

## **Instabilité interfaciale dans une cellule de Hele-Shaw annulaire en rotation variable dans le temps**

J. BOUCHGL

Université Hassan II, Faculté des Sciences Ain Chock, Laboratoire de Mécanique Km 8 Route d'El Jadida  
BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc

S. ANISS

Université Hassan II, Faculté des Sciences Ain Chock, Laboratoire de Mécanique Km 8 Route d'El Jadida  
BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc  
Auteur correspondant : [saniss@fsac.ac.ma](mailto:saniss@fsac.ac.ma)

M. SOUHAR

Lemta-UMR CNRS 7563-Ensem, 2 avenue de la Forêt de Haye, BP 160, Vandœuvre lès-Nancy 54504,  
France

O. CABALLINA

Lemta-UMR CNRS 7563-Ensem, 2 avenue de la Forêt de Haye, BP 160, Vandœuvre lès-Nancy 54504,  
France

### **Abstract**

The present preliminary study deals with the behavior of an interface between two immiscible incompressible viscous fluids confined in an annular Hele-Shaw cell subject to periodic rotation. The aim is to investigate the effect of a time dependent angular velocity on the interfacial instability in the absence of Coriolis force. The linear stability analysis, of the basic state, which corresponds to a pulsed flow, leads to a periodic Mathieu oscillator. Then, the threshold of instability of the interface is characterized by harmonic or sub-harmonic periodic solutions. We show that the relevant parameters that control the interface are the Bond number, viscosity ratio, Atwood number and amplitude and frequency of rotation.

### **Résumé**

Nous présentons une étude préliminaire sur les effets de la vitesse de rotation périodique sur l'instabilité interfaciale entre deux fluides Newtoniens non miscibles et confinés dans une cellule de Hele-Shaw annulaire en rotation variable dans le temps. L'étude de stabilité linéaire de la solution de base, correspondant à deux écoulements pulsés, nous permet d'aboutir à un oscillateur de Mathieu périodique. Le seuil de l'instabilité de l'interface est donc caractérisé par des solutions périodiques harmoniques ou sous-harmoniques. Nous montrons que les paramètres pertinents qui permettent de contrôler l'interface sont le nombre de Bond, le rapport de viscosité, le nombre d'Atwood ainsi que l'amplitude et la fréquence de la rotation.

## 1. INTRODUCTION

L'étude de stabilité de l'interface séparant deux fluides non miscibles confinés dans une cellule de Hele-Shaw annulaire en rotation a fait l'objet de plusieurs travaux théoriques et expérimentaux [1-11]. Les forces centrifuges, en présence d'une différence de densité entre les deux fluides, donnent lieu à une instabilité dite instabilité de Rayleigh-Taylor accompagnée d'un écoulement visqueux. Le cas particulier où les rapports de densité et de viscosité sont très grands a été traité par Schwartz [1]. Il a déterminé le taux de croissance de la perturbation de l'interface en présence des forces de Coriolis. Plus tard, Miranda [5] a considéré le cas d'une interface séparant un liquide magnétique et un liquide usuel ; en présence d'un champ magnétique radial externe et en tenant compte de la superposition des forces centrifuges et magnétiques, l'analyse de stabilité linéaire a montré que les forces magnétiques ont tendance à stabiliser l'interface. Gadêlha et Miranda [9] ont effectué une analyse de stabilité linéaire et faiblement non linéaire de l'interface. Dans ce travail, les auteurs ont étudié l'effet du rapport de viscosité et du coefficient de la tension superficielle sur la stabilité de l'interface. Récemment, Waters et Cummings [10] ont amélioré le travail de Schwartz [1] en utilisant la solution exacte du champ de vitesse calculé auparavant dans [6]. Dans cette étude [10], l'accent a été mis sur l'influence du nombre d'Eckman sur le taux de croissance. Par la suite, Abidate et al. [11] ont examiné à la fois l'effet des forces de Coriolis ainsi que celui des conditions aux limites et du paramètre géométrique de courbure sur le taux de croissance.

Dans ce présent travail, à la différence des travaux cités ci-dessus, nous nous intéressons à la stabilité interfaciale dans un repère en rotation variable dans le temps. L'objet de cette étude, qui est une extension du travail de Abidate et al. [11], est d'examiner la configuration de deux fluides non miscibles, incompressibles et confinés dans une cellule de Hele-Shaw annulaire en rotation périodique dans le temps. Dans cette situation, l'état de base est instationnaire et l'écoulement dans chaque fluide est pulsé. Une situation similaire a été analysée par Kelly [12]. Ce dernier a étudié la stabilité d'une interface séparant deux couches fluides horizontales en considérant que dans chaque fluide la vitesse dépend du temps. Il a montré que l'équation relative à l'élévation de l'interface par rapport à la ligne horizontale, représentant l'équilibre, est une équation différentielle à coefficients variables dans le temps. Dans le cas particulier où les vitesses des deux fluides sont périodiques, cette équation différentielle correspond à un oscillateur paramétrique correspondant à l'équation de Mathieu. Une application du travail de Kelly [12] a été donnée par Khenner et al. [13] qui ont traité l'étude de stabilité linéaire de l'interface séparant deux fluides en oscillations horizontales. Cette étude représente une autre application du travail de Kelly [12]. Ici, l'écoulement pulsé est généré par les forces d'entraînement dues à la dépendance de la rotation en fonction du temps au lieu d'un écoulement pulsé généré par les mêmes forces d'entraînement résultant d'un mouvement oscillatoire [13].

## 2. FORMULATION DU PROBLEME

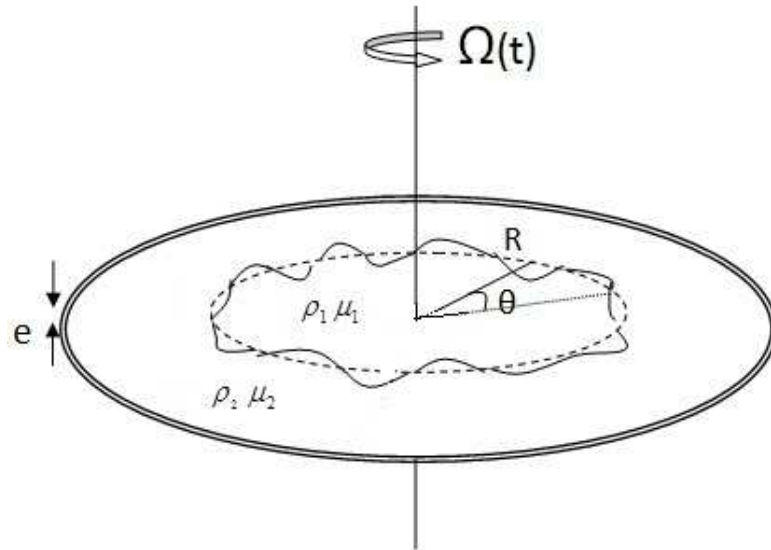
Considérons deux fluides Newtoniens, non miscibles et incompressibles de viscosités  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et de densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , confinés dans une cellule de Hele-Shaw annulaire, d'épaisseur  $e$ , laquelle effectue un mouvement de rotation périodique autour de son axe vertical,  $\Omega(t) = \Omega_m \cos(\omega t)$  (figure 1). Nous négligeons la pesanteur en considérant  $g \ll \Omega^2 R$  où  $R$  est le rayon à l'interface. Nous notons par  $\mathbf{V}_j(u_j, v_j)$  la vitesse relative ( $j = 1$  ou  $2$  selon le fluide considéré) et  $P_j$  la pression. Dans le

repère relatif,  $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k})$ , lié à la cellule et en négligeant les forces de Coriolis, les équations régissant le mouvement s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_j = 0 \quad (j=1,2) \quad (1)$$

$$\rho_j \left[ \frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial t} + (\mathbf{V}_j \cdot \nabla) \mathbf{V}_j \right] = -\nabla p_j + \mu_j \Delta \mathbf{V}_j - \rho_j \boldsymbol{\Omega}(t) \wedge (\boldsymbol{\Omega}(t) \wedge \mathbf{r}) - \rho_j \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}(t)}{dt} \wedge \mathbf{r} \right) \quad (2)$$

Avec  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ ,



**Figure 1:** Configuration étudiée : fluides non miscibles dans une cellule de Hele-Shaw annulaire, horizontale et en rotation variable dans le temps

Pour de faibles amplitudes de la vitesse de rotation, l'interface séparant les deux fluides est supposée circulaire de rayon  $R$ . Par ailleurs, le terme  $\frac{d\boldsymbol{\Omega}(t)}{dt} \wedge \mathbf{r}$  produit un champ de vitesse ayant une composante azimutale  $\mathbf{V}_j^b = (0, V_j^b, 0)$ . Cette solution de base satisfait nécessairement l'équation de continuité, les équations de la quantité de mouvement ainsi que les conditions aux limites au niveau des parois horizontales,  $V_j^b(r, z, t) = 0$  en  $z = \pm \frac{e}{2}$ . En approximation de Hele-Shaw, configuration dans laquelle le rapport d'aspect géométrique,  $\varepsilon = \frac{e}{R}$ , est supposé très inférieur à l'unité [14-15], les équations de conservation de l'état de base, au premier ordre ( $\varepsilon = 0$ ), sont données par

$$-\rho_j \frac{(V_j^b)^2}{r} = -\frac{\partial P_j^b}{\partial r} + \rho_j r \Omega^2(t) \quad (3)$$

$$\rho_j \frac{\partial V_j^b}{\partial t} = \mu_j \frac{\partial^2 V_j^b}{\partial z^2} - \rho_j r \frac{d\Omega(t)}{dt} \quad (4)$$

Nous intégrons ce système d'équations par rapport à  $z$  sachant que  $V_j^b(r, z, t) = 0$  en  $z = \pm \frac{e}{2}$ . Nous obtenons la composante azimutale de la vitesse de base ainsi que la pression de base

$$V_j^b(r, z, t) = r \Omega_m \left[ F_j(z) \cos(\omega t) + G_j(z) \sin(\omega t) \right] \quad (5)$$

$$P_j^b(r, z, t) = \frac{1}{2} \rho_j \left[ (V_j^b)^2 + r^2 \Omega^2(t) \right] + C^{te} \quad (6)$$

avec

$$F_j(z) = \left[ \frac{\cosh(\Gamma_j \eta) \cos[\Gamma_j(e - \eta)] + \cosh[\Gamma_j(e - \eta)] \cos(\Gamma_j \eta)}{\cosh(\Gamma_j \eta) + \cos(\Gamma_j \eta)} \right] - 1$$

$$G_j(z) = \left[ \frac{\sinh(\Gamma_j \eta) \sin[\Gamma_j(e - \eta)] + \sinh[\Gamma_j(e - \eta)] \sin(\Gamma_j \eta)}{\cosh(\Gamma_j \eta) + \cos(\Gamma_j \eta)} \right]$$

$$\text{où } \Gamma_j = \left( \frac{\omega}{2\nu_j} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \eta = z + \frac{e}{2}$$

Par la suite, nous moyennons le champ de vitesse de base par rapport à la variable  $z$ . Nous obtenons

$$\bar{V}_j^b(r, t) = r \Omega_m \left[ \bar{F}_j \cos(\omega t) + \bar{G}_j \sin(\omega t) \right] \quad (7)$$

$$\bar{P}_j^b(r, t) = \frac{1}{2} \rho_j \left[ (\bar{V}_j^b)^2 + r^2 \Omega^2(t) \right] + C^{te} \quad (8)$$

avec

$$\bar{F}_j = \frac{1}{\sigma_j} \left[ \frac{\sinh(\sigma_j) + \sin(\sigma_j)}{\cosh(\sigma_j) + \cos(\sigma_j)} - \sigma_j \right], \bar{G}_j = \frac{1}{\sigma_j} \left[ \frac{\sinh(\sigma_j) - \sin(\sigma_j)}{\cosh(\sigma_j) + \cos(\sigma_j)} \right], \sigma_j = \left( \frac{\omega e^2}{\nu_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

A l'équilibre, le saut de pression à l'interface satisfait l'équation de Laplace donnée par

$$\bar{P}_2^b - \bar{P}_1^b = \frac{\gamma}{R} \tag{9}$$

Les grandeurs  $\gamma$  et  $R$  désignent, respectivement, la tension superficielle et le rayon de l'interface à l'équilibre. L'étude de stabilité linéaire de l'état d'équilibre, consiste à superposer à celui-ci des perturbations infinitésimales, nous introduisons alors les variables suivantes

$$\mathbf{V}_j = \bar{\mathbf{V}}_j^b + \mathbf{V}_j'(u_j', v_j'), \quad P_j = \bar{P}_j^b + p', \quad r = R + \zeta(\theta, t) \tag{10}$$

Le système d'équations correspondant à une perturbation parfaite de l'état d'équilibre est donné par

$$\frac{\partial u_j'}{\partial r} + \frac{u_j'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_j'}{\partial \theta} = 0 \tag{11}$$

$$\rho_j \left[ \frac{\partial u_j'}{\partial t} + \frac{\bar{V}_j^b}{r} \frac{\partial u_j'}{\partial \theta} - 2 \frac{\bar{V}_j^b v_j'}{r} \right] = - \frac{\partial p_j'}{\partial r} \tag{12}$$

$$\rho_j \left[ \frac{\partial v_j'}{\partial t} + \frac{\bar{V}_j^b}{r} \frac{\partial v_j'}{\partial \theta} + u_j' \left( \frac{\partial \bar{V}_j^b}{\partial r} + \bar{V}_j^b \right) \right] = - \frac{1}{r} \frac{\partial p_j'}{\partial \theta} \tag{13}$$

Nous cherchons la solutions du système (11)-(13) en modes normaux

$$[u_j', v_j', p_j'](r, \theta) = [\tilde{u}_j(r), \tilde{v}_j(r), \tilde{p}_j(r)] \exp(in\theta), \quad \zeta(\theta, t) = \xi_n(t) \exp(in\theta)$$

Le terme  $n$  représente le nombre d'onde azimutal qui est ici un entier naturel et  $i$  vérifie  $i^2 = -1$ . Nous considérons que le champ de vitesse  $\mathbf{V}'(u_j', v_j')$  dérive d'un potentiel  $\Phi_j$ , solution de l'équation de continuité définit pour chaque fluide par

$$\Phi_1 = C_1(t) r^n \exp(in\theta) \quad , \quad \Phi_2 = C_2(t) r^{-n} \exp(in\theta) \tag{14}$$

Les constantes  $C_1(t)$  et  $C_2(t)$  sont déterminées en utilisant la condition cinématique à l'interface

$$\tilde{u}_j = \frac{d\xi_n}{dt} + in \frac{\bar{V}_j^b(R)}{R} \xi_n(t) \quad \text{en} \quad r = R \tag{15}$$

Le saut des contraintes normales, où l'on néglige les termes visqueux, à l'interface des deux fluides s'écrit

$$(\bar{P}_1^b + \tilde{p}_1) - (\bar{P}_2^b + \tilde{p}_2) = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} \quad \text{en} \quad r = R \quad (16)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale à l'interface avec  $\gamma \nabla \cdot \mathbf{n} = \left[ -\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma}{R} (1 - n^2) \zeta_n(t) \right]$  [5]. En linéarisant la pression totale à l'aide d'un développement de Taylor au premier ordre au voisinage de  $r = R$  on obtient :

$$(\bar{P}_j^b + \tilde{p}_j) = \bar{P}_j^b(R) + \left. \frac{\partial \bar{P}_j^b}{\partial r} \right|_{r=R} \zeta_n(t) + \tilde{p}_j(R, t) \quad (17)$$

Les équations (15), (16) et (17) permettent d'obtenir la relation de dispersion suivante:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_n^2(t)}{dt^2} + 2i \left[ \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} (n-1) \frac{\bar{V}_1^b(R)}{R} + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (n+1) \frac{\bar{V}_2^b(R)}{R} \right] \frac{d\zeta_n(t)}{dt} + \left[ n \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \Omega^2(t) \right. \\ \left. - \frac{\gamma n (1 - n^2)}{R^3 (\rho_1 + \rho_2)} + \frac{i n}{R} \left( \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{d\bar{V}_1^b(R)}{dt} + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{d\bar{V}_2^b(R)}{dt} \right) + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} n (1 - n) \left( \frac{\bar{V}_1^b(R)}{R} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} n (1 + n) \left( \frac{\bar{V}_2^b(R)}{R} \right)^2 \right] \zeta_n(t) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

L'équation (18) est un oscillateur paramétrique de Mathieu avec frottement. Pour éliminer le terme de frottement, nous introduisons le changement de variable suivant:

$$\zeta_n(t) = \bar{\zeta}_n(t) \exp \left[ -i \int 2i \left( \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} (n-1) \frac{\bar{V}_1^b(R)}{R} + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (n+1) \frac{\bar{V}_2^b(R)}{R} \right) dt \right] \quad (19)$$

L'oscillateur de Mathieu (18) s'écrit

$$\frac{d\bar{\zeta}_n^2(t)}{dt^2} + \left[ \alpha + i\beta \cos(t) + i\tilde{\beta} \sin(t) + \delta \cos(2t) + \tilde{\delta} \sin(2t) \right] \bar{\zeta}_n(t) = 0 \quad (20)$$

avec

$$\alpha = \left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{An}{2} + \frac{1}{4}(n-1)(1-A) \left( \frac{1}{2}(n-1)(1-A) - n \right) (\bar{F}_1^2 + \bar{G}_1^2) - n(1-n^2) \frac{A}{B} \right. \\ \left. + \frac{1}{4}(n+1)(1+A) \left( \frac{1}{2}(n+1)(1+A) - n \right) (\bar{F}_2^2 + \bar{G}_2^2) + \frac{1}{4}(1-A^2)(n^2-1) (\bar{G}_1 \bar{G}_2 + \bar{F}_1 \bar{F}_2) \right]$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\Omega_m}{\omega} [(1-A)\bar{G}_1 - (1+A)\bar{G}_2]$$

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_m}{\omega} [-(1-A)\bar{F}_1 + (1+A)\bar{F}_2]$$

$$\delta = \left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{An}{2} + \frac{1}{4}(n-1)(1-A) \left( \frac{1}{2}(n-1)(1-A) - n \right) (\bar{F}_1^2 - \bar{G}_1^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}(n+1)(1+A) \left( \frac{1}{2}(n+1)(1+A) - n \right) (\bar{F}_2^2 - \bar{G}_2^2) + \frac{1}{4}(1-A^2)(n^2-1) (\bar{F}_1 \bar{F}_2 - \bar{G}_1 \bar{G}_2) \right]$$

$$\tilde{\delta} = \left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{1}{2}(n-1)(1-A) \left( \frac{1}{2}(n-1)(1-A) - n \right) \bar{F}_1 \bar{G}_1 + \frac{1}{4}(1-A^2)(n^2-1) (\bar{F}_1 \bar{G}_2 + \bar{F}_2 \bar{G}_1) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(n+1)(1+A) \left( \frac{1}{2}(n+1)(1+A) - n \right) \bar{F}_2 \bar{G}_2 \right]$$

Nous désignons par  $B = \frac{(\rho_1 - \rho_2)R^3 \Omega_m^2}{\gamma}$  le nombre de Bond et  $A = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$  le nombre d'Atwood.

Pour déterminer les solutions de l'équation (20), nous utilisons la théorie de Floquet en posant

$$(\bar{\zeta}_n)_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \exp(int) \quad \text{(Solutions-harmoniques)} \quad (21)$$

$$(\bar{\zeta}_n)_{\frac{x}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \exp(in + \frac{1}{2})t \quad \text{(Solutions sous-harmoniques)} \quad (22)$$

En introduisant les expressions (21) et (22) dans l'équation (20) nous obtenons le déterminant de Hill [16] qu'on peut écrire sous forme formelle

$$f(n, B, A, \sigma_j, \frac{\Omega_m}{\omega}) = 0 \quad (23)$$

### 3. DISCUSSION

L'équation de Mathieu (20) possède des solutions périodiques harmoniques ou sous-harmoniques qui nous permettent de déterminer les zones d'instabilité. L'interface peut être donc stabilisée ou déstabilisée en fonction de la fréquence et de l'amplitude de la rotation périodique et en fonction des autres paramètres physiques intervenant dans le problème. Dans cette étude, la stabilisation ou la déstabilisation de l'interface est la conséquence d'une compétition entre deux types d'instabilités : d'une part, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz entre deux écoulements pulsés résultat de la variation de la vitesse de rotation en fonction du temps et d'autre part, l'instabilité de Rayleigh - Taylor résultat de la variation de la masse volumique en présence des forces centrifuges.

### 4. CONCLUSION

Au cours de cette étude, nous avons déterminé l'équation caractéristique régissant l'évolution de l'amplitude d'une interface entre deux fluides non miscibles, incompressibles de masses volumiques différentes et confinés dans une cellule de Hele-Shaw annulaire laquelle effectue un mouvement de rotation variable dans le temps. Les travaux antérieurs à ce sujet ont été limités à la détermination de taux de croissance relatif à la perturbation de l'interface dans le cas de la rotation constante [5, 11]. Dans ce travail, l'étude de stabilité linéaire de la solution de base qui correspond à deux écoulements visqueux et pulsés mène à un problème perturbé qui a été réduit à une équation de Mathieu périodique régissant l'évolution de l'amplitude de l'interface. Cette étude préliminaire nous permettra par la suite de déterminer les zones stables et instables en fonction des différents paramètres physiques du problème.

### 5. REFERENCES

- [1] Schwartz L. W, Instability and fingering in a rotating Hele-Shaw cell or porous medium, *Phys. Fluids* 2, 5 (1989)167-169.
- [2] Carrillo L, Magdaleno F. X, Casademont J, and Ortin J, Experiments in a rotating Hele-Shaw cell, *phys.Rev. E* 54
- [3] Carrillo L, Soriano J and Ortin J, Radial displacement of a fluid annulus in rotating Hele -Shaw cell, *Phys. Fluids*, 11, (1999) 778-785.
- [4] Carrillo L, Soriano J and Ortin J, Interfacial instabilities of a fluid annulus in a rotating Hele -Shaw cell. *Phys. Fluids* 12, (2000) 1685-1698.
- [5] Miranda J.A, Rotating Hele-Shaw cell with ferrofluids, *Phys. Rev. E* 62, (2000) 1278-1280.
- [6] Ramezani S, Aniss S and Souhar M, Effets des forces de Coriolis sur le seuil convectif stationnaire d'une couche liquide confinée en cellule de Hele-Shaw annulaire en rotation, *C.R. Mécanique*, (2002) 633-640.
- [7] Jackson D. J and Miranda J. A, Controlling fingering instabilities in rotating ferrofluids, *Phys. Rev. E* 67, (2003).



- [8] Alvarez-Lacalle E, Ortin J and Casademunt J, Low viscosity contrast fingering in a rotating Hele-Shaw cell, *Phys. Fluids* 16, (2004) 908-924.
- [9] Gadêlha H and Miranda J. A, Finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells, *Phys. Rev. E* 70, 066308, (2004) 1-8.
- [10] Waters S. L and Cummings L. J, Coriolis effects in a rotating Hele-Shaw cell, *Phys. Fluids* 17, 048101, (2005) 1-4.
- [11] Abidate A, Aniss S, Caballina O, Souhar M, Effects of circular rigid boundaries and Coriolis forces on the interfacial instability in a rotating annular Hele-Shaw cell, *Phys. Rev. E* 75, 046307, (2007) 1-6.
- [12] Kelly R. E, The stability of an unsteady Kelvin-Helmholtz flow, *J. Fluid Mech.* 22, (1965) 547-560.
- [13] Khenner M. V, Lyubimov D. V, Belozerova T. S and Roux B, Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system, *J. Fluid Mech.* 18, (1999) 1085-1101.
- [14] Aniss. S, Souhar. M and Brancher. J. P, Asymptotic study and weakly nonlinear analysis at the onset of Rayleigh-Bénard convection in Hele-Shaw cell, *Phys. Fluids* 7, (1995) 926-934.
- [15] Aniss. S, Souhar. M and Belhaq. M, Asymptotic study of the convective parametric instability in Hele-Shaw cell, *Phys. Fluids* 12 (2), (2000) 262-268.
- [16] Morse. P. M and Feshbach. H, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953

