

Étude numérique par la méthode de Boltzmann sur réseau (MRT-LBM) des transferts thermiques couplés

Fayçal Moufekkir

Laboratoire de Mécanique & Energétique, Faculté des sciences, Département de physique 60000 Oujda, Maroc

Mohammed Amine Moussaoui

Laboratoire de Mécanique & Energétique, Faculté des sciences, Département de physique 60000 Oujda, Maroc

Ahmed Mezrhab

Laboratoire de Mécanique & Energétique, Faculté des sciences, Département de physique 60000 Oujda, Maroc

Auteur correspondant: amezrhab@yahoo.fr

Hassan Naji

Université Lille Nord de France, F-59000 Lille, France

UArtois, Laboratoire Génie Civi et géo-Environnement (LGCgE- EA 4525), F-62400 Béthune, France

M'hamed Bouzidi

Université Clermont 2, LaMI EA 3867, IUT de Montluçon, Av. A. Briand, BP 2235,

F-03101 Montluçon cedex, France

Abstract

A two dimensional numerical analysis of natural and double diffusive convection in the presence of volumetric radiation within a differentially heated square cavity containing a semitransparent gray and scattering gas was conducted. The simulation of flow and heat transfer is achieved by adopting a hybrid scheme with the lattice Boltzmann method (LBM-MRT) to compute velocities and the finite difference method (FDM) for temperature and concentration calculation, this scheme is coupled with the discrete ordinate method (DOM) to perform the information necessary for the radiative energy equation (RTE). Various parameters such as the Rayleigh number Ra , the emissivity of the walls ϵ_i , Planck number Pl and the Albedo ω have been studied numerically to assess their impact on the flow structure and temperature distribution.

Résumé

Une modélisation bi-dimensionnelle est effectuée pour la convection naturelle en présence de rayonnement volumique dans une cavité carrée dont les deux parois verticales sont différentiellement chauffées contenant un milieu gris semi transparent et diffusant. La simulation de l'écoulement et du transfert de chaleur est réalisée en adoptant un schéma hybride entre la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM-MRT) pour la détermination des vitesses et la méthode aux différences finies (FDM) pour les températures. Ce schéma est couplé avec la méthode des ordonnées discrètes (DOM) pour le calcul de l'information radiative nécessaire à l'équation d'énergie. L'influence de plusieurs paramètres tels que le nombre de Rayleigh Ra , l'émissivité des parois ϵ_i , le nombre Planck Pl et l'albédo de diffusion ω , a été étudiée numériquement.

Nomenclature

g	accélération de pesanteur, ms^{-2}
I	intensité de rayonnement, Wm^{-2}
i_0	intensité du corps noir, Wm^{-2}

K	conductivité thermique, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
L	largeur de la cavité, m
\vec{n}	vecteur normal
Nu_c	nombre de Nusselt convectif moyen
Nu_R	nombre de Nusselt radiatif moyen
Nu_T	nombre de Nusselt total moyen
Pl	nombre de Planck
Pr	nombre de Prandtl, ν/α
q_R	flux de chaleur radiatif, Wm^{-2}
Ra	nombre de Rayleigh, $g\beta(T_h - T_c)L^3/\nu\alpha$
T	température, K
T_h, T_c	Température à la paroi chaude et froide, K
u, v	composante de vitesse suivant x, y ms^{-1}
U, V	composante de vitesse adimensionnelle suivant X, Y, u, L/v
x, y	coordonnées cartésiennes, m
X, Y	coordonnées cartésiennes adimensionnelles, x/L

Symboles Grecs

β	coefficient d'expansion volumique, K^{-1}
ε	émissivité de la surface radiative
μ, ξ	cosinus directeurs
ν	viscosité cinématique, m^2s^{-1}
ρ	densité, Kgm^{-3}
τ	épaisseur optique
θ	température adimensionnelle, $(T-T_0)/(T_h-T_c)$
Θ_0	rapport de température de référence,
ω	albedo de diffusion
$\vec{\mu}$	vecteur de direction, $\mu\vec{i} + \xi\vec{j}$

1. INTRODUCTION

L'étude du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement volumique continue de susciter beaucoup d'intérêt et demeure un sujet d'actualité pour les recherches scientifiques en raison de ses diverses applications cruciales dans l'industrie, tels que la conception des fours, les échangeurs de chaleur, le refroidissement des composants électroniques et des réacteurs nucléaires, l'efficacité énergétique dans les bâtiments, la métallurgie et les capteurs solaires, etc. Pour cette raison, plusieurs études ont été menées [1-2].

Les premiers travaux sur l'interaction du rayonnement volumique et la convection naturelle ont été débutés dès les années 80 par Viskanta [3]. Dans leurs études, le milieu a été considéré comme un gaz

gris (propriétés radiatives d'absorption et d'émission indépendantes de la longueur d'onde et la température). Pour étudier le rayonnement couplé à la convection dans une enceinte carrée, Kassemi et Naraghi [4] ont utilisé la méthode des facteurs d'échange. De même, Tan et Howell [5] ont étudié les effets du rayonnement volumiques sur la convection naturelle et ils ont constaté que le rayonnement détruit la symétrie de la structure de l'écoulement et le champ de température.

Lauriat [1] a étudié le phénomène du rayonnement volumique en présence de la convection naturelle en considérant le milieu comme un gaz gris dans une cavité bidimensionnelle verticale. La méthode P1 des harmoniques sphériques a été utilisée pour la partie radiative. Le même problème a été modélisé par Yücel *et al.* [2] en utilisant la méthode des ordonnées discrète (MOD). Cet auteur a conclu que la méthode P1 est l'origine d'erreurs intolérable pour l'estimation de l'information radiative.

À ce jour, le problème du couplage convection rayonnement, où le fluide est un mélange binaire qui absorbe et émet le rayonnement en fonction de sa concentration locale (ou température), a été rarement étudié. Rafieivand [6] et Mezrhab *et al.* [7] ont été les premiers à traiter ce type de couplage. Mezrhab *et al.* [7] ont présenté des solutions de référence pour le transfert de chaleur y compris la convection de double diffusion et le rayonnement dans des milieux absorbant, émettant et non diffusant. Ils ont développé un modèle numérique utilisant la méthode des volumes finies pour résoudre les champs de température et de vitesse et la MOD pour la résolution de l'équation de transfert radiatif (ETR) afin de discuter les effets de l'épaisseur optique, le rapport de forces de flottabilité, le nombre de Rayleigh et le nombre de Lewis sur le transfert de chaleur et de masse. Ces auteurs ont noté que le transfert de masse et de chaleur sont considérablement modifiés par les effets des rayonnements.

Au cours des dernières années, les LBMs ont obtenu un succès considérable dans la simulation des problèmes hydro-thermodynamiques [8-12]. Ils semblent être des approches flexibles par rapport aux méthodes conventionnelles de CFD, tels que la méthode aux différences finies (FDM), la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des volumes finis (FVM). En fait, les avantages de la LBM résident dans sa simplicité, sa mise en œuvre efficace pour le calcul parallèle et une manipulation facile pour des géométries ou des conditions aux limites complexes. Un autre atout de cette méthode est sa haute performance en termes de stabilité et de précision. Il est à signaler ici que la simulation de la convection naturelle dans une cavité carrée a été réalisée par [9-11] en utilisant une méthode de Boltzmann sur réseau thermique (TLBM). La MRT-LBM a été conçu pour produire une solution plus stable que celles donnée par LBM-BGK. L'idée principale dans cet approche s'est que le processus de collision est accompli dans l'espace des moments par une transformation linéaire et l'advection est toujours réalisée dans l'espace des vitesses [9-10,12].

Dans ce papier, la même configuration précédemment étudiée par Lauriat [1] et Yücel *et al.* [2], est considérée mais cette fois par la méthode MRT-LBM couplée à FDM et la méthode DOM. Le choix de cette combinaison numérique est justifié par ses avantages en termes de stabilité numérique, de simplicité dans la programmation et du gain en temps de calcul [12].

L'objectif de ce travail est de prouver la capacité du code développé à modéliser ce type de problèmes et d'examiner son exactitude en menant une vaste étude paramétrique pour un milieu gazeux, où l'absorption du fluide est proportionnelle à la concentration du polluant.

2. FORMULATION

Le modèle physique considéré dans cette étude est une cavité carrée contenant un milieu homogène, gris, absorbant, émettant et isotrope en diffusion, les parois horizontales sont adiabatiques tandis que, les deux parois verticales gauche et droite sont maintenues à des températures T_f (froide) et T_c (chaude), respectivement (fig.1).

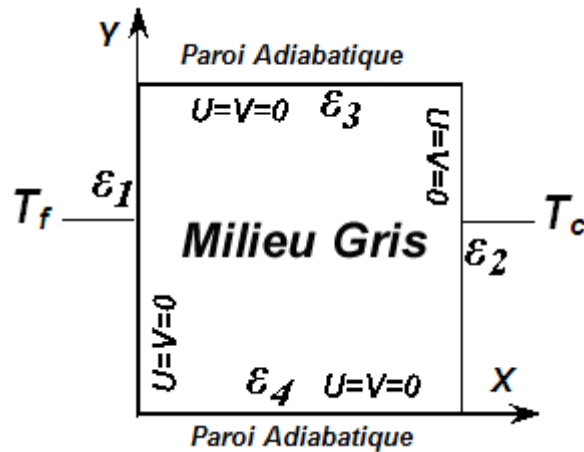


Figure 1: Géométrie du problème

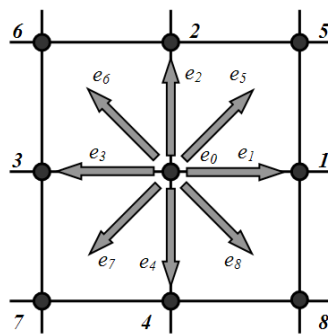


Figure 2: Modèle D2Q9 en réseau carré.

2.1. Méthode de Boltzmann sur réseau

On considère le modèle bidimensionnel de la méthode LBE avec neuf vitesses discrètes (D2Q9) sur une grille carrée de pas δx . Dans l'étape d'advection, les particules fluides se déplacent d'un nœud de la grille vers le nœud voisin (fig. 2). Les vitesses discrètes sont données par:

$$e_i = \begin{cases} (0,0), & i = 0 \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2])c, & i = 1-4 \\ (\cos[(2i-9)\pi/4], \sin[(2i-9)\pi/4])\sqrt{2}c, & i = 5-8 \end{cases} \quad (1)$$

On rappelle que les pas spatial et temporel sont choisis égaux à 1.

L'équation d'évolution temporelle de l'état du fluide suit l'équation générale :

$$f_i(x + e_i, t+1) = f_i(x, t) + \Omega f_i(x, t), \quad i = 0, 1, \dots, 8 \quad (2)$$

où f_i est la fonction de distribution d'une particule et Ω est l'opérateur de collision. La linéarisation de cet opérateur autour de la fonction de distribution à l'équilibre locale f_i^{eq} apporte une simplification importante de la méthode LBE. Avec l'approximation de BGK, l'équation (4) s'écrit :

$$f_i(x + e_i, t + 1) = f_i(x, t) - \frac{1}{\chi} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)), \quad i = 0, 1, \dots, 8 \quad (3)$$

Où χ est le temps de relaxation

Le développement de Chapman-Enskog est utilisé pour obtenir les équations de Navier Stokes à partir de la méthode LBE.

A chaque nœud du domaine, on calcule un ensemble de neuf moments venant des neuf fonctions de distribution et qui sont liés par la transformation linéaire

$$m = Mf \quad (4)$$

où la matrice M d'ordre 9 est donnée dans [12]. Les collisions modifient les moments comme suit: quelques uns sont conservés (la densité et l'impulsion mais pas l'énergie). Les six moments restant sont calculés à partir d'une simple équation de relaxation linéaire vers les valeurs d'équilibre qui dépendent des quantités conservées. Les nouvelles fonctions de distribution f^c sont calculées à partir des nouveaux moments

$$f^c = M^{-1}m^c \quad (5)$$

La densité et la vitesse sont données par:

$$\rho(x, t) = \sum_i f_i(x, t) \quad (6)$$

$$\vec{u}(x, t) = \sum_i f_i(x, t) e_i / \rho(x, t) \quad (7)$$

2.2. Calcul du flux de chaleur radiatif

Le fluide contenu dans la cavité est considéré comme gris, semi-transparent et participant en émission et en absorption, ce qui implique la détermination du terme source radiatif, dans l'équation énergétique :

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) - \frac{\Theta_0}{Pl} \nabla Q_R \quad (8)$$

Dans ce travail, le terme source est calculé en résolvant (ETR), qui est donné dans les variables sans dimension par:

$$\mu \left(\frac{\partial I}{\partial X} \right) + \xi \left(\frac{\partial I}{\partial Y} \right) + \tau I = \frac{\tau}{4\pi} \left[(1 - \omega) \left(1 + \frac{\theta}{\Theta_0} \right)^4 + \omega \int_{4\pi} I d\Omega \right] \quad (9)$$

L'intégration de l'équation de transfert radiatif (9) sur le volume de contrôle donne:

$$\mu_m A_X (I_{m,E} - I_{m,W}) + \xi_m A_Y (I_{m,N} - I_{m,S}) + \tau(P) \Delta V I_{m,P} = \tau(P) \Delta V I_0 \quad (10)$$

avec $A_X = \Delta X$, $A_Y = \Delta Y$ et $\Delta V = \Delta X \cdot \Delta Y$

Des conditions de type rebond en arrière ou « bounce-back » [12] sont utilisées sur les parois solides de la cavité.

Les conditions aux limites pour la température sont :

$$\begin{aligned} \theta(N+1/2, y) = \theta_h = 0.5 & \quad \text{pour} \quad 1/2 \leq y \leq N+1/2 \\ \theta(1/2, y) = \theta_c = -0.5 & \quad \text{pour} \quad 1/2 \leq y \leq N+1/2 \end{aligned} \quad (11)$$

Les conditions aux limites du rayonnement sur les parois horizontales sont décrites par l'équation (12).

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\Theta_0}{Pl} \varepsilon_w \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\theta}{\Theta_0} \right)^4 - \int_{\bar{n} \cdot \bar{\Omega}' < 0} I(X, Y, \bar{\Omega}') d\Omega' \right] = 0 \quad (12)$$

Le nombre de Nusselt moyen sur les murs thermiquement actifs s'écrit par:

$$Nu_T(X_w) = \frac{1}{A} \int_0^A \left\{ - \left[\frac{\partial \theta}{\partial X} \right]_{X_w, Y} + \frac{\Theta_0}{Pl} \varepsilon_w \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\theta}{\Theta_0} \right)^4 - \int_{\bar{n} \cdot \bar{\Omega}' < 0} I(X, Y, \bar{\Omega}') d\Omega' \right] \right\} dY \quad (13)$$

3. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Il faut noter que pour les calculs présentés dans cette étude, un maillage uniforme de 139x139 éléments a été choisi pour optimiser la relation entre la précision et le temps de calcul. Les résultats de Yücel *et al.* [2], Mezrhab *et al.* [7] et Meftah [8], obtenues dans le cas d'une cavité carrée différentiellement chauffée soumise à un flux de chaleur constant contenant un fluide binaire ont été utilisés comme référence pour vérifier la validité de notre code numérique. D'après le tableau 1, où les résultats de comparaison sont présentés, un très bon accord est observé entre ces résultats.

	Mezrhab <i>et al.</i> [7]		Yücel <i>et al.</i> [2]		Meftah [13]		Présent travail		Maillage
	Nu _R	Nu _T	Nu _R	Nu _T	Nu _R	Nu _T	Nu _R	Nu _T	
$\tau=0.2$	37.21	45.51	37.4	46.11	37.40	46.05	36.718	45.509	139x139
$\tau=1.0$	31.48	38.48	31.28	38.93	31.25	38.81	31.108	38.725	139x139
$\tau=5.0$	23.94	31.8	23.64	31.76	23.57	31.59	23.801	31.778	139x139

Tableau 1 : Validation du code pour le couplage convection-rayonnement volumique.

Afin de comprendre l'effet du rayonnement volumique sur les champs d'écoulement et de température, différents paramètres sont étudiés, tels que Ra, Pl, ε et ω .

3.1. Effets du nombre de Rayleigh

Les figures 3 et 4 montrent l'influence du nombre de Rayleigh sur les lignes de courant, les isothermes et sur le nombre de Nusselt respectivement.

Du fait que T_0 est fixe le rapport de température de référence est simultanément ajusté par $\theta_0 = 7.5 / (Ra \cdot 10^{-6})$.

Pour des valeurs basses de Ra , la circulation est faible, les lignes de courant sont circulaires et les isothermes ont tendance à être parallèles aux parois verticales car le transfert thermique se fait par conduction. Pour $Ra = 10^3$, l'effet du rayonnement sur l'allure des lignes de courant n'est pas perceptible à part une légère réduction en intensité de recirculation au cœur de la cavité lorsque $\tau=1$ (0.7) par rapport à $\tau=1$ (1.1). On observant les isothermes, on constate que la présence du rayonnement brise leur inclinaison et les rendent parallèles aux parois actives de la cavité.

Quand Ra augmente, la vitesse de l'écoulement devient importante et la circulation devient forte près des parois chaud et froid de la cavité. Les isothermes se déplacent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et deviennent presque horizontales au centre de la cavité.

Pour $Ra=10^6$, les champs de température et d'écoulement sont centro-symétriques en l'absence de rayonnement et le noyau interne est thermiquement stratifié (figure 3), mais en considérant les effets du rayonnement, le gradient de température augmente près de la paroi active froide, ceci est due à la distribution de l'énergie dans le milieu, nous constatons également une homogénéisation de la température dans la cavité.

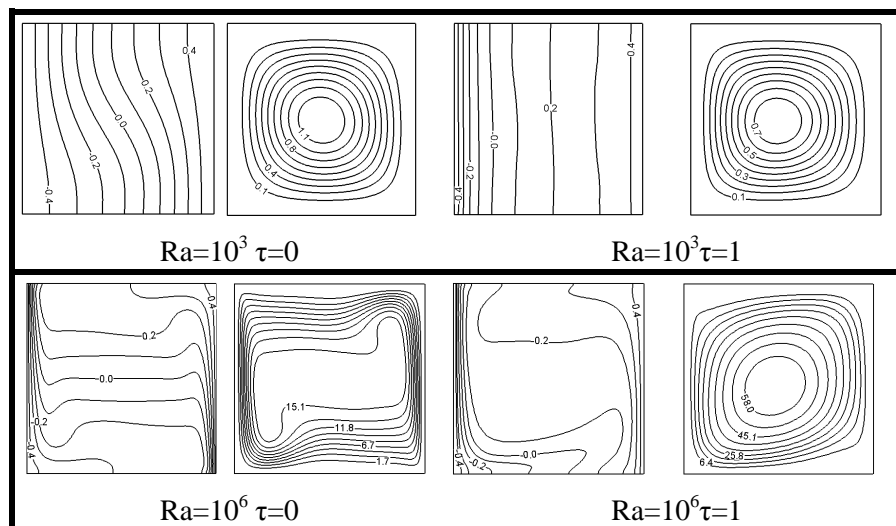


Figure 3: Les isothermes et les lignes de courant pour $Ra=10^3-10^6$ et $\tau=0,1$

En analysant la figure 4, on note que l'augmentation du nombre de Rayleigh produit une intensification du transfert de chaleur dans le cas de la convection naturelle et également en présence du rayonnement volumique.

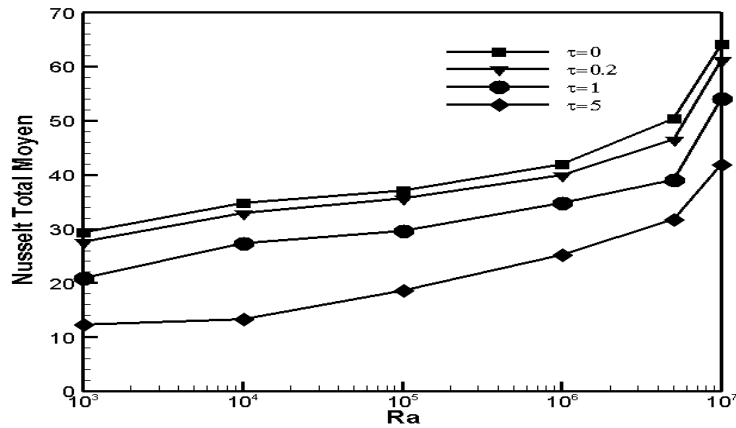


Figure 4: Nusselt total moyen en fonction du nombre de Rayleigh pour différentes opacités $\tau=0, 0.2, 1$ et 5

3.2 Effets du nombre de Planck

Pour analyser l'influence du nombre de Planck en présence du rayonnement volumique, on fixe les paramètres suivants: $Ra = 5 \cdot 10^5$, $\theta_0 = 1.5$, $\omega = 0$, $\tau = 1$, $Pr = 0.71$ et en tenant compte du cas de la cavité différentiellement chauffée contenant un milieu semi transparent avec des parois verticales noires ($\varepsilon_{1,2} = 1$ et $\varepsilon_{3,4} = 0$). Le nombre de Planck exprime la relation entre le transfert de chaleur par conduction et le transfert de chaleur par rayonnement. Le transfert de chaleur est dominé par le rayonnement lorsque le nombre de Planck est faible.

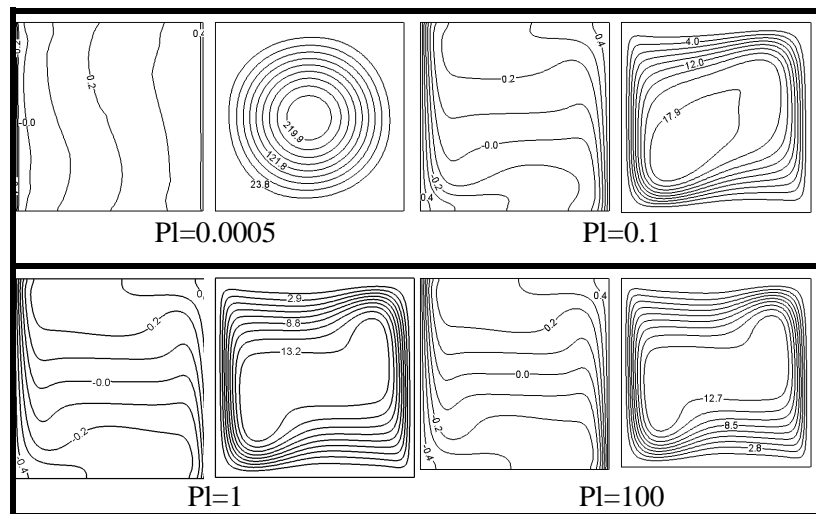


Figure 5: Les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs de Planck et pour $Ra=5 \cdot 10^5$ et $\tau=1$

L'effet du nombre de Planck sur l'écoulement est visible en particulier en présence de rayonnement volumique (fig. 5), l'étude de cette figure a démontré que la diminution du nombre de Planck provoque une intensification du gradient de température et de la vitesse près des parois actives et crée également un noyau moins stagnant pour les milieux plus épais.

	Pl	0.0005	0.001	0.1	1	10	100
$\tau=0.2$	Nu_T	1357.288	682.319	13.832	7.923	7.334	7.275
	Nu_R	1349.212	676.319	7.306	0.738	0.074	0.007
$\tau=1$	Nu_T	1020.289	516.106	12.069	7.729	7.314	7.273
	Nu_R	1008.250	507.001	6.507	0.693	0.070	0.007
$\tau=5$	Nu_T	448.650	237.302	10.324	7.565	7.298	7.272
	Nu_R	439.588	229.409	4.821	0.556	0.057	0.006

Tableau 2. Nombres de Nusselt total et radiatif en fonction du nombre Planck en milieu semi-transparent

D'après le tableau 2, le transfert de chaleur diminue lorsque le nombre Planck augmente pour une opacité donnée.

3.3. Effets des émissivités des parois

Dans cette partie, on fixe les paramètres suivants: $Ra = 5.10^6$, $Pr = 0.71$, $\theta_0=1.5$, $Pl = 0.02$ et $\tau = 0$. L'émissivité des murs peut avoir ces valeurs: 0, 0.1, 0.5 et 1.

Le tableau 3 résume l'influence de l'émissivité des parois. En présence du rayonnement, la variation de l'émissivité des parois a qualitativement les mêmes effets que ceux observés en convection naturelle. En effet, l'émissivité des parois modifie considérablement l'écoulement et le champ thermique. Le taux maximum de transfert de chaleur est obtenue lorsque les surfaces des murs de la cavité sont considérées comme des corps noirs, en particulier pour la configuration $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 1$ et $\varepsilon_3 = 0$.

ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	Nu_c	Nu_R	Nu_T
0.1	1	1	1	7.32	14.485	21.805
0.5	1	1	1	8.622	26.853	35.475
1	0.1	1	1	14.751	4.875	19.626
1	0.5	1	1	12.144	21.911	34.055
1	1	0	1	14.176	35.968	50.144
1	1	0.1	1	12.667	36.863	49.53
1	1	0.5	1	10.656	38.093	48.749
1	1	1	0	9.628	39.322	48.95
1	1	1	0.1	9.756	38.947	48.703
1	1	1	0.5	9.948	38.583	48.531
1	1	1	1	10.047	38.478	48.525
0	0	0	0	13.718	0	13.718

Tableau 3. Le nombre de Nusselt moyen radiatif et total pour différentes émissivités de la cavité.

3.4 Effet de l'Albédo

Les lignes de courant pour un milieu non diffusant, $\omega=0$, montrent que ω n'a pas d'effet significatif. Cependant, l'effet du rayonnement diminue avec l'augmentation de la valeur de ω et les isothermes sont semblables à ceux du cas de la convection naturelle ($\tau = 0$).

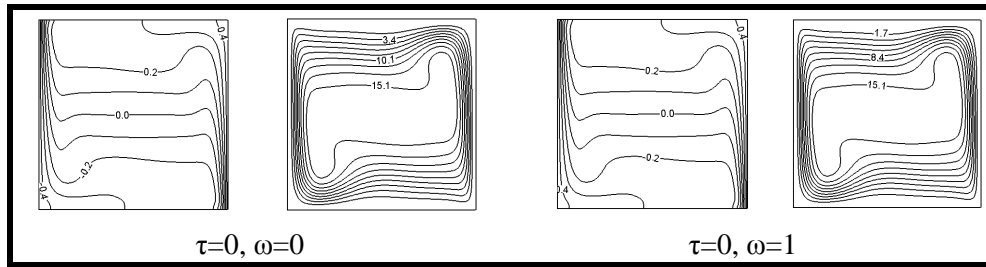


Figure 6: L'effet de l'Albédo sur les isothermes et les lignes de courant pour effets $\omega=0, 1$ et pour $\tau=0$

On déduit à travers la comparaison entre le cas non diffusant et le cas d'un milieu absorbant et diffusant (fig. 6), qu'il y a moins d'absorption de rayonnement dans le dernier cas. Par conséquent la distribution de la température est semblable au cas d'un fluide non diffusant et optiquement plus mince. En présence du rayonnement et pour un ω fixé la stratification d'isothermes est rompue et les lignes de courant présentent une structure unicellulaire.

4. CONCLUSION

À la lumière de cette étude, nous notons que pour un milieu émettant, absorbant et diffusant, le rayonnement est le mode prédominant de transfert de chaleur et les isothermes sont fortement influencées par le chauffage du centre de la cavité. En outre, les lignes de courant sont considérablement modifiées par la présence de rayonnement et les vitesses sont intensifiées. En règle générale, l'écoulement est unicellulaire, mais seulement les milieux minces ou diffusants peuvent générer des structures multicellulaires.

5. REFERENCES

1. Lauriat G., Combined radiation-convection in gray fluids enclosed in vertical cavities, *J. Heat Transfer* **104** (1982) 609-615.
2. Yucel A., Acharya S. and Williams M.L, Natural convection and radiation in a square enclosure, *Numer. Heat Transfer* **A15** (1989) 261-278.
3. Viskanta R., Radiation Heat Transfer, *Fortschritte Der Verfahrenstechnik* **22** (1984) 51-81.
4. Kassemi M., Naraghi M.H.N., *Analysis of radiation-natural convection interactions in I-G and low-G environments using the discrete exchange factor method*, AIAA/ASME Thermophysics Conference, Seattle (1990).
5. Tan Z., Howell J.R., Combined radiation and natural convection in a square enclosure with participating medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **34** (1991) 79-97.
6. Rafieivand M., *Numerical study of convection of double diffusion in presence of radiation on rectangular cavity*, Doctorat thesis, University de Poitiers-Poitiers France (1999).
7. Mezrhab A., Lemonnier D., Meftah S., Benbrik A., Numerical Study of double-diffusion convection coupled to radiation in a square cavity filled with a participating grey gas, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **41** (2008)195501-195517.
8. El Ganaoui M., Djebali R., Aptitude of a lattice Boltzmann method for evaluating transitional thresholds for low Prandtl number flows in enclosures *Comptes Rendus Mécanique* **338** (2010) 85-96.

9. Mezrhab A., Moussaoui M.A., Naji H., Lattice Boltzmann simulation of surface radiation and natural convection in a square cavity with an inner cylinder, *Journal of Physics, part D: Applied Physics* **41**(2008) 551-5517.

10. Moussaoui M.A., Jami M., Mezrhab A., Naji H., Bouzidi M., Multi-relaxation-time lattice Boltzmann computation of channel flow past a square cylinder with an upstream control bi-partition, *International Journal of Numerical Methods in Fluids* **64** (2010) 591-608.

11. Djebali R., El Ganaoui M., Assessment and Computational Improvement of Thermal Lattice Boltzmann Models Based Benchmark Computations; *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences* **71** (2011) 179-202.

12. Mezrhab A., Bouzidi M., Lallemand P., Hybrid lattice Boltzmann finite- difference simulation of convective flows, *Comput. Fluids* **33** (2004) 623-641.

13. Laouar Meftah S., *Modeling of Natural double diffusion convection in mixture gases absorbing and emitting radiation*, Doctorat thesis, University M'hamed Bougara–Boumerdes Algeria (2010).