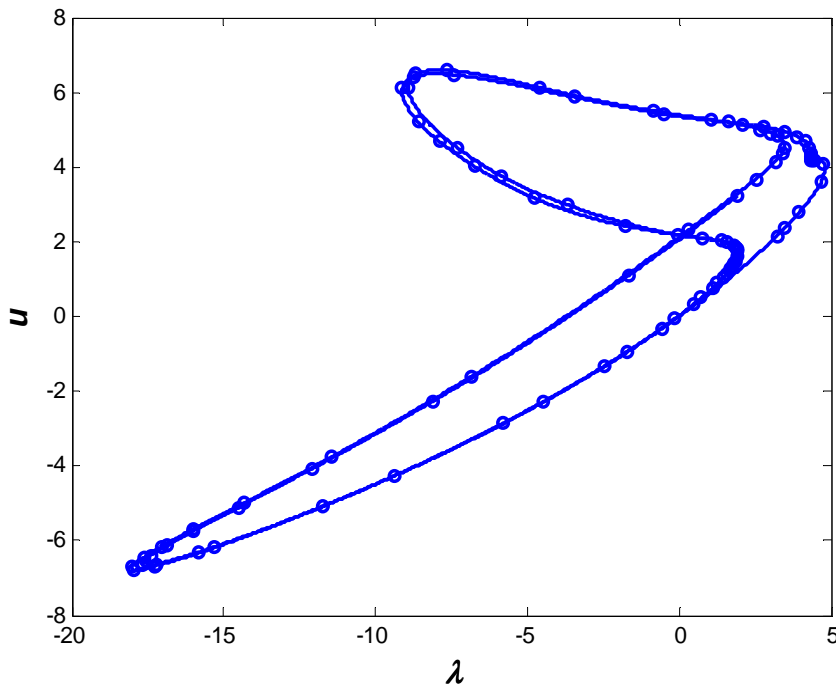
Après introduction de la méthode de continuation et en utilisant les fonctions de bases radiales (3.12), la branche de solution fondamentale est alors déterminée entièrement. Les résultats pour l'ordre 20 et  $\varepsilon = 10^{-6}$  sont représentées sur la figure 4. On constate sur cette figure que la branche de solution est obtenue avec 19 pas de continuation (la longueur d'un pas est représentée par un petit cercle sur la courbe). Notons que dans le cadre de la méthode asymptotique numérique, la longueur de pas est naturellement adaptative et estimée a posteriori en s'appuyant sur les termes de la série calculés précédemment. En effet, au voisinage des points limites, cette longueur diminue et s'adapte à la non linéarité locale de la branche solution. En augmentant le nombre de pas, la branche fait des cycles et reste sur la branche fondamentale.



**Figure 5** : Solution obtenue par MAN-MFS-MPS utilisant la fonction de base radiale (3.14). Paramètres MAN : Ordre 20 et  $\varepsilon = 10^{-6}$ . La courbe montre la branche fondamentale et l'apparition de la branche bifurquée pour  $\lambda \approx 4.3$



**Figure 6** : Solution obtenue par MAN-MFS-MPS utilisant la fonction de base radiale (3.14). Paramètres MAN: Ordre 20 et  $\varepsilon = 10^{-6}$ . La Courbe indique le retour de la branche bifurquée sur la branche fondamentale pour  $\lambda \approx 2.9$



**Figure 7** : Solution obtenue par MAN-MFS-MPS utilisant la fonction de base radiale (3.14). Paramètre MAN: Ordre 20 et  $\varepsilon = 10^{-6}$ . La courbe présente des cycles de passage de la branche fondamentale à la branche bifurquée et vis-versa.

Cette même analyse a été refaite en remplaçant la fonction de base radiale (3.12) par (3.14). Pour les mêmes paramètres de la MAN, les solutions sont reportées sur les figures 5, 6 et 7. Sur la figure 5, on observe une forte accumulation de pas au voisinage de  $\lambda \approx 4.3$ , juste après le point limite, donnant naissance à une branche bifurquée qui revient sur la branche fondamentale au voisinage de  $\lambda \approx 2.9$  (figure 6). Si, on augmente le nombre de pas, on bifurque de la branche fondamentale à la branche bifurquée et vis-versa (figure 7). On conclut, qu'avec les fonctions de bases polynomiales, seule la branche de solution fondamentale est calculée alors que pour les fonctions multi-quadriques, on obtient aussi les branches bifurquées. D'où la nécessité du bon choix de ces fonctions de bases selon le problème étudié. Cette question reste ouverte.

## 5. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons présenté une méthode associant la méthode asymptotique numérique (MAN) et la méthode sans maillage MFS-MPS pour résoudre le problème non linéaire de Poisson. Les résultats numériques montrent l'efficacité de l'algorithme proposé pour obtenir aussi bien les branches fondamentales que les branches bifurquées. Le passage d'une branche à une autre se fait automatiquement dans le cas des fonctions radiales multi-quadriques. Cette technique peut être facilement adaptée à d'autres problèmes non linéaires. Des travaux sont actuellement en cours pour étendre notre algorithme à d'autres domaines d'application.

## 6. REFERENCES

1. Damil N., Potier-Ferry M., A new method to computed perturbed bifurcations: application to the buckling of imperfect elastic structures, *International Journal of Engineering Sciences*, 28 (1990) 934-957.
2. Cochelin B., A path-following technique via an asymptotic-numerical method, *Computers and Structures* 53-5 (1994) 1181-1192.
3. Tri A., Zahrouni H., Potier-Ferry M., Perturbation technique and method of fundamental solution to solve nonlinear Poisson problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35 (2011) 273-278.
4. Golberg M. A., The method of fundamental solutions for Poisson's equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 16 (1995) 205-213.
5. Chen C.S., Fan C.M., Monroe J., The method of fundamental solutions for solving elliptic pdes with variable coefficients. In: Chen CS, Karageorghis A, Smyrlis YS, editors. *The method of fundamental solutions—a meshless method*. Atlanta: Dynamic Publishers, 2008, 75-105.
6. Katsikadelis J.T., The analog equation method, a boundary-only integral equation for non-linear static and dynamic problems in general bodies. *Theoretical and Applied Mechanics* 27 (2002), 13-38.
7. Yao G., Tsai C.H., Chen W. The comparison of three meshless methods using radial basis functions for solving fourth-order partial differential equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 34 (2010) 625-631.
8. Wang H., Qin Q.H., A meshless method for generalized linear or nonlinear Poisson-type problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 30 (2006) 515-521.

