

Convection thermosolutale bidimensionnelle dans une cavité poreuse renfermant deux couches poreuses disposées verticalement

Noureddine Hadidi

Université Dr. Yahia Farès de Médéa, Quartier Ain D'Hab Médéa 26000
hadd71@yahoo.fr

Yacine Ould-Amer

USTHB, FGMGP, LTPMP, Département Thermoénergétique, BP. 32 El Alia Bab Ezzouar 16111 Alger, Algérie
Auteur correspondant : youldamer@usthb.dz

Résumé

Le travail qui fait l'objet de cet article concerne la convection en double diffusion générée dans une cavité poreuse renfermant deux couches poreuses disposées verticalement. Chaque couche poreuse est considérée homogène, isotrope et saturée par le même fluide. Les parois verticales sont soumises à des conditions de température et de concentration uniformes alors que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. Les équations de base décrivant la convection thermosolutale au sein de l'enceinte sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Les résultats numériques sont analysés en termes de lignes de courant, des isothermes, des isoconcentrations et des nombres de Nusselt et Sherwood moyens.

Mots-clés : convection en double diffusion ; convection thermosolutale ; milieu poreux ; bicouche.

Abstract

This paper deals with numerical study of double-diffusive convection in a square cavity containing two vertical porous layers. Each porous layer is considered homogeneous, isotropic and saturated by the same fluid. The vertical walls are subjected to uniform conditions of temperature and concentration whereas the horizontal walls are adiabatic and impermeable. The set of governing equations describing the double-diffusive convection within the enclosure is solved numerically using the numerical control volume approach. The numerical results are analyzed in terms of streamlines, isotherms, isoconcentrations lines and Nusselt and Sherwood means numbers.

NOMENCLATURE

D_{a_i}	Nombre de Darcy, $D_{a_i} = K_i / L^2$
D_{eff}	Diffusivité massique effective, $m^2 s^{-1}$
k	Conductivité thermique, $W/m^{\circ}C$
K	Perméabilité du milieu poreux, m^2
Le	Nombre de Lewis, $Le = \alpha_{eff_i} / D_{eff_i}$
P	Pression adimensionnelle, $P = pL^2 / (\rho_f \cdot \alpha^2 / \varepsilon^2)$
N	Rapport des forces de volume, $N = \beta_C \Delta C / (\beta_T \Delta T)$
Pr	Nombre de Prandtl, $Pr = \nu_f / \alpha_{eff_i}$
Ra	Nombre de Rayleigh, $Ra = g \cdot \beta_T \Delta T / \nu_f \cdot \alpha_{eff_1}$

Ra_m	Nombre de Rayleigh modifié, $Ra_m = Ra Da_1$
R_c	Rapport des conductivités thermiques, $R_c = k_{eff_i} / k_{eff_1}$
R_K	Rapport des perméabilités des couches poreuses, $R_K = K_2 / K_1$
R_v	Rapport des viscosités, $R_v = \mu_{eff} / \mu$
X	Coordonnée horizontale adimensionnelle, $X = x/L$
Y	Coordonnée verticale adimensionnelle, $Y = y/L$
U	Vitesse adimensionnelle suivant la direction X, $U = uL/\alpha$
V	Vitesse adimensionnelle suivant la direction Y, $U = vL/\alpha$
s	Concentration adimensionnelle, $s = (c - (c_1 + c_2)/2) / (c_1 - c_2)$

Symboles grecs

α	Diffusivité thermique, [$m^2 s^{-1}$]
β_T	Coefficient d'expansion thermique, [K^{-1}]
β_S	Coefficient d'expansion solutale, [K^{-1}]
ρ	Masse volumique, [$Kg m^{-3}$]
μ_{eff}	Viscosité équivalente dans le modèle de Brinkman, [$Kg m^{-1} S^{-1}$]
ν	Viscosité cinématique, [$m^2 s^{-1}$]
ε	Porosité
θ	Température adimensionnelle, $\theta = (T - (T_1 + T_2)/2) / (T_1 - T_2)$
Φ	Variable dépendante générale adimensionnelle

Indices

eff	: Effectif
f	: Fluide
i	: Couche poreuse

1. INTRODUCTION

Les études portant sur la convection thermosolutale en présence d'un milieu poreux font actuellement l'objet d'un intérêt sans cesse accru. Cet intérêt est dû aux nombreuses applications pratiques qui s'y rapportent, et cela dans divers domaines (astrophysique, océanographie, géophysique et sites pollués, diffusion souterraine des polluants, enfouissement souterrain des déchets radioactifs, isolation thermique, métallurgie, extractions pétrolières, exploitation géothermique, stockage de certains produits agricoles, Chimie de processus...), [1]. Cependant et malgré la montée en puissance des moyens d'étude, des lacunes subsistent encore sur le plan des connaissances fondamentales, principalement la compréhension des phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans des systèmes comportent des milieux poreux. L'analyse des nombreuses études antérieures nous a montré que la plupart d'entre elles traitant de la convection double diffusive dans les milieux poreux saturés par un fluide considèrent une couche unique de milieu poreux, alors que dans la pratique, les milieux poreux ne sont pas constitués d'une seule couche, mais plutôt plusieurs couches en forment la structure. Ils sont désignés généralement par multicouches.

Les premiers travaux sur la convection thermosolutale dans les milieux poreux homogènes et isotropes sont dus à Nield [2] et Taunton et al. [3]. Des gradients verticaux de température et de concentration sont imposés. Certaines études sont orientées sur l'aspect de la stabilité des écoulements convectifs telle que [4]. D'autres chercheurs ont étudié le problème des gradients de température et de concentration inclinés Nield et al. [5] et Manole et al. [6].

La convection naturelle en double diffusion dans une cavité poreuse a aussi été étudiée par Bytas et al. [7]. La cavité est considérée partiellement poreuse avec des conditions de température et de concentration uniformes sur les parois latérales. Les transferts massiques et thermiques sont analysés pour différentes valeurs de l'épaisseur de la couche poreuse, du nombre de Rayleigh et du nombre de Darcy. Les résultats numériques montrent que l'épaisseur de la couche poreuse a un effet significatif sur les transferts massique et thermique. En effet, on note l'existence d'une épaisseur critique pour laquelle le transfert thermique est le plus faible.

Pour la convection thermosolutale dans les couches poreuses anisotropes, on peut citer les travaux de Tobbal et Cabrillac [8]. Le domaine d'étude considéré est constitué d'une cavité renfermant deux couches poreuses identiques entre lesquelles s'intercale une couche fluide.

La convection double diffusive dans une cavité poreuse partiellement chauffée par le bas avec des parois latérales maintenues à des concentrations différentes a été analysée par Bourich et al. [9]. Les auteurs ont étudié numériquement l'effet des forces volumiques solutales sur les solutions multiples stationnaires, obtenues en convection thermique pure.

Bennacer et al. [10] ont présenté analytiquement et numériquement la convection naturelle thermosolutale dans une couche poreuse anisotrope verticale soumise à des flux de chaleur et de masse uniforme. Ils ont utilisé le modèle de Brinkman et ont considéré la situation particulière où les forces de volume thermiques et solutales sont opposées et de même intensité.

Une étude numérique plus récente, analysant les effets combinés des gradients de température et de concentration sur la convection en double diffusion, a été menée par Sivasankaran et al. [11].

Le travail qui fait l'objet de cet article concerne la convection en double diffusion générée dans une cavité poreuse contenant deux couches poreuses disposées verticalement. Les deux couches poreuses sont saturées par le même fluide. Les parois latérales sont soumises à des conditions de température et de concentration uniformes alors que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. Nous nous proposons à travers cette étude l'analyse des résultats numériques de la convection thermosolutale au sein de la cavité bicouche.

2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

Le modèle physique considéré consiste en une cavité contenant deux couches poreuses disposées verticalement comme le montre la figure 1. La cavité est considérée infiniment longue de section droite carrée. Les parois verticales sont soumises à conditions de température et de concentration uniformes, alors que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. Dans ce cas une convection thermosolutale bidimensionnelle et laminaire s'établit dans l'enceinte poreuse. La masse volumique est considérée constante sauf dans le terme de poussée (hypothèse de Boussinesq). Un équilibre thermodynamique local a lieu entre le fluide et le milieu poreux. Le modèle pris en compte est celui de Darcy – Brinkman. L'ensemble des équations gouvernant la conservation de la masse, la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'espèce chimique s'écrivent pour chacune des couches, sous forme adimensionnelle comme suit :

$$\frac{\partial U_i}{\partial X} + \frac{\partial V_i}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2} \left[U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} + V_i \frac{\partial U_i}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial P_i}{\partial X} - \frac{\text{Pr}}{\text{Da}_i} U_i + Rv \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial Y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2} \left[U_i \frac{\partial V_i}{\partial X} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial P_i}{\partial Y} - \frac{\text{Pr}}{\text{Da}_i} V_i + Rv \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial Y^2} \right) + Ra \text{Pr} [\theta_i + NS_i] \quad (3)$$

$$U_i \frac{\partial \theta_i}{\partial X} + V_i \frac{\partial \theta_i}{\partial Y} = R_c \left(\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial Y^2} \right) \quad (4)$$

$$U_i \frac{\partial S_i}{\partial X} + V_i \frac{\partial S_i}{\partial Y} = \frac{1}{Le} \left(\frac{\partial^2 S_i}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial Y^2} \right) \quad (5)$$

L'indice i désigne la couche poreuse, il prend la valeur 1 ou 2. Les paramètres apparaissant dans ces équations sont définis dans la nomenclature. Par ailleurs, nous avons considéré la même diffusivité massique pour les deux couches poreuses, de même pour les viscosités effectives.

Les conditions aux limites se traduisent mathématiquement sous forme adimensionnelle par :

$$Y = 0, 0 \leq X \leq 1, U_i = V_i = 0 \quad \left. \frac{\partial \theta_i}{\partial Y} \right|_0 = 0 \quad \left. \frac{\partial S_i}{\partial Y} \right|_0 = 0 \quad (7)$$

$$Y = 1, 0 \leq X \leq 1, U_i = V_i = 0 \quad \left. \frac{\partial \theta_i}{\partial Y} \right|_1 = 0 \quad \left. \frac{\partial S_i}{\partial Y} \right|_1 = 0 \quad (8)$$

$$X = 0, 0 \leq Y \leq 1, U_i = V_i = 0 \quad \theta_1 = 0.5 \quad S_1 = 0.5 \quad (9)$$

$$X = 1, 0 \leq Y \leq 1, U_i = V_i = 0 \quad \theta_2 = -0.5 \quad S_2 = -0.5 \quad (10)$$

A côté des conditions aux limites, on associe aussi les conditions de continuité aux interfaces. Celles-ci s'écrivent mathématiquement sous forme adimensionnelle comme suit :

$X = 0.5, 0 < Y < 1$:

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial X} \right|_1 = \left. \frac{\partial U}{\partial X} \right|_2, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \Big|_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \Big|_2 \quad (12)$$

$$\left(R_c \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \Big|_1 = \left(R_c \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \Big|_2, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial X} \right|_1 = \left. \frac{\partial S}{\partial X} \right|_2 \quad (13)$$

Φ peut correspondre à P, U, V, T et S .

La mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernante a donnée naissance à un groupement adimensionnel tel que le nombre de Darcy (Da_i) de chaque couche poreuse, le nombre de Rayleigh (Ra) ainsi que le nombre de Prandtl (Pr). Bien que dans les équations gouvernantes adimensionnées, c'est le nombre de Rayleigh fluide qui est défini, dans la suite on utilisera le nombre de Rayleigh

modifié Ra_m (basé sur le nombre Rayleigh fluide Ra et le nombre de Darcy de la première couche poreuse $Ra_m = Ra Da_1$).

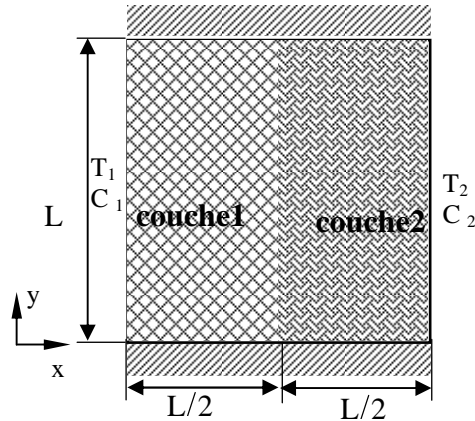


Figure 1 : modèle physique et système de coordonnées

3. PROCEDURE NUMERIQUE

L'ensemble des équations aux dérivées partielles gouvernant la situation physique, est traduit en équations algébriques par utilisation de la méthode des volumes finis. L'algorithme SIMPLER a été adopté pour la séquence des étapes de résolution. Le schéma en loi de puissance a été retenu pour l'évaluation des termes convectifs. Le système d'équations algébriques est résolu itérativement par l'algorithme de Thomas. Un maillage décalé non uniforme, de 82×82 nœuds, a été retenu en se basant sur l'étude de la sensibilité du code de calcul au maillage présenté dans le tableau 1. Un critère de convergence est imposé en terme d'erreur relative pour les variables U, V, P, θ, S et en terme de résidu de masse. Les calculs sont stoppés pour une erreur relative inférieure à 10^{-4} et un résidu de masse inférieur à 10^{-5} . Le code de calcul est validé par rapport à plusieurs cas limites de la littérature (couche unique de milieu poreux) [10, 12-13], les résultats comparatifs sont résumés dans le tableau 2. Une très bonne concordance est à noter.

maillage	22×22	42×42	62×62	82×82	102×102
Nu	10.916	11.047	10.927	10.874	10.846
Sh	44.089	47.560	47.219	47.052	46.966

Tableau 1 : sensibilité du code de calcul au maillage pour $Ra_m=1000, Ra=10^7, R_K=0.1, Pr=7, N=1, Le=10, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.8$

	Ra_m	100	200	400	1000	2000	Le=10
Bennacer et al. [10]	Nu_b	3.11	4.96	7.77	13.48	19.89	
	Sh_b	13.24	19.83	29.36	48.20	69.08	

Trevisan and Bejan [12]	Nu _b	3.27	5.61	6.69	-	-
	Sh _b	15.61	23.23	30.37	-	-
Goyeau et al. [13]	Nu _b	3.11	4.96	7.77	13.47	19.90
	Sh _b	13.25	19.86	28.41	48.32	69.29
Présent Code	Nu _b	3.11	4.96	7.77	13.49	19.91
	Sh _b	13.32	19.98	29.55	48.28	68.48

Tableau 2 : comparaison des nombres de Nusselt et Sherwood moyens pour $N=0$, $Da=10^{-7}$, $Pr=0.71$

4. RESULTATS et DISCUSSIONS

Dans toutes les simulations de cette étude, nous considérons une solution aqueuse comme fluide saturant les deux couches poreuses ($Pr=7$). La porosité des deux couches est prise égale à 0.8. Le rapport des conductivités thermiques des deux couches poreuses, le nombre de Lewis et le rapport des forces de volume sont respectivement fixés à 1, 10 et 1. Par ailleurs, le rapport de la viscosité effective à la viscosité fluide ($R\nu$) est pris égal à l'unité. Les autres paramètres varient dans la plage suivante :

- Le rapport de perméabilité R_K de 10^{-4} à 10^4 ,
- le nombre de Rayleigh modifié Ra_m de 1 à 10^3 .

Les structures d'écoulement, des isothermes et des isoconcentrations sont présentées dans les figures 2 à 4. Pour $Ra_m = 1$ et une situation présentant une faible valeur de R_K par exemple 10^{-3} , une résistance significative à l'écoulement dans la deuxième couche est à noter. Ce comportement est dû à la faible perméabilité de la deuxième couche poreuse. A cet effet, la circulation du fluide dans la couche 1 est plus favorable et la convection thermosolutale est plus prononcée dans cette première couche. Dans la seconde couche, les isothermes et les isoconcentrations sont parallèles aux parois verticales, indiquant que les transferts tendent vers une situation diffusive.

Pour la même valeur de Ra_m ($Ra_m = 1$) et en passant à un R_K égal à 1, les lignes de courant sont de forme elliptique prolongée et une cellule rotative remplit entièrement la cavité. La couche limite hydrodynamique prend place sur les parois verticales. Les isothermes sont déformées et prennent place sur toute la cavité, la couche limite thermique tend à se former, localisée respectivement sur les parties basse ($X=0$) et haute ($X=1$) des parois verticales. Une couche limite solutale prend place sur les parois verticales car le nombre de Lewis est élevé ($Le=10$). En effet, un resserrement des isoconcentrations sur les parois verticales de la cavité est notable.

Pour des valeurs de R_K plus élevées telle que $R_K = 10^3$ et un Ra_m égal à l'unité, on note la non dépendance des structures d'écoulement, des isothermes et des isoconcentrations avec le rapport de perméabilité R_K . En effet, les structures restent les mêmes. Par ailleurs, ce comportement induit des transferts asymptotiques.

En passant à des valeurs de Ra_m plus élevées telles que 10^2 et 10^3 , les mêmes constatations sont à noter mais avec une plus grande intensification. En effet, par exemple pour les lignes de courant, la cellule est de forme elliptique plus prolongée pour $R_K = 1$, alors que pour $R_K = 10^3$, la couche 1 participe fortement aux transferts thermiques et massiques.

L'évolution des transferts thermique et massique de l'ensemble de la cavité poreuse en fonction du rapport des perméabilités R_K est présentée dans les figures 5a et 5b respectivement. Les effets de R_K

sur les transferts sont notables. Pour les faibles valeurs de R_K ($R_K < 1$), les transferts sont principalement diffusifs. Ce comportement est dû à la résistance qu'oppose notamment la couche 2 qui présente une faible perméabilité. L'écoulement convectif est alors de moins en moins prononcé avec la décroissance de R_K ce qui induit un régime conductif sur l'ensemble de la cavité.

Pour des valeurs de R_K supérieures à environ 10, les transferts s'intensifient et tendent vers des valeurs limites maximales et indépendantes de R_K . Ces valeurs correspondent à un écoulement en couche limite.

La variation de la perméabilité met donc en évidence trois régimes de transferts, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de R_K , un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de R_K (pour R_K modéré) et un régime complètement couche limite indépendant de R_K .

La transition entre les deux régimes convectifs se fait pour une valeur de raccordement notée R_K^{Cr} .

Cette valeur critique est d'autant plus élevée pour les faibles valeurs de Ra_m . Nous constatons qu'à R_K donnée, le transfert de matière est plus élevé que le transfert de chaleur. En effet, vu que le nombre de Lewis (Le) est pris égal à 10, la couche limite solutale est plus fine que la couche limite thermique. Ceci est aussi à l'origine de l'obtention d'un transfert de masse diffusif pour des valeurs de R_K plus faibles que dans le cas du transfert de chaleur.

L'effet du nombre de Rayleigh modifié sur les transferts thermique et massique est très prononcé. Le taux de transfert augmente avec Ra_m pour un R_K fixé. Cette augmentation est d'autant plus importante pour les valeurs élevées de R_K .

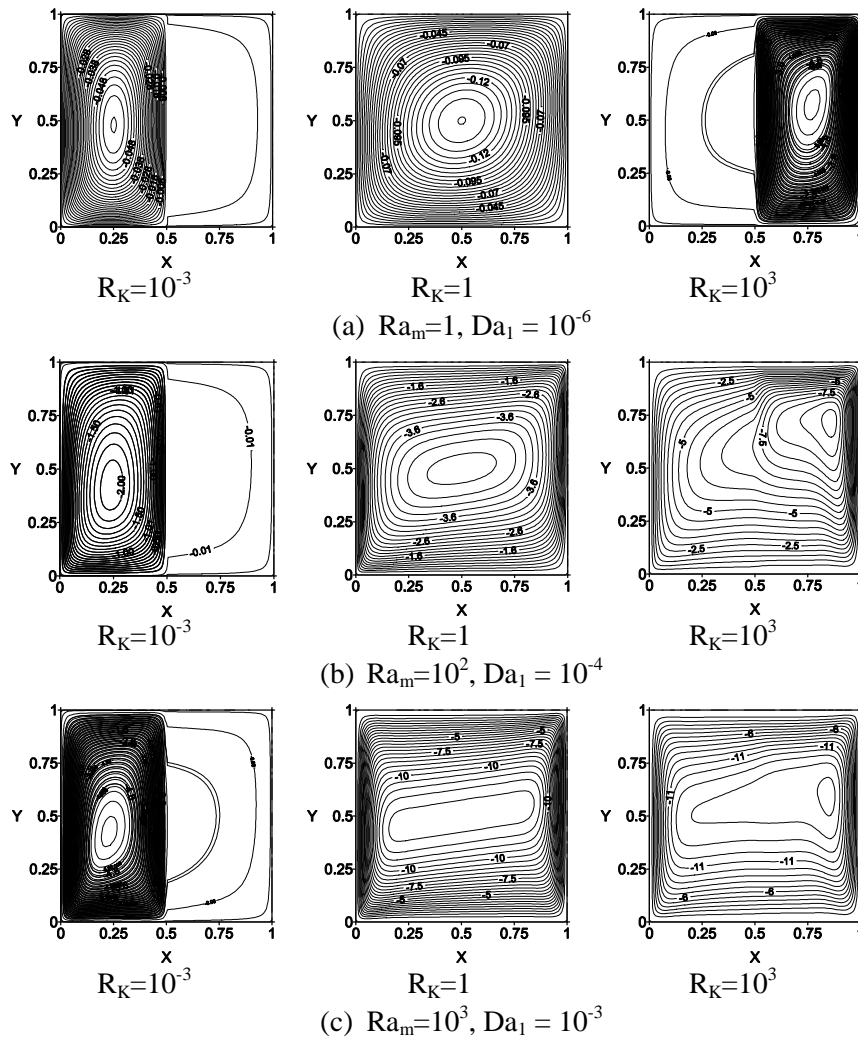


Figure 2 : représentation des lignes de courant

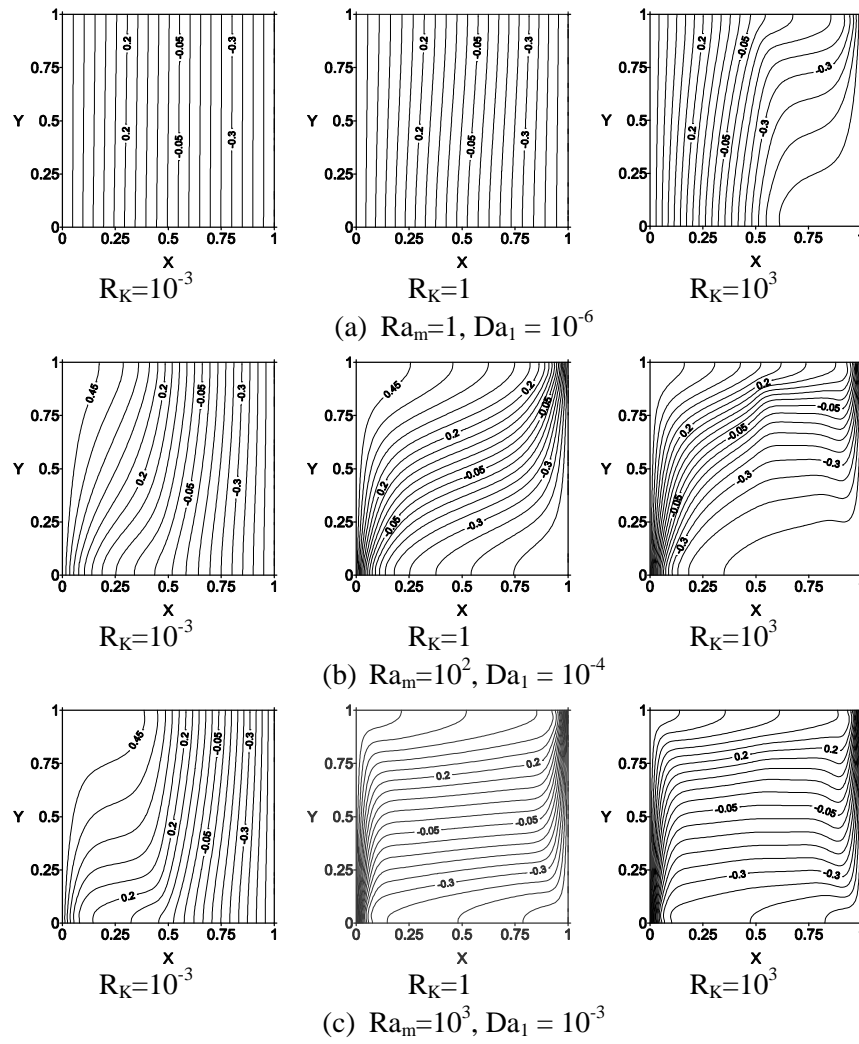


Figure 3 : représentation des isothermes

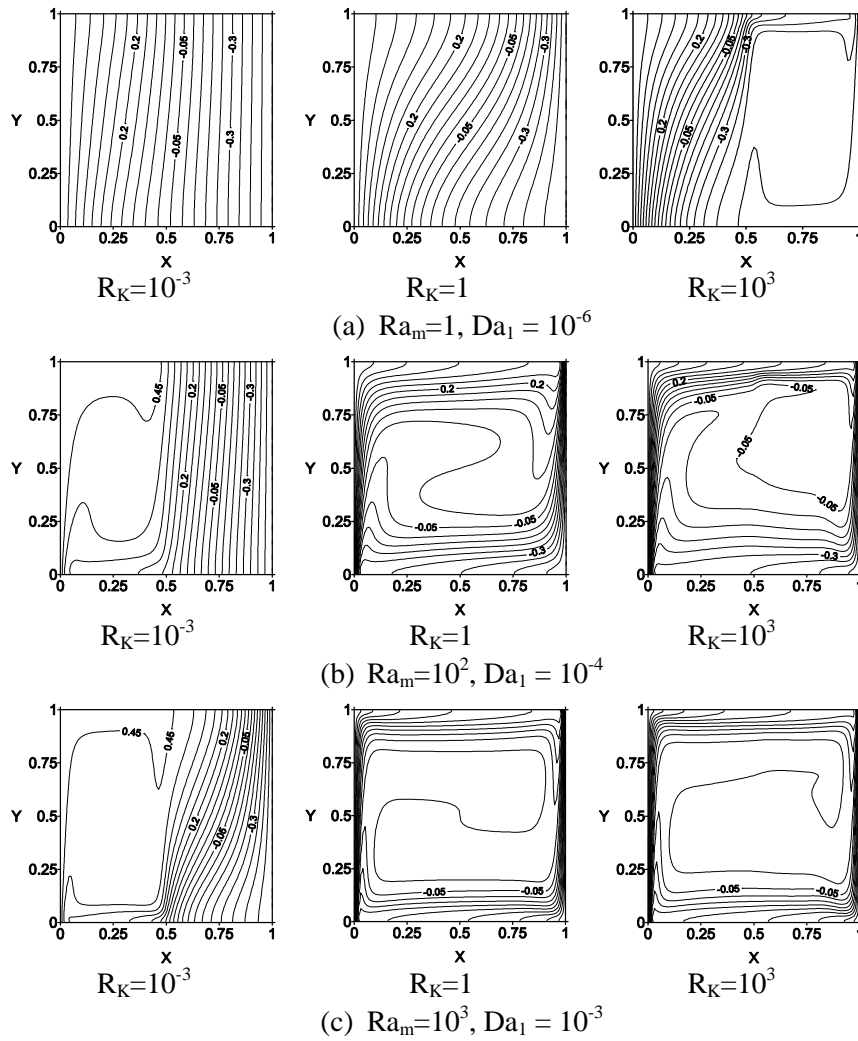
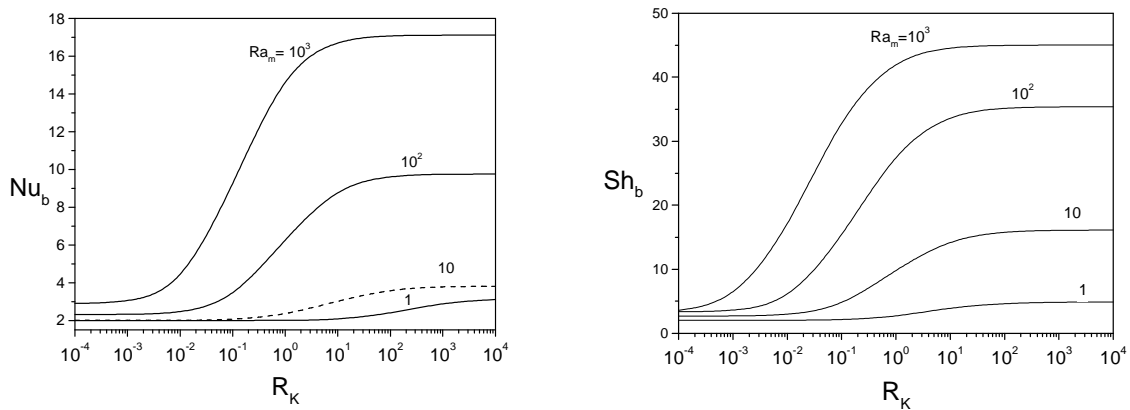


Figure 4 : représentation des isoconcentrations



(a) transfert de chaleur

(b) transfert de masse

Figures 5 : variation des nombres de Nusselt et Sherwood moyens pour $Da_1 = [10^{-6} - 10^{-3}]$

5. CONCLUSION

Nous avons présenté dans cet article une étude numérique de la convection double diffusive dans une cavité poreuse bicouche (disposition verticale des couches poreuses dans la cavité). Ce travail a permis d'apporter un certain nombre de résultats correspondant à une gamme de paramètres très variée. Ces résultats aideront sans doute à mieux comprendre les phénomènes des écoulements dus à la convection thermosolutale dans les milieux poreux multicouches. Nous avons montré à travers ce travail que la variation de la perméabilité des deux couches a un effet très appréciable sur la structure d'écoulement et les transferts. Par ailleurs trois régimes de transferts ont été identifiés, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de R_K , un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de R_K (pour R_K modéré) et un autre régime complètement couche limite indépendant de R_K (pour des valeurs de R_K élevées). D'autre part, l'effet de Ra_m sur les transferts thermique et massique est très prononcé pour les régimes hors diffusion.

6. RÉFÉRENCES

1. Nield D. A and Bejan A., *Convection in Porous Media*, Springer, New York (1992).
2. Nield D. A., Onset of thermohaline convection in a porous medium, *Water Resour. Res.* (4), 553-560. (1968).
3. Taunton J. W., E. Lightfoot N. and Green T., Thermohaline instability and salt fingers in porous medium, *Phys. Fluids*, (15), 748-753. (1972).
4. Rudraiah N., Srimani P. K. and Friedrich R., Finite amplitude convection in a two-components fluid-porous layer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, (25), 715-722. (1982).
5. Nield D. A., Manole D. M. and Lage J. L., Convection induced by inclined thermal and solutal gradients in a shallow horizontal layer of porous medium, *J. Fluid Mech.*, (257), 559-574. (1993).
6. Manole D. M., Lage J. L. and Nield D. A., Convection induced by inclined thermal and solutal gradients, with horizontal mass flow, in a shallow horizontal layer of a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, (37), 2047-2057. (1994).

7. Baytas A. C., Baytas A. F., Ingham D. B., Pop I., Double diffusive natural convection in an enclosure filled with a step type porous layer: Non-Darcy flow, *Int. J. thermal Science*, (48), 665-673 (2009).
8. Tobbal A., Contribution à l'étude de la convection thermosolutale dans les milieux poreux anisotropes et multicouches. Thèse de Doctorat, université de cergy-Pontoise, France (1999).
9. Bourich M., Hasnaoui M., Amahmid A., Double-diffusive natural convection in a porous enclosure partially heated from below and differentially salted, *Int. J. Heat and fluid flow*, (25), 1034-1046. (2004).
10. Bennacer R., Tobbal A. et Beji H., Convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse anisotrope : formulation de Darcy-Brinkman, *Rev. Energ. Ren.*, (5), 1-21. (2002).
11. Sivasankaran, Kanfaswamy S. and Ng O. C., Double diffusive convection of anomalous density fluids in a porous cavity, *Transp. Porous Media*, (71), 133-145, 2008.
12. Trevisan O. and Bejan A., Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, (28), 1597-1611. (1985).
13. Goyeau B., Songbe J. P and Gobin D., Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the Darcy-Brinkman formulation, *Int. J. Heat Mass Transfer*, (39), 1363-1378. (1996).