

## **Convection forcée d'un écoulement glissant dans une microconduite chauffée avec une température uniforme à la paroi : Influence de la conduction axiale**

Youssef HADDOUT

Université Hassan II, Faculté des Sciences Ain Chock, Laboratoire de Mécanique,  
Km 8 route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc

Abdelaziz OUBARRA

Université Hassan II, Faculté des Sciences Ain Chock, Laboratoire de Mécanique,  
Km 8 route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc

Jawad LAHJOMRI

Université Hassan II, Faculté des Sciences Ain Chock, Laboratoire de Mécanique,  
Km 8 route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc  
Auteur correspondant: lahjomri@hotmail.com

### **Abstract**

Thermally developing laminar slip flow through a micropipe, including both axial heat conduction and rarefaction effects with uniform wall temperature boundary condition is investigated analytically. The solution is based on the self-adjoint formalism resulting from a decomposition of the energy equation into a system of first-order partial differential equations. The analytical results obtained are compared for simplified cases to available numerical calculations and good agreement is found. Results show that the heat transfer characteristics of flow in the thermal entrance region are strongly influenced by axial heat conduction and rarefaction effects which are respectively characterized by Péclet and Knudsen numbers.

### **Résumé**

Le problème de la convection forcée de l'écoulement glissant laminaire développé dans une micro conduite tenant compte à la fois des effets de la conduction axiale et de la raréfaction est étudié analytiquement. La solution est basée sur une méthode de formalisme auto-adjoint résultant de la décomposition de l'équation de l'énergie en un système de deux équations aux dérivées partielles de premier ordre. Les résultats de la solution analytique obtenue sont comparés avec les calculs numériques disponibles dans les cas simplifiés et ont montré un excellent accord. Ces résultats montrent que les caractéristiques thermiques de l'écoulement dans la région d'entrée thermique sont fortement influencées par les effets de la conduction axiale et de la raréfaction qui sont caractérisés respectivement par les nombres de Péclet et de Knudsen.

### **1. INTRODUCTION**

Les résultats expérimentaux de la convection forcée réalisés dans les micro-conduites ont montré des grandes différences avec ceux de la convection forcée dans des conduites de taille conventionnelle. Par exemple, lors des mesures des coefficients de transfert de chaleur dans un écoulement laminaire thermiquement développé à l'intérieur des petites conduites, les résultats montrent une dépendance avec le nombre de Reynolds [1], contrairement à la convection forcée classique pour laquelle le nombre de Nusselt asymptotique est constant. Cette différence est expliquée par l'existence de certains

effets habituellement négligés à l'échelle macroscopique (modèle du milieu continu) et qui devraient être pris en compte dans le cas de la convection forcée à micro-échelle. En effet, pour des dimensions caractéristiques inférieures à 100  $\mu\text{m}$ , l'écoulement du fluide devient un écoulement glissant [2], pour lequel, les conditions aux limites classiques de non glissement ou d'adhérence ainsi que la continuité du champ de température à la paroi ne sont plus applicables.

### Nomenclature

nombre de Knudsen,  $\text{Kn} = \lambda/D_h$

mp de vitesse

diamètre hydraulique,  $D_h = 2R$

vitesse du glissement, Eq. (1)

température du fluide à la paroi, Eq. (2)

température de la paroi

chaleur spécifique à pression constante

conductivité thermique

vitesse moyenne

nombre de Nusselt local

nombre de Péclet,  $\text{Pe}_R = \rho C_p U_m R/k$

nombre de Prandtl,  $\text{Pr} = \mu C_p/k$

température du fluide

température de la paroi à l'amont

température de la paroi à l'aval

température moyenne de mélange

#### *Symbole Grecque*

$\eta$  distance radiale,  $\eta = r/R$

rapport des chaleurs spécifiques,  $\gamma = C_p/C_v$

viscosité dynamique, Pa s

longueur du libre parcours moyen, m

température adimensionnelle, Eq. (4)

température moyenne de mélange

flux axial de l'énergie, Eq. (10)

valeurs propres

vecteurs propres

masse volumique,  $\text{Kg m}^{-3}$

rayon de glissement

distance axiale, Eq. (4)

L'écoulement glissant apparaît quand les gaz sont à faible pression ou pour des écoulements qui se font dans des passages très étroits. Dans ce cas, la longueur du libre parcours moyen des molécules devient comparable à la dimension caractéristique du problème étudié, et l'effet de la structure moléculaire (raréfaction) devient un facteur important dans les mécanismes de l'écoulement et du transfert de chaleur. La vitesse de glissement et le saut de température sont les principaux paramètres de la raréfaction. L'importance des effets de la raréfaction du gaz peut être évaluée par le nombre de Knudsen  $\text{Kn}$  qui représente le rapport du libre parcours moyen des molécules dans le gaz à la plus petite dimension caractéristique de l'écoulement. Les effets de la raréfaction sur l'écoulement et sur le transfert de chaleur deviennent importants quand le nombre de Knudsen ne peut pas être négligé. Karniadakis et al. [2] ont proposé une classification de quatre régimes d'écoulement pour les gaz parmi lesquels l'écoulement glissant apparaît : a) Pour  $\text{Kn} < 10^{-3}$ , l'écoulement est continu (fluide considéré comme un milieu continu), b) Pour  $10^{-3} < \text{Kn} < 10^{-1}$ , l'écoulement est glissant, c) Pour  $10^{-1} < \text{Kn} < 10$ , l'écoulement est de transition, d) Pour  $\text{Kn} > 10$ , l'écoulement est moléculaire libre.

Etant donné l'importance du problème dans de nombreuses applications d'ingénierie, plusieurs auteurs ont étudié le problème de la convection forcée interne en écoulement glissant avec des formes géométriques variées, tels que les micro-tubes, les micro-canaux et autres formes plus complexes (trapézoïdales) en considérant soit une température uniforme imposée, soit un flux de chaleur uniforme imposé à la paroi. Jeong et Jeong [3] ont étudié l'effet de la conduction axiale pour un

écoulement développé (problème de Graetz étendu) dans un micro-canal avec un flux uniforme imposé à la paroi. La méthode des variables séparées a été utilisée par ces auteurs pour résoudre l'équation de l'énergie et ensuite la méthode de tir pour obtenir les valeurs propres et les fonctions propres non-orthogonales. Dutta [4] a résolu l'équation de l'énergie pour l'écoulement électro-osmotique dans un micro-canal avec un gradient de pression arbitraire en considérant les termes d'advection, diffusion et du chauffage par effet Joule. La méthode de Gram-Schmidt a été utilisée pour évaluer les fonctions propres non-orthogonales. Par ailleurs, les effets de la conduction axiale dans le fluide sur le transfert de chaleur ont aussi été étudiés pour un micro-tube [5, 6-8] avec une température constante [5, 7, 8] et un flux constant imposé à la paroi [6]. Récemment, Kacac et al. [9] ont résolu numériquement le problème de la convection forcée de l'écoulement glissant dans un canal en tenant compte des variations de la viscosité et de la conductivité thermique avec la température. Cette étude a montré que le nombre de Nusselt asymptotique n'est pas affecté significativement par ces variations. L'effet des variations des propriétés physiques apparaît surtout sur le champ de température et le nombre de Nusselt local. Plus récemment, les effets conjugués de la conduction axiale dans le fluide ainsi que dans la paroi adjacente (d'épaisseur non négligeable) chauffée avec un flux de chaleur uniforme ont été analysés par Cole et Cetin [10] pour un écoulement dans un micro-canal. La solution a été obtenue sous forme d'intégrales des fonctions de Green dans l'espace de Fourier et une inversion par une méthode numérique de la transformée de Fourier a été utilisée pour obtenir les résultats dans l'espace réel.

En général, les solutions analytiques existantes dans la littérature, traitant le problème de la convection forcée à micro-échelle avec conduction axiale, reposent sur la méthode des variables séparées [3, 6, 7]. Quand aux méthodes numériques, elles sont basées sur la méthode des différences finies [5, 8, 9]. Du point de vue analytique, il est bien connu que ce type de problème est un problème aux valeurs propres. Cependant, quand la conduction axiale est incluse dans l'analyse, les fonctions propres générées par la méthode des variables séparées ne sont plus orthogonales et les valeurs propres associées peuvent être à priori complexes [11]. Par conséquent la méthode des variables séparées, échoue d'une part dans la détermination de la nature des valeurs propres et d'autre part dans la détermination explicite des coefficients intervenant dans le développement en série de la solution. Ces coefficients ont été déterminés en général par la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour construire des fonctions orthogonales à partir des fonctions propres non orthogonales. Cependant, il est bien connu que ce processus est numériquement instable [12]. Du point de vue numérique, la principale difficulté de l'analyse vient de la singularité de la température qui existe au niveau de la paroi à l'abscisse  $x=0$  de la section d'entrée thermique. Cette discontinuité cause en général des problèmes pour les modèles numériques et fait apparaître des oscillations de Gibbs lorsqu'on s'approche de la singularité [13]. Par conséquent, une solution analytique est vivement souhaitée pour résoudre cette singularité.

Ce travail présente une solution purement analytique du problème de la convection forcée de l'écoulement glissant d'un fluide dans une micro conduite cylindrique chauffée avec un saut de température à la paroi. L'approche est basée sur le formalisme auto-adjoint [11, 14, 15], résultant de la décomposition de l'équation de l'énergie en un système de deux équations aux dérivées partielles de premier ordre. L'avantage de cette méthode apparaît par le fait que la procédure de décomposition mène à un problème auto-adjoint de Sturm-Liouville quoique le problème initial soit non auto-adjoint. Cette méthode très puissante basée sur des arguments purement physiques permet de justifier rigoureusement que les valeurs propres sont réelles ce qui lève l'ambiguïté sur la nature de celles-ci et elle permet aussi d'obtenir de façon explicite les coefficients intervenant dans la solution contrairement aux études qui utilisent la méthode de Gram-Schmidt. Par un calcul d'un nombre suffisant de valeurs propres, les oscillations de Gibbs ont été éliminées ce qui a permis de résoudre efficacement la singularité. Cette étude représente une extension du travail de Papoutsakis et al. [11], de Weigand et Lauffer [14], Lahjomri et al. [16] et Lahjomri et Oubarra [17] par la prise en compte de

la vitesse de glissement et du saut de température du fluide à la paroi dans la gamme des nombres de Knudsen  $10^{-3} < Kn < 10^{-1}$  correspondant au régime de l'écoulement glissant.

## 2. ANALYSE

### 2.1.1 Description du problème et équation de l'énergie:

On considère l'écoulement glissant unidirectionnel d'un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$ , de viscosité dynamique  $\mu$  et de conductivité thermique  $k$  dans une microconduite cylindrique de rayon  $R$  avec un certain profil spécifique de vitesse  $u_x(r)$ . La paroi de la microconduite est maintenue à la température  $T_w = T_0$  pour  $x < 0$  et à partir de l'abscisse  $x=0$  pour laquelle l'écoulement est pleinement développé, la paroi est portée brusquement à la température  $T_w = T_1$  pour  $x \geq 0$  (voir figure1). Les propriétés physiques sont supposées constantes, la dissipation visqueuse et les phénomènes de la convection naturelle sont supposés aussi négligeables. Les conditions aux limites représentant les caractéristiques majeures de l'écoulement glissant, sont la vitesse de glissement et le saut de température à la paroi qui peuvent être exprimées selon [2]

$$u_{x,s} = -\beta_v \lambda \left. \frac{\partial u_x}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (1)$$

$$T_s = T_w - \beta_t \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (2)$$

$u_{x,s}$  est la vitesse du fluide à la paroi (vitesse du glissement),  $T_s$  et  $T_w$  désignent respectivement la température du fluide à la paroi et la température de la paroi.  $\lambda$  est le libre parcours moyen des molécules avec  $\beta_v = (2 - F_v)/F_v$  et  $\beta_t = \frac{2 - F_t}{F_t} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{Pr}$  où  $F_v$  et  $F_t$  désignent respectivement les coefficients d'accommodation tangentielle du mouvement et d'accommodation thermique.  $Pr = \mu C_p/k$  est le nombre de Prandtl et  $\gamma = C_p/C_v$  est le rapport des chaleurs spécifiques. Notons que dans la plupart des applications d'ingénierie les valeurs de  $F_v$  et  $F_t$  sont proches de 1 [2].

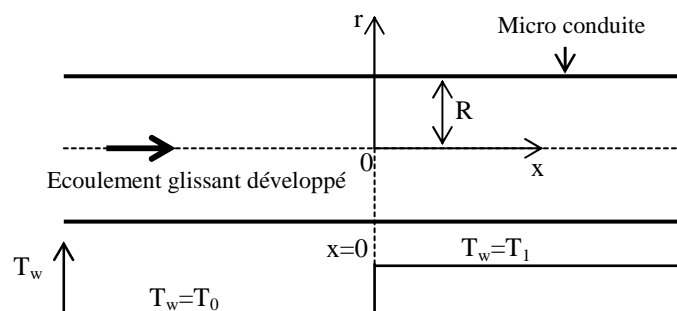


Figure1 : Configuration géométrique et système de coordonnées utilisé

L'équation adimensionnelle de l'énergie tenant compte du terme de la conduction axiale et de la symétrie par rapport à l'axe de l'écoulement peut s'écrire sous la forme suivante:

$$u(\eta) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Pe}_R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \quad (0 < \eta < 1 \quad -\infty < \xi < +\infty) \quad (3)$$

Les variables et paramètres adimensionnels figurant dans (3) sont définis par :

$$\eta = \frac{r}{R} \quad \xi = \frac{x}{R} \frac{1}{\text{Pe}_R} \quad u(\eta) = \frac{u_x(r)}{U_m} \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad \text{Pe}_R = \frac{\rho C_p U_m R}{k} \quad (4)$$

où  $\text{Pe}_R$  est le nombre de Péclet et  $U_m$  désigne la vitesse moyenne. Le champ de vitesse  $u(\eta)$  qui apparaît dans l'équation (3) peut être calculé à partir de la résolution des équations de Navier-Stokes en imposant à celui ci de vérifier la condition aux limites de glissement (1), soit :

$$u(\eta) = \frac{1 - \eta^2 + 4\beta_v \text{Kn}}{\frac{1}{2} + 4\beta_v \text{Kn}} \quad \text{avec} \quad \text{Kn} = \frac{\lambda}{2R} \quad (5)$$

Les conditions aux limites adimensionnelles associées à (3) sont données par

$$\Theta = -C \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \quad \text{pour} \quad \eta=1 \text{ et } \xi < 0 \quad (6)$$

$$\Theta = 1 - C \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \quad \text{pour} \quad \eta=1 \text{ et } \xi \geq 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = 0 \quad \text{pour} \quad \eta = 0 \text{ et } -\infty < \xi < +\infty \quad (8)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \Theta = \text{finie} \quad (9)$$

où le paramètre adimensionnel  $C$  figurant dans (6) et (7) est défini par :  $C = 2\beta_v \text{Kn}$ .

## 2.2 Solution analytique

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, parmi les différentes méthodes qui permettent de résoudre le système d'équations (3), (6)-(7), il y a la méthode de l'analyse fonctionnelle qui a été utilisée auparavant en écoulement continu ( $\text{Kn}=0$  ou  $C=0$ ). Dans ce travail nous allons adapter et étendre cette méthode au cas de l'écoulement glissant pour lequel  $C$  est différent de zéro. Pour plus de détails sur la méthode utilisée le lecteur pourra consulter les références [11, 14, 15].

L'introduction du flux axial adimensionnel de l'énergie  $\varphi(\xi, \eta)$  à travers une section droite de l'écoulement de rayon  $\eta$  :

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_0^\eta \left[ u(\eta') \Theta(\xi, \eta') - \frac{1}{\text{Pe}_R^2} \frac{\partial \Theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} \right] \eta' d\eta' \quad (10)$$

permet d'obtenir le système suivant:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \text{Pe}_R^2 u(\eta) \Theta - \frac{\text{Pe}_R^2}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \eta \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \quad (12)$$

Obtenu à partir de la dérivation de (10) par rapport à  $\eta$  et  $\xi$  en utilisant l'équation (3) et la condition aux limites (8). Notons qu'en éliminant  $\varphi$  entre (11) et (12) nous obtenons l'équation de l'énergie initiale (3). A partir des équations précédentes, nous pouvons déduire les conditions aux limites associées à  $\varphi$  en supposant pour l'instant  $C \neq 0$

$$\varphi(\xi, 0) = 0 \quad (13)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \varphi(\xi, \eta) = \text{fini} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, 1) = -\frac{\Theta(\xi, 1)}{C} + \frac{\Theta_w(\xi)}{C} \quad (15)$$

Où  $\Theta_w(\xi)$  est la fonction de Heaviside définie par

$$\Theta_w(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1, & \xi \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

Les équations (11), (12) et (15) peuvent s'écrire maintenant sous forme de notation matricielle

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \xi} = \vec{L} \vec{F} + \vec{S} \quad (17)$$

où les trois composantes des vecteurs  $\vec{F}(\xi, \eta)$ ,  $\vec{S}(\xi, \eta)$  et l'opérateur différentiel  $\vec{L}$  sont définis par

$$\vec{F} = [\Theta(\xi, \eta), \varphi(\xi, \eta), \varphi(\xi, 1)]^t, \quad \vec{S} = [0, 0, \Theta_w(\xi)/C]^t, \quad \vec{L} = \begin{bmatrix} \text{Pe}_R^2 u(\eta) & -\frac{\text{Pe}_R^2}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ \eta \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C} \lim_{\eta \rightarrow 1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

L'aspect remarquable de l'opérateur  $\overline{\overline{L}}$  est qu'il permet de ramener le problème initial non auto-adjoint en un problème auto-adjoint. Ce fait est bien entendu dépendant de la définition appropriée du produit scalaire. En effet, si nous définissons le produit scalaire entre deux vecteurs quelconques  $\vec{\phi} = [\phi_1(\eta), \phi_2(\eta), \phi_3]^t$  et  $\vec{\psi} = [\psi_1(\eta), \psi_2(\eta), \psi_3]^t$  par :

$$\langle \vec{\phi}, \vec{\psi} \rangle = \int_0^1 \left[ \frac{\eta}{\text{Pe}_R^2} \phi_1(\eta) \psi_1(\eta) + \frac{1}{\eta} \phi_2(\eta) \psi_2(\eta) \right] d\eta + C \phi_3 \psi_3 \quad (19)$$

ainsi que le domaine suivant dans l'espace d'Hilbert H pour l'opérateur  $\overline{\overline{L}}$ , défini comme:

$$D(\overline{\overline{L}}) = \left\{ \vec{\phi} \in H : \overline{\overline{L}} \vec{\phi} \in H, \phi_3 = \phi_2(1), \phi_2(0) = 0 \right\} \quad (20)$$

L'utilisation de l'équation (19) et du domaine de définition  $D(\overline{\overline{L}})$  permet de montrer que  $\overline{\overline{L}}$  vérifie la propriété suivante pour deux vecteurs quelconques  $\vec{\phi}$  et  $\vec{\psi}$  de H:

$$\langle \overline{\overline{L}} \vec{\phi}, \vec{\psi} \rangle = \langle \vec{\phi}, \overline{\overline{L}} \vec{\psi} \rangle \quad (21)$$

L'équation (21) montre clairement que  $\overline{\overline{L}}$  est auto-adjoint et symétrique puisque la matrice associée à  $\overline{\overline{L}}$  dans la base Hilbertienne  $\vec{\phi}_n$  est symétrique et dont les coefficients sont représentées par :

$$a_{m,n} = \langle \overline{\overline{L}} \vec{\phi}_m, \vec{\phi}_n \rangle \quad (\text{pour } m=1,2,3,4,\dots, n=1,2,3,4,\dots).$$

Par conséquent, les valeurs propres associées à  $\overline{\overline{L}}$  sont réelles. Ainsi le problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville peut être formulé par:

$$\overline{\overline{L}} \vec{\phi}_n = \mu_n \vec{\phi}_n \quad (22)$$

où  $\mu_n$  sont les valeurs propres réelles associées aux vecteurs propres  $\vec{\phi}_n$ . Par ailleurs, dans l'Annexe A, nous pouvons aussi montrer que les vecteurs propres  $\vec{\phi}_n$  constituent une base orthogonale dans l'espace d'Hilbert H. Ainsi, à partir de l'équation (22), nous pouvons déduire

$$\text{Pe}_R^2 \left[ u(\eta) \phi_{n1}(\eta) - \frac{1}{\eta} \frac{d\phi_{n2}}{d\eta} \right] = \mu_n \phi_{n1}(\eta) \quad (23)$$

$$\eta \frac{d\phi_{n1}}{d\eta} = \mu_n \phi_{n2}(\eta) \quad (24)$$

$$-\frac{1}{C} \phi_{n1}(1) = \mu_n \phi_{n3} = \mu_n \phi_{n2}(1) \quad (25)$$

Où  $\phi_{n1}(\eta)$ ,  $\phi_{n2}(\eta)$  et  $\phi_{n3}$  sont les composantes de  $\bar{\phi}_n$ . Si nous éliminons  $\phi_{n2}$  entre (23) et (24) nous obtenons l'équation différentielle et les conditions aux limites vérifiées par les fonctions propres  $\phi_{n1}$ :

$$\frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d\phi_{n1}}{d\eta} \right) + \eta \mu_n \left[ \frac{\mu_n}{Pe_R^2} - u(\eta) \right] \phi_{n1}(\eta) = 0 \quad (26)$$

$$\phi'_{n1}(0) = 0, \quad (27a)$$

$$C \phi'_{n1}(1) + \phi_{n1}(1) = 0. \quad (27b)$$

Nous pouvons noter que la dimension de l'opérateur  $\bar{L}$  et l'expression du produit scalaire donnée par (19) sont différentes de celles données dans les références [11, 14, 15] dans leurs études du problème de Graetz étendu dans une conduite de taille conventionnelle en absence de la raréfaction. La différence est que les conditions aux limites du saut de température à la paroi données par (6) et (7) sont introduites dans l'expression de  $\bar{L}$  (équation (18)) en vertu de (15). Cette inclusion est nécessaire pour le formalisme auto-adjoint présenté ci-dessus.  $\bar{L}$  est donc un opérateur différentiel de dimension trois, contrairement à l'opérateur de dimension deux défini dans les références [11, 14]. La solution du problème peut être maintenant obtenue en utilisant le théorème de développement en fonction des vecteurs propres  $\bar{\phi}_n$  de la base. Ainsi tout vecteur arbitraire  $\bar{F} \in H$ , peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de  $\bar{\phi}_n$  ou des fonctions propres  $\bar{\phi}_n^+$  et  $\bar{\phi}_n^-$  associées aux valeurs propres positives  $\mu_n^+$  et négatives  $\mu_n^-$

$$\bar{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \bar{F}, \bar{\phi}_n \rangle}{\|\bar{\phi}_n\|^2} \bar{\phi}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\langle \bar{F}, \bar{\phi}_n^+ \rangle}{\|\bar{\phi}_n^+\|^2} \bar{\phi}_n^+ + \frac{\langle \bar{F}, \bar{\phi}_n^- \rangle}{\|\bar{\phi}_n^-\|^2} \bar{\phi}_n^- \right] \quad (28)$$

$\|\bar{\phi}_n\|^2 = \langle \bar{\phi}_n, \bar{\phi}_n \rangle$  désigne le carré de la norme de  $\bar{\phi}_n$ . Le produit scalaire  $\langle \bar{F}, \bar{\phi}_n \rangle$  figurant dans l'équation (28) doit donc être calculé. En effet, en effectuant le produit scalaire de l'équation (17) par  $\bar{\phi}_n$  nous pouvons montrer que:

$$\frac{d}{d\xi} \langle \bar{F}, \bar{\phi}_n \rangle = \mu_n \langle \bar{F}, \bar{\phi}_n \rangle + \langle \bar{S}, \bar{\phi}_n \rangle \quad (29)$$

La solution générale de (29) peut être résolue séparément pour les valeurs propres positives et négatives:

$$\langle \bar{F}, \bar{\phi}_n^- \rangle = C_n^- \exp(\mu_n^- \xi) + \int_{-\infty}^{\xi} \langle \bar{S}, \bar{\phi}_n^- \rangle \exp(\mu_n^- (\xi - \xi')) d\xi' \quad (30)$$



$$\langle \bar{F}, \bar{\phi}_n^+ \rangle = C_n^+ \exp(\mu_n^+ \xi) - \int_{\xi}^{+\infty} \langle \bar{S}, \bar{\phi}_n^+ \rangle \exp(\mu_n^+ (\xi - \xi')) d\xi' \quad (31)$$

Puisque la solution doit être finie pour  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , les deux constantes d'intégration  $C_n^-$  et  $C_n^+$ , figurant dans les équations (30) et (31) doivent être nulles. En reportant (30) et (31), après intégration, dans (28), nous obtenons la solution donnant le champ de température sous forme d'un développement en série des fonctions propres  $\phi_{n1}^+(\eta)$  et  $\phi_{n1}^-(\eta)$ , en prenant la première composante du vecteur  $\bar{F}$

$$\Theta(\xi, \eta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n2}^+(1)}{\mu_n^+ \|\bar{\phi}_n^+\|^2} \exp(\mu_n^+ \xi) \phi_{n1}^+(\eta) \quad \text{si } \xi < 0 \quad (32)$$

$$\Theta(\xi, \eta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n2}(1)}{\mu_n \|\bar{\phi}_n\|^2} \phi_{n1}(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n2}^-(1)}{\mu_n^- \|\bar{\phi}_n^-\|^2} \exp(\mu_n^- \xi) \phi_{n1}^-(\eta) \quad \text{si } \xi \geq 0 \quad (33)$$

Nous pouvons noter qu'à partir des équations (32) et (33) que la continuité du champ de température  $\Theta(\xi, \eta)$  en  $\xi = 0$  est automatiquement vérifiée dans le fluide. A partir du théorème de développement (28) nous pouvons montrer que la première série dans l'équation (33) converge vers  $-1$  (voir Annexe B) et d'après la définition du produit scalaire, le carré de la norme  $\|\bar{\phi}_n^-\|^2$  est donné par :

$$\|\bar{\phi}_n^-\|^2 = \frac{1}{\mu_n} \int_0^1 \eta^p \phi_{n1}^2 \left[ \frac{2\mu_n}{\text{Pe}_L^2} - u(\eta) \right] d\eta = \phi_{n2}(1) \left[ \frac{d\phi_{n1}(1)}{d\mu_n} + C \frac{d\phi_{n1}'(1)}{d\mu_n} \right] \quad (34)$$

Finalement en remplaçant par  $-1$  la valeur de la première série dans (33) et en injectant l'expression (34) dans les équations (32) et (33), nous trouvons la solution du problème sous la forme suivante :

$$\Theta(\xi, \eta) = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(\lambda_n^2 \xi) \phi_{n1}^+(\eta) \quad \text{si } \xi < 0 \quad (35)$$

$$\Theta(\xi, \eta) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\beta_n^2 \xi) \phi_{n1}^-(\eta) \quad \text{si } \xi \geq 0 \quad (36)$$

où nous avons posé  $\mu_n^+ = \lambda_n^2$ ,  $\mu_n^- = -\beta_n^2$  et les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  sont donnés par :

$$A_n = \frac{\phi_{n2}^+(1)}{\lambda_n^2 \|\bar{\phi}_n^+\|^2} = \frac{2}{\lambda_n \left[ \frac{d\phi_{n1}^+(1)}{d\lambda_n} + C \frac{d\phi_{n1}'^+(1)}{d\lambda_n} \right]}; \quad B_n = \frac{\phi_{n2}^-(1)}{\beta_n^2 \|\bar{\phi}_n^-\|^2} = - \frac{2}{\beta_n \left[ \frac{d\phi_{n1}^-(1)}{d\beta_n} + C \frac{d\phi_{n1}'^-(1)}{d\beta_n} \right]} \quad (37)$$

D'autre part, la résolution de l'équation (26) et l'utilisation des conditions aux limites (27) permettent d'obtenir les expressions explicites des fonctions propres  $\phi_n^-(\eta)$  et  $\phi_n^+(\eta)$

$$\phi_n^-(\eta) = \exp\left(-\frac{\beta_n}{2} \rho_s \sqrt{u_{\max}} \eta^2\right) M\left(\frac{1}{2} - \beta_n \frac{\sqrt{u_{\max}}}{4\rho_s} - \frac{\beta_n^3}{4\text{Pe}_R^2 \rho_s \sqrt{u_{\max}}}, 1; \beta_n \rho_s \sqrt{u_{\max}} \eta^2\right) \quad (38)$$

$$\phi_n^+(\eta) = \exp\left(-\frac{i\lambda_n}{2} \rho_s \sqrt{u_{\max}} \eta^2\right) M\left(\frac{1}{2} - i\lambda_n \frac{\sqrt{u_{\max}}}{4\rho_s} + \frac{i\lambda_n^3}{4\text{Pe}_R^2 \rho_s \sqrt{u_{\max}}}, 1; i\lambda_n \rho_s \sqrt{u_{\max}} \eta^2\right) \quad (39)$$

avec  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\rho_s = 1/\sqrt{1 + 4\beta_v \text{Kn}}$  est le rayon de glissement,  $u_{\max} = 2/(2 - \rho_s^2)$  est la valeur maximale de  $u(\eta)$  à  $\eta = 0$  et  $M(a, b; c)$  sont les fonctions hypergéométriques dégénérées de Kummer de premier espèce [18].

Deux quantités d'une importance pratique : la température adimensionnelle moyenne de mélange  $\Theta_b$  et le nombre de Nusselt local  $\text{Nu}$  (construit avec le diamètre hydraulique  $D_h = 2R$ ) peuvent être calculées de la façon suivante:

$$\text{Nu} = \frac{2 \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}}{\Theta_b - \Theta_w} = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(\lambda_n^2 \xi) \phi_{n1}^+(1)}{\Theta_b}, \quad (40)$$

$$\text{avec } \Theta_b = \frac{\int_0^1 \Theta u(\eta) \eta d\eta}{\int_0^1 u(\eta) \eta d\eta} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(\lambda_n^2 \xi) \left[ \frac{\phi_{n1}^+(1)}{\lambda_n^2} + \frac{\lambda_n^2}{\text{Pe}_R^2} \int_0^1 \eta \phi_{n1}^+ d\eta \right] \quad \text{si } \xi < 0$$

$$\text{Nu} = \frac{2 \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}}{\Theta_b - \Theta_w} = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\beta_n^2 \xi) \phi_{n1}^-(1)}{\Theta_b - 1}, \quad (41)$$

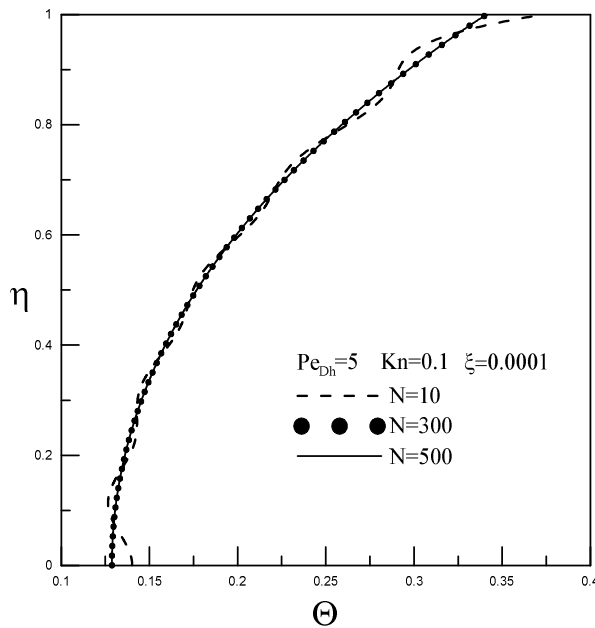
$$\text{avec } \Theta_b = \frac{\int_0^1 \Theta u(\eta) \eta d\eta}{\int_0^1 u(\eta) \eta d\eta} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\beta_n^2 \xi) \left[ \frac{\phi_{n1}^-(1)}{\beta_n^2} + \frac{\beta_n^2}{\text{Pe}_R^2} \int_0^1 \eta \phi_{n1}^- d\eta \right] \quad \text{si } \xi \geq 0$$

Soulignons que la solution obtenue ici donnée par (35)-(41), représente naturellement la solution du problème de la convection forcée dans une conduite de taille conventionnelle quoique l'opérateur  $\overline{\text{L}}$  ne soit pas défini pour  $C=0$ . En effet, quand  $\text{Kn}=0$  (ou  $C=0$ ) nous retrouvons la solution en absence de la raréfaction donnée dans les références [11, 14, 16, 17]. La solution représente naturellement aussi celle du problème parabolique en absence de la conduction axiale ( $\text{Pe}_R = \infty$ ) [19] quoique l'opérateur  $\overline{\text{L}}$  ne soit pas défini pour  $\text{Pe}_R = \infty$ .

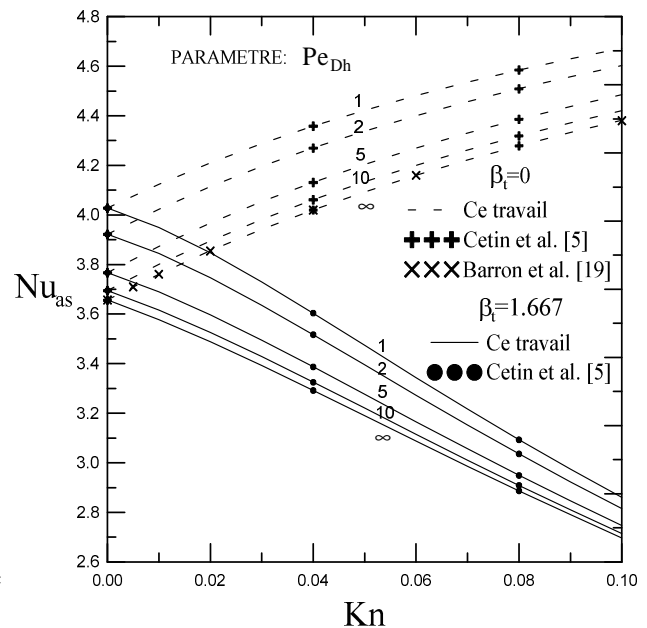
### 3. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Les valeurs propres solutions de l'équation caractéristique (27b) ont été calculées numériquement avec une très grande précision en utilisant la méthode de Newton-Raphson couplée avec une méthode de bisection. Nous pouvons noter que les séries représentant la solution (35) et (36) convergent très lentement particulièrement proche de la section d'entrée de chauffage et nécessitent un nombre très élevé de termes surtout pour les petites valeurs du nombre de Péclet. Dans cette étude nous avons calculé les profils de température et le nombre de Nusselt en utilisant 300 termes pour évaluer les séries, ce qui a permis d'éliminer les oscillations de Gibbs et d'obtenir une convergence très satisfaisante et un bon raccordement de la température et du gradient longitudinal entre l'amont et l'aval à l'abscisse  $\xi = 0$ , où leurs comparaisons peuvent être utilisées comme critère de convergence de la solution.

La figure 2 illustre l'effet des différents ordres de troncation  $N$  des séries sur un profil typique de température radiale pour  $Pe_{Dh} = 2Pe_R = 5$ , pour une valeur du nombre de Knudsen  $Kn = 0.1$  à une distance axiale très proche de la section d'entrée  $\xi = 10^{-4}$ . La figure montre que pour des petites valeurs de  $N$  ( $N=10$ ), il apparaît des oscillations de Gibbs à cause de la singularité à la paroi. Ces oscillations ont été rencontrées aussi par Ku et Hadziavramidis [13] qui ont résolu numériquement l'équation de la chaleur par la méthode numérique de Chebyshev avec conduction axiale en absence de la raréfaction. La figure 2 montre clairement que ces oscillations s'amortissent en augmentant  $N$  et disparaissent complètement quand  $N$  devient très grand i.e.  $N \geq 300$ . On peut aussi noter l'erreur qu'on peut commettre sur le gradient de température à la paroi quand  $N$  est petit.



**Figure 2 :** Effet des différents ordres de troncation  $N$  sur le profil de température radiale pour  $Pe_{Dh} = 5$ ,  $Kn = 0.1$  et  $\xi = 10^{-4}$ . Mise en évidence des oscillations de Gibbs.



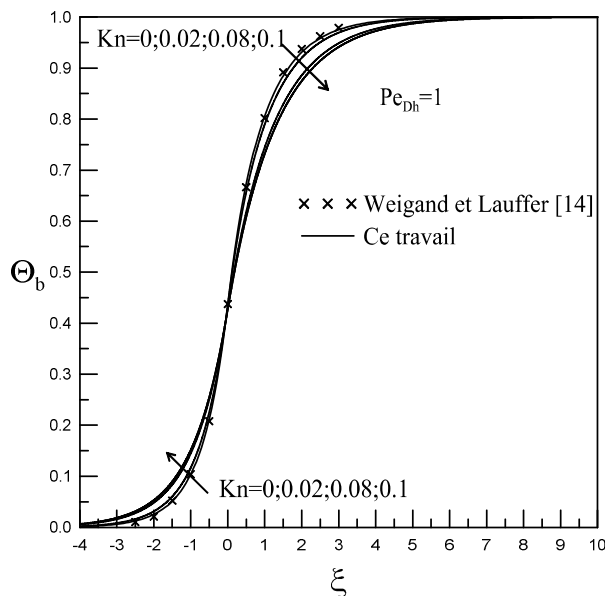
**Figure 3 :** Variation du nombre de Nusselt asymptotique en fonction du nombre de Knudsen pour différentes valeur du nombre de Péclet et comparaison avec les résultats numériques de Cetin et al. [5] en présence de la conduction axiale et avec Barron et al. [19] en absence de celle-ci.

Sur la figure 3 nous avons représenté les variations du nombre de Nusselt asymptotique  $Nu_{as}$  correspondant au régime thermique établi en fonction du nombre de Knudsen  $Kn$  pour différentes valeurs du nombre de Péclet  $Pe_{Dh}$  dans le cadre des limites d'application du régime de l'écoulement glissant et pour deux valeurs de  $\beta_t$ ,  $\beta_t = 0$  et  $\beta_t = 1.667$ . Les résultats correspondant au cas  $\beta_t = 0$  pourraient représenter la convection forcée d'un liquide dans la microconduite, où en général les calculs supposent couramment qu'il n'y a pas de saut température accompagnant un glissement à la paroi. Le cas  $\beta_t = 1.667$  est une valeur typique de l'air correspondant à  $F_t = 1$ ,  $\gamma = 1.4$  et  $Pr = 0.7$  dans les applications d'ingénieur. La figure 3 montre aussi une comparaison de nos résultats avec ceux de Cetin et al. [5] en présence de la conduction axiale et avec Barron et al [19] en absence de celle ci. Notons que Cetin et al. [5] ont résolu numériquement par la méthode des différences finies l'équation de la chaleur pour un problème similaire, en considérant la paroi à l'amont de la section d'entrée isolée thermiquement et une température uniforme imposée à la paroi à l'aval. Bien entendu les solutions des deux problèmes sont différentes en présence de la conduction axiale sauf pour les nombres de Nusselt asymptotiques qui sont identiques pour les deux problèmes. Cette comparaison permet aussi de déduire que  $Nu_{as}$  est indépendant des conditions aux limites à l'amont de la section d'entrée de chauffage. En effet, il n'est pas difficile de montrer que la solution du problème à l'aval pourrait toujours être exprimée sous la forme (36), où les coefficients  $B_n$  sont déterminés par les conditions aux limites à l'amont, et par conséquent le nombre de Nusselt asymptotique  $Nu_{as} = \beta_1^2 / \left[ 1 + \beta_1^4 \int_0^1 \eta^p \phi_{11}^- d\eta / Pe_L^2 \phi_{11}^-(1) \right]$  qu'on peut déduire de l'expression (41) en faisant  $\xi \rightarrow \infty$  et en retenant seulement les premiers termes des séries indique qu'il est indépendant des coefficients  $B_n$ . C'est pour cela que les valeurs numériques pour  $Nu_{as}$  s'accordent avec celles de Cetin et al. [5] (voir Figure 3). Bien entendu ceci n'est pas vrai pour le nombre de Nusselt local puisqu'il dépend des coefficients  $B_n$  et par conséquent, les nombres de Nusselt locaux pour les deux problèmes sont différents. Il est donc clair que nos résultats pour  $Nu_{as}$  sont en excellent accord avec ceux de ces auteurs [5, 19], ceci peut constituer une validation de notre solution analytique. Les résultats montrent aussi que la vitesse de glissement et le saut de la température ont deux effets opposés sur le transfert de chaleur: l'effet de la vitesse de glissement agit de manière à augmenter l'échange de chaleur pour les deux fluides (gaz ou liquide), tandis que l'effet du saut de température à la paroi dans le cas du gaz a tendance à le faire diminuer. Ainsi dans le cas de l'écoulement d'un gaz pour lequel la condition du saut de température à la paroi est présente, l'échange de chaleur diminue avec l'augmentation de la raréfaction. Tandis que dans le cas des liquides (absence du saut de température), l'échange de chaleur augmente avec l'augmentation de celle ci. Par exemple dans le cas des liquides pour  $Pe_{Dh} = 5$ , l'augmentation relative pour  $Nu_{as}$  est environ de 19% lorsque l'écoulement varie d'une condition de non-glissement au cas d'une condition de forte raréfaction  $Kn=0.1$ . Nous pouvons aussi noter que pour  $Kn = 0$ , représentant le cas classique d'un écoulement sans glissement pour lequel à la fois la vitesse de glissement et le saut de température à la paroi sont absents, on retrouve les valeurs classiques de  $Nu_{as}$  (4.02734 pour  $Pe_{Dh} = 1$ ; 3.92236 pour  $Pe_{Dh} = 2$ ; 3.76729 pour  $Pe_{Dh} = 5$ ; 3.69518 pour  $Pe_{Dh} = 10$  et 3.65679 pour  $Pe_{Dh} = \infty$ ). Ces valeurs sont en excellent accord avec les résultats des références [11, 14, 16, 17].

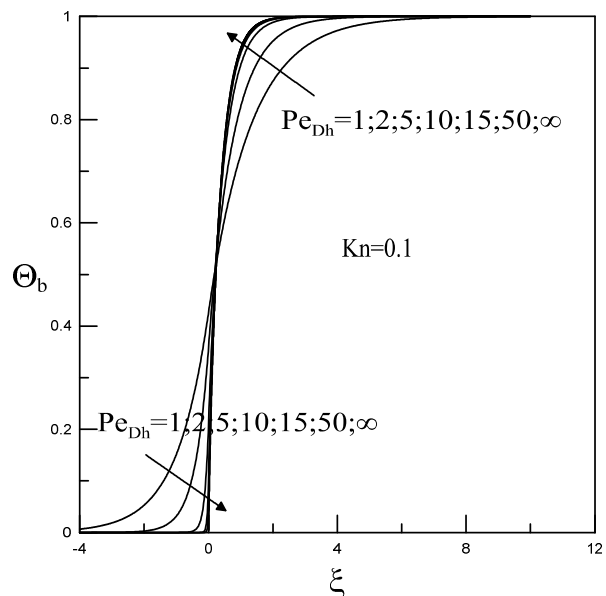
La figure 4 illustre la variation de la température moyenne de mélange  $\Theta_b$  en fonction de la distance axiale pour différentes valeurs du nombre de Knudsen et pour  $Pe_{Dh} = 1$ . Cette figure indique aussi une comparaison avec succès de notre solution analytique avec celle de Weigand et Lauffer [14] dans le cas particulier  $Kn = 0$  (en absence de la raréfaction) correspondant à une conduite de taille

conventionnelle. Il est clair que la température moyenne  $\Theta_b$  décroît avec l'augmentation de la raréfaction dans la région d'entrée thermique. Cette diminution peut s'expliquer par le fait que lorsque le nombre de Knudsen augmente, la vitesse de glissement à la paroi augmente entraînant moins de chauffage pour les particules fluides par rapport au cas du non-glissement.

La figure 5 illustre l'effet de la variation du nombre de Péclet sur la température moyenne de mélange  $\Theta_b$  pour une valeur fixée du nombre de Knudsen i.e.  $Kn = 0.1$ . On peut voir clairement que pour les petites valeurs de Péclet,  $Pe_{Dh} \leq 5$  le profil de température uniforme ( $T = T_0$ ) pour chaque courbe est établi pour des distances axiales négatives très loin à l'amont de la section d'entrée de chauffage indiquant que le champ de température dans la microconduite est très affecté par la conduction axiale puisque la perturbation thermique et par conséquent la chaleur due à celle-ci est transmise de l'aval à l'amont de la section d'entrée de chauffage  $\xi = 0$ . Pour  $Pe_{Dh} \geq 10$ , l'effet de la conduction axiale diminue et les profils de température deviennent pratiquement uniformes à l'amont de la section d'entrée ( $\xi \leq 0$ ). Ceci n'implique pas que le terme de la conduction axiale dans l'équation (3) peut être ignoré; pour que la conduction axiale soit négligeable le nombre de Péclet doit excéder approximativement la valeur 200 (voir figure 6 et 7 ci-dessous).



**Figure 4 :** Variation de la température moyenne du mélange en fonction de la distance axiale pour différentes valeurs du nombre de Knudsen et comparaison avec les résultats de Weigand et Lauffer [14] dans le cas  $Kn=0$  (en absence de la raréfaction).

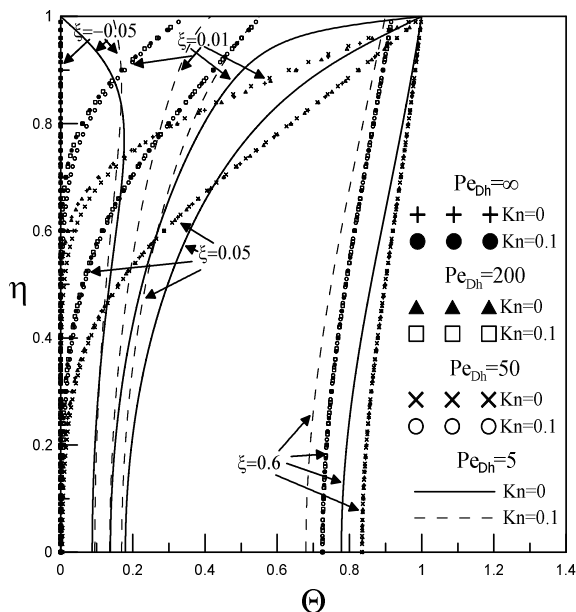


**Figure 5 :** Variation de la température moyenne du mélange en fonction de la distance axiale pour différentes valeurs du nombre de Péclet en présence de la raréfaction.

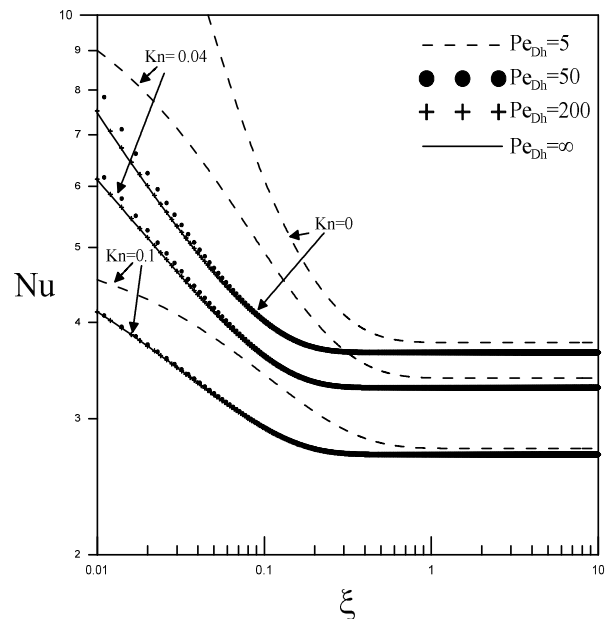
La figure 6 représente les profils de température radiale pour différentes valeurs du nombre de Péclet et pour deux valeurs du nombre de Knudsen: en absence de la raréfaction ( $Kn = 0$ ) et en sa présence ( $Kn = 0.1$ ). Les résultats montrent qu'au voisinage de la section de chauffage, les particules fluides sur l'axe et le cœur de l'écoulement sont peu affectées par la raréfaction, alors que les particules fluides qui sont proches de la paroi sont très sensibles à la variation du nombre de Knudsen puisque le régime thermique n'est pas encore établi. Par contre lorsqu'on s'éloigne de plus en plus de la section d'entrée, le régime thermique établi commence à s'installer et l'effet de la raréfaction devient très prononcé dans une section droite quelconque de l'écoulement. On peut noter que proche de la section d'entrée, la raréfaction domine l'effet de la conduction axiale et celle-ci a tendance à uniformiser la température

du fluide sur une section droite de l'écoulement. La figure 6 montre aussi que dans la région d'entrée thermique  $\xi > 0$ , la température du fluide à la paroi comme la température moyenne de mélange, augmente avec la distance axiale et diminue avec l'augmentation de la raréfaction.

La figure 7 illustre l'influence du nombre de Péclet  $Pe_{Dh}$  et du nombre de Knudsen  $Kn$  sur la variation du nombre de Nusselt local  $Nu$  en fonction de la distance axiale  $\xi$ . Le nombre de Nusselt local décroît en fonction de  $\xi$  dans la région d'entrée thermique jusqu'à ce qu'il atteigne sa valeur asymptotique correspondant au régime thermique établi pour lequel la paroi a cessé de transmettre la chaleur au fluide et la température moyenne du fluide devient proche de celle de la paroi. Il est clair qu'en présence du saut de température et du glissement à la paroi, l'échange de chaleur diminue avec l'augmentation de  $Kn$  et  $Pe_{Dh}$ , les résultats de la figure indiquent aussi qu'en présence de la raréfaction pour des distances axiales  $\xi \geq 0.01$ , lorsque  $Kn$  et  $Pe_{Dh}$  excèdent respectivement les valeurs 0.04 et 50, l'échange de chaleur devient indépendant du nombre de Péclet alors qu'en absence de la raréfaction, le nombre de Péclet n'a plus d'influence sur l'échange de chaleur lorsque  $Pe_{Dh}$  excède approximativement la valeur 200. On peut aussi noter que le nombre de Nusselt asymptotique est pratiquement indépendant de  $Pe_{Dh}$  quand  $Pe_{Dh} \geq 50$ . Finalement, une comparaison qualitative de nos résultats avec ceux de Cetin et al. [5] pour le nombre de Nusselt local, indique qu'en présence de la conduction axiale (pour une valeur finie et modérée de Péclet) et pour toute valeur de Knudsen, l'échange de chaleur dans la région d'entrée thermique est plus important dans le cas d'une température uniforme imposée à la paroi amont que celui d'une paroi isolée. Cependant lorsque la conduction axiale est négligeable ( $Pe$  infini), les deux problèmes ont même solution.



**Figure 6 :** Profils adimensionnels de température radiale pour différentes valeurs du nombre de Péclet  $Pe_{Dh}$  et de la distance axiale  $\xi$  en absence et en présence de la raréfaction



**Figure 7 :** Influence du nombre de Péclet  $Pe_{Dh}$  et du nombre de Knudsen  $Kn$  sur la variation du nombre de Nusselt local en fonction de la distance axiale

#### 4. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons présenté la solution analytique du problème de la convection forcée d'un écoulement glissant en tenant compte de la conduction axiale, de la vitesse de glissement et du saut de température du fluide à la paroi dans la gamme des nombres de Knudsen  $10^{-3} < Kn < 10^{-1}$ . L'intérêt de la solution proposée est qu'elle résout efficacement la singularité au voisinage de la section de chauffage qui, en général, cause des problèmes pour les modèles numériques. Les résultats ont notamment montré qu'en présence de la raréfaction et en absence du saut de température à la paroi, la vitesse de glissement fait augmenter l'échange de chaleur pour les liquides. A l'opposé pour les gaz, la présence du saut de température domine l'échange de chaleur et le fait diminuer.

Les résultats obtenus dans cette étude peuvent être très utiles et appliqués directement au domaine de la technologie de refroidissement des systèmes microélectroniques de très faibles dimensions.

#### ANNEXE A

Dans cette annexe nous allons montrer que les vecteurs propres associés à l'équation (22) constituent une base orthogonale dans H pour le produit scalaire défini par (19) et les conditions aux limites (25) ou (27). Considérons deux vecteurs propres  $\vec{\phi}_n$  et  $\vec{\phi}_m$  avec des valeurs propres associées  $\mu_n$  et  $\mu_m$ . A partir de l'équation (22) nous avons :

$$\overline{\overline{L}} \vec{\phi}_n = \mu_n \vec{\phi}_n \quad \text{et} \quad \overline{\overline{L}} \vec{\phi}_m = \mu_m \vec{\phi}_m \quad (\text{A1})$$

En prenant le produit scalaire des équations (A1) respectivement par  $\vec{\phi}_m$  et  $\vec{\phi}_n$  et en faisant la différence nous obtenons

$$\langle \overline{\overline{L}} \vec{\phi}_n, \vec{\phi}_m \rangle - \langle \vec{\phi}_n, \overline{\overline{L}} \vec{\phi}_m \rangle = \langle \mu_n \vec{\phi}_n, \vec{\phi}_m \rangle - \langle \vec{\phi}_n, \mu_m \vec{\phi}_m \rangle = (\mu_n - \mu_m) \langle \vec{\phi}_n, \vec{\phi}_m \rangle \quad (\text{A2})$$

Puisque l'opérateur  $\overline{\overline{L}}$  est symétrique ( $\langle \vec{\phi}_n, \overline{\overline{L}} \vec{\phi}_m \rangle = \langle \overline{\overline{L}} \vec{\phi}_n, \vec{\phi}_m \rangle$  voir équation (21)) ceci implique que :

$$\langle \vec{\phi}_n, \vec{\phi}_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_n \neq \mu_m \\ \|\vec{\phi}_n\|^2 & \text{si } \mu_n = \mu_m \end{cases} \quad (\text{A3})$$

Donc les vecteurs propres  $\vec{\phi}_n$  constituent une base orthogonale dans l'espace d'Hilbert H.

#### ANNEXE B

Nous voulons montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n2}(1)}{\mu_n \|\vec{\phi}_n\|^2} \phi_{n1}(\eta) = -1 \quad (\text{B1})$$

En appliquant le théorème du développement (28) pour le vecteur  $\vec{F} = \left[ 0, \int_0^1 \eta' u(\eta') d\eta', 0 \right]^t$  en utilisant la première composante du vecteur on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 \frac{\phi_{n2}(\eta)}{\eta} \int_0^1 \eta' u(\eta') d\eta' d\eta}{\|\vec{\phi}_n\|^2} \phi_{n1}(\eta) = 0 \quad (\text{B2})$$

En intégrant l'équation (B2) par parties et en utilisant l'équation (24), celle-ci devient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n1}(1)}{\mu_n \|\vec{\phi}_n\|^2} \phi_{n1}(\eta) = \frac{1}{\int_0^1 \eta u(\eta) d\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n1}(\eta)}{\mu_n \|\vec{\phi}_n\|^2} \int_0^1 \eta u(\eta) \phi_{n1}(\eta) d\eta \quad (\text{B3})$$

D'autre part, l'intégration de l'équation différentielle (23) après multiplication avec  $\eta$  donne:

$$\int_0^1 \eta u(\eta) \phi_{n1}(\eta) d\eta = \phi_{n2}(1) + \frac{\mu_n}{\text{Pe}_L^2} \int_0^1 \eta \phi_{n1}(\eta) d\eta \quad (\text{B4})$$

En reportant l'équation (B4) dans l'équation (B3) nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n2}(1)}{\mu_n \|\vec{\phi}_n\|^2} \phi_{n1}(\eta) = \int_0^1 \eta u(\eta) d\eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n1}(1)}{\mu_n \|\vec{\phi}_n\|^2} \phi_{n1}(\eta) - \frac{1}{\text{Pe}_L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n1}(\eta)}{\|\vec{\phi}_n\|^2} \int_0^1 \eta \phi_{n1}(\eta) d\eta \quad (\text{B5})$$

L'application du théorème (28) pour les deux vecteurs  $[1,0,0]^t$  et  $[0,0,1]^t$  en utilisant la première composante pour les deux on obtient respectivement:

$$\frac{1}{\text{Pe}_L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n1}(\eta)}{\|\vec{\phi}_n\|^2} \int_0^1 \eta \phi_{n1}(\eta) d\eta = 1 \quad (\text{B6})$$

$$C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n3}}{\|\vec{\phi}_n\|^2} \phi_{n1}(\eta) = -\frac{C}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{n1}(1)}{\mu_n \|\vec{\phi}_n\|^2} \phi_{n1}(\eta) = 0 \quad (\text{B7})$$

Finalement, les expressions (B5)-(B7) montrent que la formule (B1) est vraie.

## 5. REFERENCES

1. Peterson G. P., Duncan A. B. & Weichold M.H., Experimental investigation of micro heat pipes fabricated in silicon wafer, ASME J. of Heat Transfer **115** 751-756 (1993).
2. Karniadakis G., Beskok A. & Aluru N. *Micro flows and Nano flows: Fundamental and Simulation*, Springer, New York (2005).
3. Jeong H.E. & Jeong J. T., Extended Graetz problem including streamwise conduction and viscous dissipation in microchannel, Int. J. of Heat Mass Transfer **49** 2151-2157 (2006).
4. Dutta P., Horiuchi K. & Yin, H. M., Thermal characteristics of mixed electroosmotic and pressure-driven microflows, Comput. and Mathematics with applications **52** 651-670 (2006).
5. Cetin B., Yazicioglu A. G. & Kakac S., Fluid flow in microtubes with axial conduction including rarefaction and viscous dissipation, Int. Comm. in Heat and Mass Transfer **35** 535-544 (2008).
6. Cetin B., Yazicioglu A. G. & Kakac S., Slip-flow heat transfer in microtubes with axial conduction and viscous dissipation: An extended Graetz problem, Int. J. of Thermal Sciences **48** 1673-1678 (2009).



7. Satapathy A. K., Slip flow heat transfer in an infinite microtube with axial conduction, *Int. J. of Thermal Sciences* **49** 153-160 (2010).
8. Aziz A. & Niedbalski N., Thermally developing microtube gas flow with axial conduction and viscous dissipation, *Int. J. of Thermal Sciences* **50** 332-340 (2011).
9. Kacac S., Yazicioglu A. G & Gozucara A. C., Effect of variable thermal conductivity and viscosity on single phase convective heat transfer in slip flow **47** 879-891 (2011).
10. Cole K. D. & Cetin B., The effect of axial conduction on heat transfer in a liquid microchannel flow *Int. J. of Heat Mass Transfer* **54** 2542-2549 (2011).
11. Papoutsakis E., Ramkrishna D. & Lim H.C., The extended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions, *Appl. Sci. Res.* **36** 13-34 (1980).
12. Rice J., R., Experiments on Gram-Schmidt orthogonalisation, *Math. Comp.*, **20**, 325-328, (1966)
13. Ku H. C. & Hatzivramidis D., Chebyshev expansion methods for the solution of the extended Graetz problem, *J. of Computational Physics* **56** 495-512 (1984).
14. Weigand B. & Lauffer D., The extended Graetz problem with piecewise constant wall temperature for pipe and channel flows, *Int. J. of Heat Mass Transfer* **47**(24) 5303-5312 (2004).
15. Lahjomri J., Zniber K., Oubarra A. & Alemany A., Heat transfer by Hartmann flow in thermal entrance region with uniform heat flux: The Graetz problem extended, *Energy Conversion and Management*, **44** 11-34 (2003).
16. Lahjomri J., Oubarra A. & Alemany A., Heat transfer by laminar Hartmann flow in thermal entrance region with a step change in wall temperatures: The Graetz problem extended, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, **45** 1127-1148 (2002).
17. Lahjomri J. & Oubarra A., Analytical solution of the Graetz problem with axial conduction, *ASME J. of Heat Transfer* **121** 1078-1083 (1999).
18. Abramowitz M. & Stegun I.A., *Handbook of Mathematical functions*, Dover publication, INC., New York, (1972).
19. Barron R.F., Wang X.M., Warrington R.O. & Ameen T.A., The Graetz problem extended to slip flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* **40**(8) 1817-1823 (1997).