

# Instabilité Paramétrique Quasi-Périodique de la Convection de Rayleigh-Bénard en Cellule de Hele-Shaw

T. Boulal

Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences, Université Hassan II, Casablanca, Maroc

S. Aniss

Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences, Université Hassan II, Casablanca, Maroc

E-mail : s.aniss@fsac.ac.ma

## Résumé

Ce travail consiste à étudier l'effet d'une modulation gravitationnelle quasi-périodique sur le seuil de convection au sein d'un fluide confiné en cellule de Hele-Shaw. La modulation gravitationnelle quasi-périodique consiste à faire osciller la couche fluide et ses frontières selon un mouvement oscillatoire ayant deux fréquences incommensurables. Cette étude est une suite du travail présenté par Aniss et *al.* [1] où seule la modulation gravitationnelle périodique a été considérée. Nous montrons que pour  $Pr = O(1)$  ou  $Pr \gg 1$ , la modulation gravitationnelle quasi-périodique n'a aucun effet sur le seuil de convection. Cependant, lorsque  $Pr = O(\varepsilon^2)$  ( $\varepsilon$  étant le rapport d'aspect géométrique de la cellule), cette modulation a un effet stabilisant ou déstabilisant dépendant fortement du rapport des fréquences.

## Abstract

The aim of the present paper is to examine the effect of a quasi-periodic gravitational modulation on the onset of convective instability in Hele-Shaw cell. The quasi-periodic modulation considered here consists in a modulation having two incommensurate frequencies. This study is an extension of a previous work by Aniss et *al.* [1] in which only a periodic gravitational modulation was considered. We have shown that for  $Pr = O(1)$  or  $Pr \gg 1$ , the gravitational modulation has no effect on the convective threshold as expected. However, for  $Pr = O(\varepsilon^2)$  ( $\varepsilon$  designates the aspect ratio of the cell), it turns out that a modulation with two incommensurate frequencies has a stabilizing or a destabilizing effect strongly depending on the frequencies ratio.

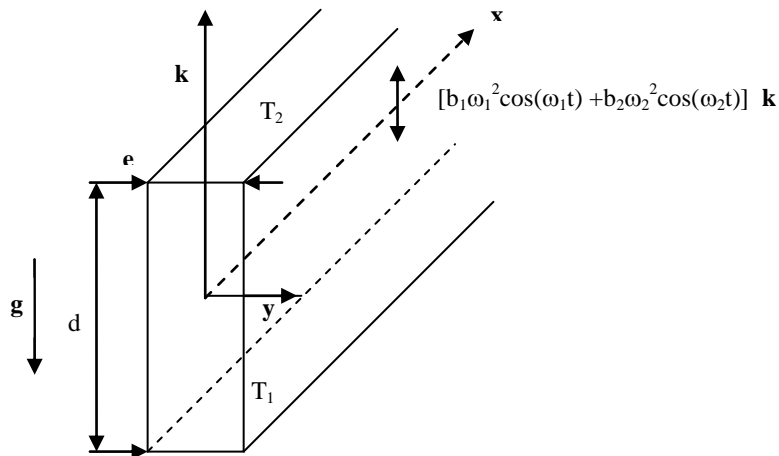
## 1. INTRODUCTION

Les modulations périodiques, gravitationnelle et de température à la frontière, de la convection de Rayleigh-Bénard en cellule de Hele-Shaw ont été étudiées dans [1, 2]. Il a été montré dans ces travaux que l'instabilité paramétrique convective n'a lieu que pour de faibles nombres de Prandtl. Dans cette situation, on peut déstabiliser une couche fluide chauffée par le haut comme on peut stabiliser une couche fluide chauffée par le bas. Dans ce travail, nous élargissons l'étude effectuée dans [1] au cas d'une modulation gravitationnelle quasi-périodique. La modulation quasi-périodique consiste à faire osciller la couche fluide selon un mouvement caractérisé par deux fréquences incommensurables (le rapport des deux fréquences est irrationnel) [3]. Nous considérons un fluide Newtonien confiné dans une cellule de Hele-Shaw horizontale d'extension infinie avec des parois verticales parfaitement

isolantes. La couche fluide est soumise, en plus des oscillations, à un gradient de température constant de même sens ou de sens opposé à la pesanteur (configurations d'équilibres stable et instable). Nous étudions alors l'influence de la modulation gravitationnelle quasi-périodique sur le seuil d'instabilité convectif correspondant au déclenchement du mouvement de convection au sein de la couche fluide. Nous rappelons que l'intérêt de travailler en configuration géométrique de Hele-Shaw consiste à simuler les écoulements en milieux poreux. En effet, en définissant une perméabilité appropriée à la cellule, plusieurs travaux ont montré l'existence d'une analogie entre l'écoulement convectif en cellule de Hele-Shaw et celui dans un milieu poreux pour de faibles nombres de Rayleigh lorsque les perturbations dans le milieu poreux sont bidimensionnelles [4-9]. Cette analogie a servi en particulier à déterminer expérimentalement le nombre de Rayleigh critique correspondant au déclenchement du mouvement de convection et à visualiser les rouleaux convectifs. L'étude que nous présentons peut servir de modèle théorique pour étudier l'effet de la modulation gravitationnelle quasi-périodique sur le seuil d'instabilité convectif en milieux poreux.

## 2. FORMULATION LINEAIRE DU PROBLEME

Nous considérons un fluide Newtonien confiné dans une cellule de Hele-Shaw horizontale d'extension infinie en  $x$  (figure 1). Le rapport d'aspect géométrique de la cellule est défini par  $\varepsilon = e/d$ .



**Figure 1** : Couche fluide, confinée dans une cellule de Hele-Shaw, soumise à un gradient de température et à des oscillations verticales quasi-périodiques.

Les parois verticales de la cellule sont supposées parfaitement adiabatiques :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm \frac{e}{2} \quad (1)$$

Les parois inférieure et supérieure, situées respectivement en  $z = -d/2$  et  $z = d/2$ , sont maintenues respectivement aux températures  $T_1$  et  $T_2$  avec  $(T_2 \succ T_1)$  ou  $(T_1 \succ T_2)$ . La cellule de Hele-Shaw est soumise à un mouvement oscillatoire quasi-périodique :

$$\mathbf{z} = [b_1 \cos \omega_1 t + b_2 \cos \omega_2 t] \mathbf{k} \quad (2)$$

Nous désignons respectivement par  $(b_1, b_2)$  et  $(\omega_1, \omega_2)$  les amplitudes et les pulsations angulaires du mouvement oscillatoire et par  $\mathbf{k}$  un vecteur unitaire ascendant. Deux champs de force agissent alors sur le fluide: le champ de force gravitationnel et le champ de force oscillatoire. Si on désigne par  $\rho$  la masse volumique du fluide, les forces volumiques s'écrivent donc :

$$\rho [g - (b_1 \omega_1^2 \cos \omega_1 t + b_2 \omega_2^2 \cos \omega_2 t) \mathbf{k}] \quad (3)$$

## 2.1 Équations de l'équilibre

Nous considérons que la couche fluide est soumise au départ à des oscillations, ensuite nous appliquons un faible gradient de température de telle sorte que l'équilibre correspond à un régime conductif avec un champ de vitesse nul :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_e &= 0, & -\nabla p_e + \rho_e \mathbf{g} - \rho_e (b_1 \omega_1^2 \cos \omega_1 t + b_2 \omega_2^2 \cos \omega_2 t) \mathbf{k} &= 0 \\ \rho_e &= \rho^* [1 - \beta (T_e - T^*)], & T_e &= \frac{(T_1 + T_2)}{2} - \frac{(T_1 - T_2)}{d} z \end{aligned}$$

où  $\rho^*$  est une masse volumique de référence.

## 2.2 Equations du mouvement de convection au voisinage de l'équilibre

Nous perturbons l'état d'équilibre en superposant à celui-ci des perturbations infinitésimales. Les nouvelles variables sont:

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} + \mathbf{V}(u, v, w), \quad p = p_e + p', \quad \rho = \rho_e + \rho', \quad T = T_e + T' \quad (4)$$

Le système d'équations linéaire correspondant à la perturbation de l'état d'équilibre est donné par l'équation de continuité, les équations de mouvement de Navier-Stokes et l'équation de la chaleur en approximation de Boussinesq:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (5)$$

$$\rho^* \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p' + \mu \Delta \mathbf{V} + \rho^* \beta T' [g + b_1 \omega_1^2 \cos \omega_1 t + b_2 \omega_2^2 \cos \omega_2 t] \mathbf{k} \quad (6)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{T_1 - T_2}{d} w + \kappa \Delta T' \quad (7)$$

Nous désignons respectivement par  $\beta$ ,  $\mu$  et  $\kappa$ , le coefficient de dilatation thermique, la viscosité dynamique et la diffusivité thermique du fluide. Dans ce travail, on suppose que:

$$b_1 \omega_1^2 = b_2 \omega_2^2 \quad (8)$$

Un choix de grandeurs caractéristiques, approprié aux problèmes de convection en cellule de Hele-Shaw, nous permet de faire apparaître le rapport d'aspect de la cellule,  $\varepsilon = e/d$ , dans les équations de bilan adimensionnelles [10]. Le temps est adimensionné par  $d^2/\kappa$ , les coordonnées  $(x, y, z)$  par  $(d, e, d)$ , le champ de vitesse  $(u, v, w)$  par  $(\kappa/d, e\kappa/d^2, \kappa/d)$ , la pression et la température sont respectivement adimensionnées par  $\rho^* \nu \kappa/d^2$  et  $(T_1 - T_2)$ . Le système d'équations (5-7) s'écrit donc sous forme réduite de la façon suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$\varepsilon^2 Pr^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \Delta_2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (10)$$

$$\varepsilon^4 Pr^{-1} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^4 \Delta_2 v + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (11)$$

$$\varepsilon^2 Pr^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^2 \Delta_2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + Ra [1 + \alpha(\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)] T \quad (12)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial T}{\partial t} = \varepsilon^2 w + \varepsilon^2 \Delta_2 T + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (13)$$

où  $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ ,  $Ra = \beta g (T_1 - T_2) e^2 d/\nu \kappa$  est le nombre de Rayleigh gravitationnel de la cellule qui peut être positif ou négatif,  $\Omega_1 = \omega_1 d^2/\kappa$  et  $\Omega_2 = \omega_2 d^2/\kappa$  sont des fréquences adimensionnelles. La quantité  $\alpha = b_1 \omega_1^2/g = b_2 \omega_2^2/g$  représente le rapport, en amplitudes, des accélérations du mouvement oscillatoire et de pesanteur. Cette quantité sera substituée dans la suite par l'expression suivante:

$$\alpha = Fr_1 \Omega_1^2 \quad (14)$$

où  $Fr_i = \frac{b_i \kappa^2}{g d^4}$  ( $i=1,2$ ), représentent chacun une sorte de nombre de Froude  $\left( Fr = \frac{(\kappa/d)^2 b}{g d d} \right)$ . De la

forme du système (9-13), les paramètres contrôlant le comportement de la couche fluide au seuil de convection vont être le nombre de Rayleigh de la cellule  $Ra$ , le nombre de Prandtl  $Pr$ , le nombre d'onde  $q$  de la perturbation et le rapport d'aspect géométrique de la cellule  $\varepsilon$ . Dans la suite, le système (9-13) sera associé aux conditions d'adiabaticité (1) et d'adhérence sur les parois verticales:

$$\mathbf{V} = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm \frac{1}{2} \quad (15)$$

Les conditions aux limites sur les parois horizontales seront discutées lors de l'approximation de Hele-Shaw dans la section suivante.

### 3. ANALYSE ASYMPTOTIQUE ET STABILITE

L'approximation de Hele-Shaw qui consiste à faire tendre  $\varepsilon^2$  vers zéro dans le système adimensionnel (9-13) nous mène à faire la distinction entre deux formulations linéaires distinctes [10], chacune de ces formulations dépend de l'ordre de grandeur du nombre de Prandtl: la première formulation correspond à  $Pr = O(1)$  ou  $Pr \gg 1$  et la deuxième correspond à  $Pr = O(\varepsilon^2)$ .

#### 3.1 Première Formulation: $Pr = O(1)$ ou $Pr \gg 1$

Dans cette formulation, le terme  $\partial \mathbf{V} / \partial t$  est négligé des équations de mouvement adimensionnelles (10-12) lors de l'approximation de Hele-Shaw ( $\varepsilon^2 = 0$ ). Nous notons par  $u_o, v_o, w_o, p_o$  et  $T_o$  les solutions correspondant à ( $\varepsilon^2 = 0$ ) du système (9-13). L'équation (11) permet de montrer que la pression  $p_o$  est indépendante de  $y$ . De même, à partir de l'équation (13) et en utilisant les conditions d'adiabaticité sur  $T_o$  en  $y = \pm 1/2$ , nous montrons que  $T_o$  est aussi indépendante de  $y$ . Ainsi, au premier ordre, le système d'équations (9-13) se réduit à:

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} = \frac{\partial p_o}{\partial x} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} = \frac{\partial p_o}{\partial z} - Ra [1 + \alpha (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)] T_o \quad (18)$$

L'intégration des équations (17) et (18) et les conditions d'adhérence sur les parois verticales (15) permettent d'obtenir:

$$u_o = \frac{1}{2} \left( y^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\partial p_o}{\partial x} \quad (19)$$

$$w_o = \frac{1}{2} \left( y^2 - \frac{1}{4} \right) \left[ \frac{\partial p_o}{\partial z} - Ra [1 + \alpha (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)] T_o \right]$$

L'introduction des expressions (19) dans l'équation de continuité (16) et l'intégration de celle-ci par rapport à la variable  $y$  permettent d'obtenir la deuxième composante de la vitesse  $v_o$ . En utilisant les conditions d'adhérence à la paroi (15), nous montrons alors que  $v_o = 0$ . Au premier ordre,  $\varepsilon^2 = 0$ , les expressions (19) ne peuvent être couplées à l'équation de l'énergie (13). Celle-ci est alors exploitée à l'ordre  $\varepsilon^2$  en utilisant les développements suivants:

$$w = w_o + \varepsilon^2 w_1, \quad T = T_o + \varepsilon^2 T_1 \quad (20)$$

En introduisant les expressions (20) dans l'équation de l'énergie (13) et en ne gardant que les termes d'ordre  $\varepsilon^2$  on obtient:

$$\frac{\partial T_o}{\partial t} = w_o + \Delta_2 T_o + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \quad (21)$$

Le terme  $T_1$  de l'équation (21) doit aussi vérifier les conditions d'adiabaticité (1) sur les parois verticales :

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm \frac{1}{2} \quad (22)$$

En effectuant l'approximation de Hele-Shaw, nous affaiblissons le système d'équations de départ (9)-(13). Le système correspondant à l'approximation de Hele-Shaw (19-21) n'a besoin que de quatre conditions aux limites, sur les parois horizontales, au lieu de six. Celles qui conviennent sont celles qui correspondent au cas dit libre-libre [10]:

$$w_o = T_o = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (23)$$

La solution du système d'équations (19), (21), (22) et (23) est cherchée en modes normaux:

$$\begin{aligned} u_o &= \pi g(t) (y^2 - 1/4) \sin(\pi z) \exp(iqx) \\ w_o &= iq g(t) (y^2 - 1/4) \cos(\pi z) \exp(iqx) \\ T_o &= i q f(t) \cos(\pi z) \exp(iqx) \end{aligned} \quad (24)$$

Nous notons par  $q$  le nombre d'onde de la perturbation dans la direction de  $x$  et par  $f(t)$  et  $g(t)$  les amplitudes respectives de la température et du champ de vitesse. L'élimination de la pression des expressions (19) permet d'obtenir:

$$(\pi^2 + q^2)g(t) + \frac{q^2 Ra}{2} [1 + \alpha(\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)] f(t) = 0 \quad (25)$$

D'autre part, l'équation de l'énergie (21), associée à (22) permet d'obtenir:

$$\frac{df}{dt} + (\pi^2 + q^2)f(t) + \frac{1}{6} g(t) = 0 \quad (26)$$

Avec ces considérations, les équations (25) et (26) se réduisent à l'équation différentielle:

$$\frac{df}{dt} + \frac{h}{12} [R_o - Ra (1 + \alpha (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t))] f = 0 \quad (27)$$

$$\text{où} \quad h = \frac{r}{1+r}, \quad r = \frac{q^2}{\pi^2}, \quad R_o = \frac{12\pi^2 (r+1)^2}{r} \quad (28)$$

Le terme  $R_o$  est le nombre de Rayleigh gravitationnel correspondant à la courbe de stabilité marginale pour le cas d'une couche fluide confinée en cellule de Hele-Shaw, chauffée par le bas et en l'absence de modulation [11]. Les amplitudes de la température et du champ de vitesse sont données par:

$$f(t) = f_o e^{-\frac{h}{12} [(R_o - Ra)t + \alpha Ra \left( \frac{\cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t)}{\Omega_1 + \Omega_2} \right)]} \quad (29)$$

$$g(t) = -f_o \frac{h}{2} Ra (1 + \alpha (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)) e^{-\frac{h}{12} [(R_o - Ra)t + \alpha Ra \left( \frac{\cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t)}{\Omega_1 + \Omega_2} \right)]}$$

Lorsque la couche fluide est chauffée par le bas,  $Ra > 0$ , nous obtenons à partir des expressions  $f(t)$  et  $g(t)$  le critère de stabilité pour la première formulation:

$$Ra \leq R_o \quad (30)$$

Ce critère est le même que celui du cas non modulé où le seuil de convection correspond aux nombres de Rayleigh et d'onde critiques donnés par [11]:

$$Ra_c = 48\pi^2, \quad q_c = \pi \quad (31)$$

Au seuil de convection, les amplitudes de température et des vitesses sont données par:

$$f(t) = f_o e^{-2\pi^2 Fr \Omega_1^2 \left( \frac{\sin(\Omega_1 t) + \sin(\Omega_2 t)}{\Omega_1 + \Omega_2} \right)}$$

$$g(t) = -12\pi^2 f_o \left[ 1 + Fr \Omega_1^2 (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t) \right] e^{-2\pi^2 Fr \Omega_1^2 \left( \frac{\sin(\Omega_1 t) + \sin(\Omega_2 t)}{\Omega_1 + \Omega_2} \right)}$$

Nous concluons, pour cette première formulation que, lorsqu'un fluide occupant une cellule de Hele-Shaw possède un nombre de Prandtl,  $Pr = O(1)$  ou  $Pr \gg 1$ , les oscillations de la cavité ne peuvent générer d'instabilités paramétriques convectives. La raison physique à cela provient des grands frottements sur les parois verticales et qui contribuent à la suppression des termes inertiels dans l'équation de mouvement. Tout à fait la même situation a lieu dans un milieu poreux lorsque la loi de darcy est considérée.

### 3.2 Seconde Formulation: $\text{Pr} = O(\varepsilon^2)$

Dans cette formulation, le terme  $\partial V / \partial t$  persiste dans les équations de mouvement (10)-(12) lors de l'approximation de Hele-Shaw. Si on pose  $\text{Pr} = \varepsilon^2 \text{Pr}^*$  où  $\text{Pr}^* = O(1)$ , le système d'équations (9)-(13) s'écrit:

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial z} = 0 \quad (32)$$

$$\text{Pr}^{*-1} \frac{\partial u_o}{\partial t} = -\frac{\partial p_o}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} \quad (33)$$

$$\text{Pr}^{*-1} \frac{\partial w_o}{\partial t} = -\frac{\partial p_o}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + Ra [1 + \alpha(\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)] T_o \quad (34)$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial t} = w_o + \Delta_2 T_o + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \quad (35)$$

avec  $p_o(x, z, t)$  et  $T_o(x, z, t)$ . De façon similaire, l'équation de l'énergie est obtenue à l'ordre  $\varepsilon^2$  et le terme  $T_1$  vérifie les conditions d'adiabaticité (1). Nous utilisons le même type de solutions que celui donné par (24). Par la suite, l'équation de l'énergie reste la même que celle donnée par l'expression (26). En utilisant, l'équation (32), nous montrons que la composante  $v_o$  est nulle. Après avoir éliminé la pression des équations (33) et (34), nous effectuons le calcul de la moyenne, de l'équation obtenue, par rapport à la variable  $y$  appartenant à l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$ . Nous aboutissons alors à l'équation suivante:

$$\frac{dg}{dt} + 12 \text{Pr}^* g(t) + \frac{6q^2}{(\pi^2 + q^2)} \text{Pr}^* Ra [1 + \alpha(\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)] f(t) = 0 \quad (36)$$

Les équations (26) et (36) permettent d'obtenir l'oscillateur paramétrique correspondant à l'équation d'amplitude de la température:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2p \frac{df}{dt} + h \text{Pr}^* [R_o - Ra(1 + \alpha(\cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t)))] f = 0 \quad (37)$$

où  $2p = \pi^2 + q^2 + 12 \text{Pr}^*$ ,  $\alpha = Fr_1 \Omega_1^2$ . Les autres coefficients de l'équation (37) sont donnés par les expressions (28). Par le changement de variable,  $\tau = \Omega_1 t$ , l'équation (37) est réduite à l'équation de Mathieu quasi-périodique avec frottement similaire à celle étudiée par Rand et al. [12,13].

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + 2\mu \frac{df}{d\tau} + [\delta + \varepsilon(\cos(\tau) + \cos(\omega\tau))] f = 0 \quad (38)$$



$$\text{où} \quad 2\mu = 2p/\Omega_1, \quad \delta = -h \text{Pr}^* (R_o - Ra)/\Omega_1^2, \quad \varepsilon = -h \text{Pr}^* Fr_1 Ra, \quad \omega = \Omega_2/\Omega_1$$

Ici la théorie de Floquet n'est plus applicable pour déterminer les solutions de l'équation (38). Rand et al. [12,13] ont proposé la construction de solutions quasi-périodiques pour ce type d'équation. La construction de ces solutions nous permet de déterminer les courbes de stabilité marginale. Ces solutions sont données sous la forme, [12,13]:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ A_{n,m} \cos \frac{n+m\omega}{2} \tau + B_{n,m} \sin \frac{n+m\omega}{2} \tau \right] \quad (39)$$

Par la suite l'expression (39) est introduite dans l'équation (38). Les résultats que nous allons exploiter sont obtenus par une troncature des sommes infinies en considérant des sommes de 0 à  $N$  pour l'indice  $n$  et de  $-N$  à  $N$  pour l'indice  $m$ .

## 4. RESULTATS ET DISCUSSION

### 4.1 Cas: $N=1$ ( $n = 0,1$ et $m = -1, 0, 1$ )

En substituant l'équation (39) dans l'équation (38), on obtient deux systèmes algébriques homogènes d'ordre 5 en  $A_{n,m}$  et  $B_{n,m}$ , correspondants respectivement, à  $\sin \frac{n+m\omega}{2} \tau$  et à  $\cos \frac{n+m\omega}{2} \tau$ . Le système d'équations en  $A_{n,m}$  et  $B_{n,m}$  pour  $n = 0,1$  et  $m = -1, 0, 1$  correspondant à  $\cos \frac{n+m\omega}{2} \tau$  est donné par:

$$\begin{cases} (\delta - \omega^2/4 + \varepsilon/2)A_{o,1} + \mu\omega B_{o,1} = 0 \\ \delta A_{o,o} = 0 \\ (\delta - (1-\omega)^2/4)A_{1,1} + \mu(1-\omega)B_{1,-1} + \varepsilon A_{1,1} = 0 \\ (\delta - 1/4 + \varepsilon/2)A_{1,o} + \mu B_{1,o} = 0 \\ (\delta - (1+\omega)^2/4)A_{1,1} + \mu(1+\omega)B_{1,1} + \varepsilon A_{1,-1} = 0 \end{cases}$$

Le système en  $A_{n,m}$  et  $B_{n,m}$  pour  $n = 0,1$  et  $m = -1, 0, 1$  correspondant à  $\sin \frac{n+m\omega}{2} \tau$  est donné par:

$$\begin{cases} (\delta - \omega^2/4 - \varepsilon/2)B_{o,1} - \mu\omega A_{o,1} = 0 \\ \delta B_{o,o} = 0 \\ (\delta - (1-\omega)^2/4)B_{1,-1} - \mu(1-\omega)A_{1,-1} = 0 \\ (\delta - 1/4 - \varepsilon/2)B_{1,o} - \mu A_{1,o} = 0 \\ (\delta - (1+\omega)^2/4)B_{1,1} - \mu(1+\omega)A_{1,1} = 0 \end{cases}$$

Les coefficients  $A_{n,m}$  et  $B_{n,m}$  vérifient :

$$A_{-n,-m} = A_{n,m} \quad \text{et} \quad B_{-n,-m} = -B_{n,m} \quad (40)$$

En couplant les deux systèmes au dessus, on obtient le système en  $A_{n,m}$  suivant:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{o,o} \\ A_{1,-1} \\ A_{1,1} \\ A_{o,1} \\ A_{1,o} \end{pmatrix} = 0$$

avec:  $a_{1,1} = \delta$

$$a_{2,2} = \frac{(\delta - (1 - \omega)^2 / 4)^2 + \mu^2 (1 - \omega)}{\delta - (1 - \omega)^2 / 4},$$

$$a_{2,3} = \varepsilon$$

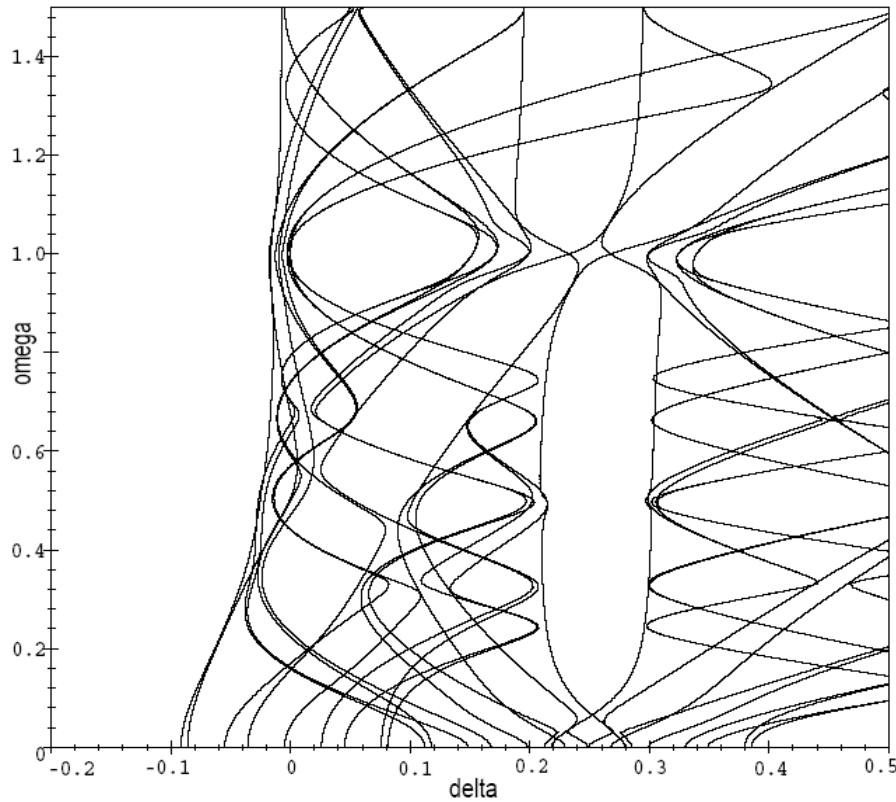
$$a_{3,2} = \varepsilon,$$

$$a_{3,3} = \frac{(\delta - (1 + \omega)^2 / 4)^2 + \mu^2 (1 + \omega)}{\delta - (1 + \omega)^2 / 4}$$

$$a_{4,4} = \frac{(\delta - \omega^2 / 4)^2 - \varepsilon^2 / 4 + \mu^2 \omega^2}{\omega^2 / 4 - \delta + \varepsilon / 2},$$

$$a_{5,5} = \frac{(\delta - 1/4)^2 - \varepsilon^2 / 4 + \mu^2}{\delta - 1/4 - \varepsilon / 2}$$

Pour chaque  $N$ , la dimension du système obtenu est  $2N^2 + 2N + 1$ . L'analyse est facilitée, dans la suite, en mettant le système dans sa forme triangulaire supérieure. Ce système admet des solutions non nulles si et seulement si le déterminant associé est nul. Pour la validation de nos calculs, nous avons reproduit la carte de stabilité de l'équation de Mathieu quasi-périodique dans le plan  $(\delta, \omega)$  obtenue par Rand et al. [12,13], pour  $N = 4$ ,  $\varepsilon = 0.1$  et  $\mu = 0$  (voir figure 2). Dans notre problème physique, nous rappelons que le déterminant annulé peut être écrit sous forme formelle de la façon suivante :  $F(Ra, q, Pr, Fr_1, \Omega_1, \omega) = 0$ . Nous nous sommes intéressés aux courbes traduisant l'évolution des nombres de Rayleigh critique,  $Ra_c$ , et d'onde critique,  $q_c$ , en fonction de la fréquence adimensionnelle  $\Omega_1$ .



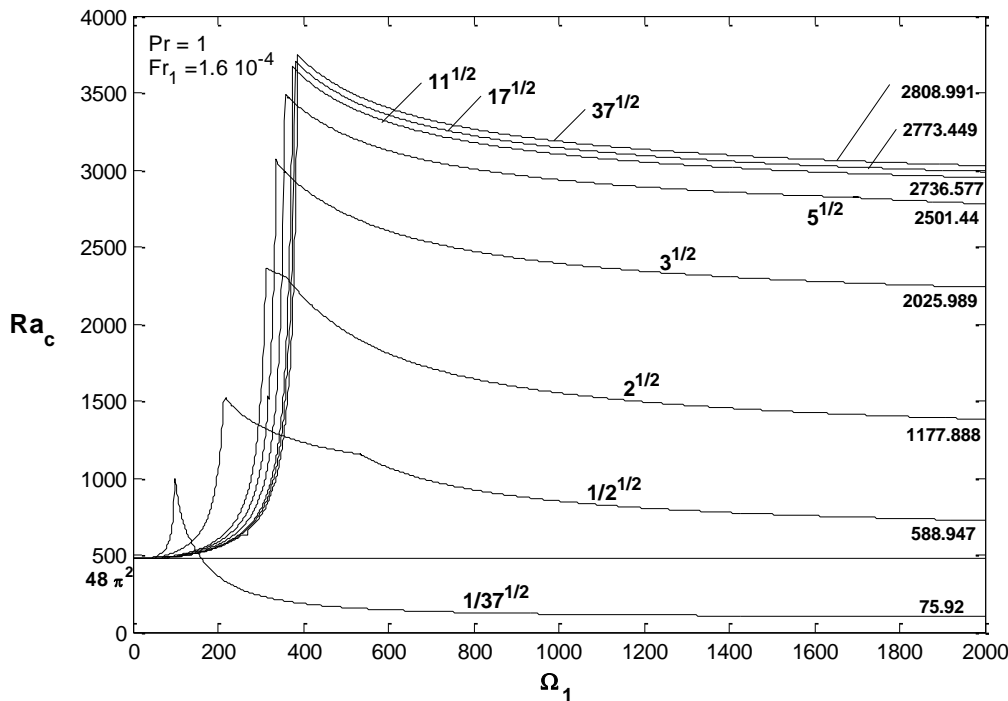
**Figure 2:** Carte de stabilité de l'équation de Mathieu quasi-périodique dans le plan  $(\delta, \omega)$  pour  $N = 4$ ,  $\varepsilon = 0.1$  et  $\mu = 0$

Sur la figure 3, nous présentons l'évolution du nombre de Rayleigh critique,  $Ra_c$ , en fonction de la fréquence adimensionnelle,  $\Omega_1$ , pour  $Pr^* = 1$  et  $Fr_1 = 1.6 \cdot 10^{-4}$  et pour différentes valeurs du rapport  $\omega$ . Contrairement aux courbes correspondant à  $\omega = 1/\sqrt{2}$ ,  $\omega = \sqrt{2}$ ,  $\omega = \sqrt{3}$ ,  $\omega = \sqrt{5}$ ,  $\omega = \sqrt{11}$ ,  $\omega = \sqrt{17}$  et  $\omega = \sqrt{37}$  où on est toujours en présence d'un effet stabilisant, la courbe correspondant à  $\omega = 1/\sqrt{37}$ , donne lieu à deux effets stabilisant et déstabilisant. Notons que pour une fréquence fixée,  $\Omega_1$ , le nombre de Rayleigh critique,  $Ra_c$  croît avec  $\omega$  et donc l'effet stabilisant augmente. Également, pour les hautes fréquences, les valeurs asymptotiques du nombre de Rayleigh critique augmentent avec  $\omega$ . Ces résultats suggèrent que le seuil de convection est bien contrôlé par la variation du rapport des fréquences  $\omega$ .

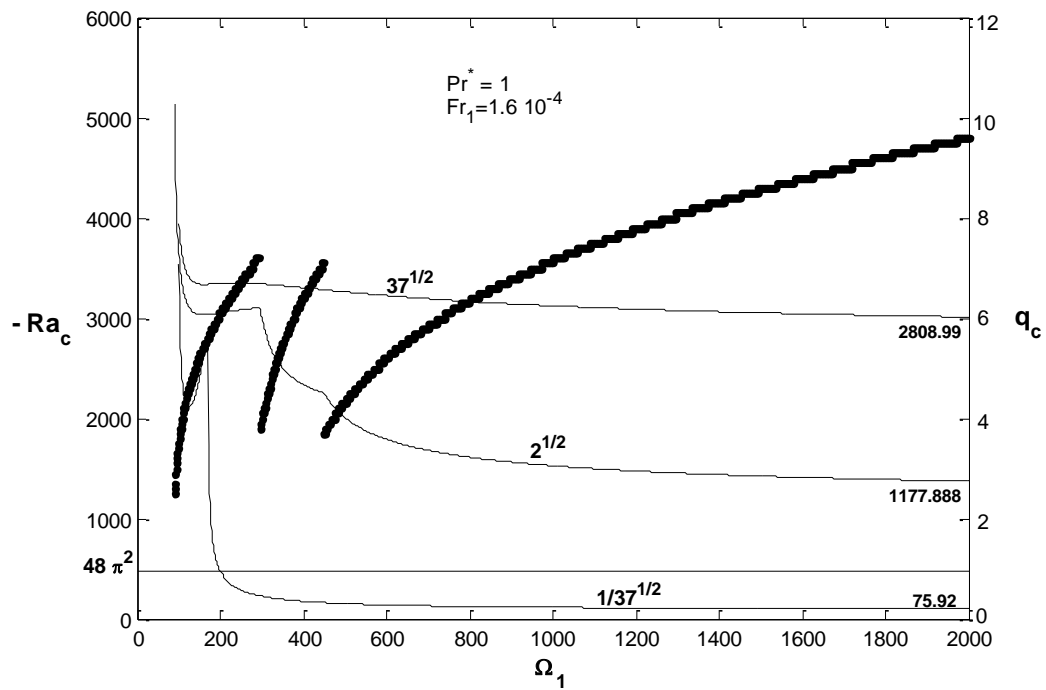
Sur la figure 4, nous présentons les résultats correspondant au cas où la couche fluide est chauffée par le haut ( $Ra < 0$ ) pour les valeurs:  $Pr^* = 1$ ,  $Fr_1 = 1.6 \cdot 10^{-4}$  et pour les valeurs de  $\omega = 1/\sqrt{37}$ ,  $\omega = \sqrt{2}$ , et  $\omega = \sqrt{37}$ . La configuration stable devient potentiellement instable pour les hautes fréquences et stable pour les basses fréquences. En effet, pour chaque rapport de fréquence,  $\omega$ , lorsque  $\Omega_1$  tend vers zéro, le nombre de Rayleigh critique tend vers de grandes valeurs (configuration d'équilibre stable); ce nombre décroît pour atteindre une valeur asymptotique lorsque  $\Omega_1$  tend vers les hautes fréquences. Nous remarquons aussi que le nombre de Rayleigh critique diminue avec le rapport

de fréquences. Notons que pour  $\omega = 1/\sqrt{37}$ , l'instabilité convective se déclenche avec des nombres de Rayleigh critiques inférieurs à ceux du cas non modulé relatif à un chauffage par le bas. Concernant l'évolution du nombre d'onde critique,  $q_c$ , celle-ci donne lieu à deux sauts en  $\Omega_1 = 296$  et  $\Omega_1 = 448$ .

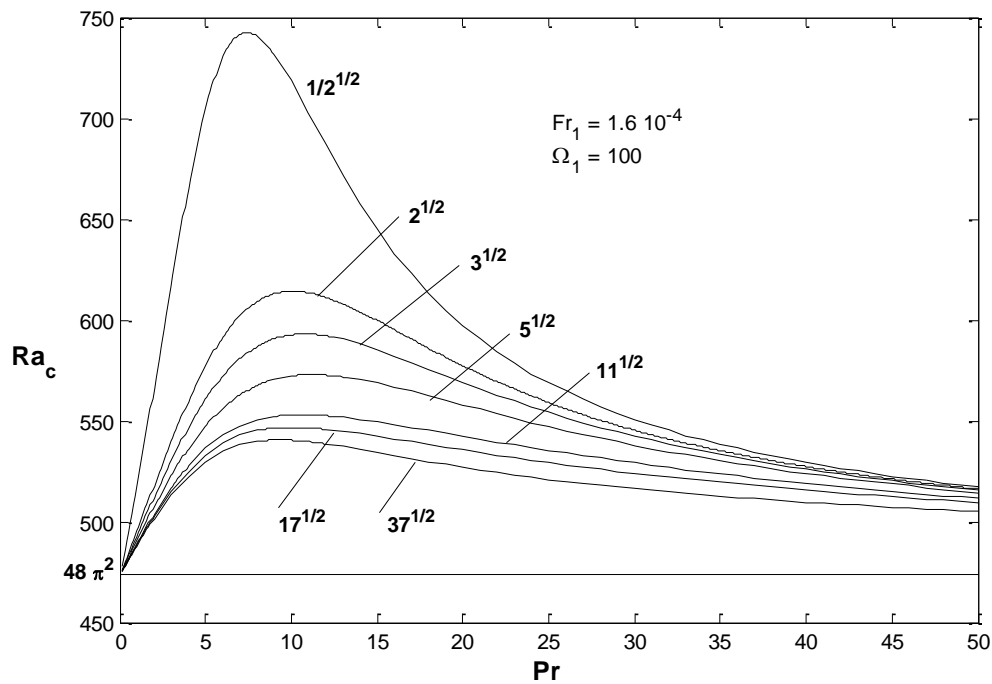
Finalement, la figure 5 illustre pour  $Fr_1 = 1.6 \cdot 10^{-4}$  et  $\Omega_1 = 100$ , l'évolution du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Prandtl  $Pr^*$  pour différentes valeurs du rapport des fréquences,  $\omega$ . On observe sur la figure 5, que le nombre de Rayleigh critique, correspondant au maximum de stabilisation, décroît quand le rapport des fréquences  $\omega$  augmente et donc l'effet stabilisant s'atténue avec  $\omega$ . Le nombre de Prandtl correspondant à la valeur maximale de  $Ra_c$  croît de la valeur  $Pr^* = 9.3$  pour  $\omega = 1/\sqrt{37}$  à la valeur  $Pr^* = 11.2$  pour  $\omega = \sqrt{5}$  et décroît vers la valeur  $Pr^* = 7.4$  pour  $\omega = 1/\sqrt{2}$ . Cependant, pour les grandes valeurs du nombre de Prandtl,  $Pr^*$ , le nombre de Rayleigh critique,  $Ra_c$ , pour toutes les valeurs de  $\omega$ , tend vers la valeur du cas non modulé,  $Ra_c = 48\pi^2$ . En effet, dans cette situation, le terme d'inertie qui est à l'origine de l'instabilité paramétrique,  $Pr^{-1} \partial/\partial t$ , disparaît des équations de mouvement (10) et (12).



**Figure 3** : Chauffage par le bas ( $Ra > 0$ ) - Evolution du nombre de Rayleigh critique,  $Ra_c$ , en fonction de la fréquence adimensionnelle,  $\Omega_1$ , pour  $Pr^* = 1$  et  $Fr_1 = 1.6 \cdot 10^{-4}$  et pour différentes valeurs du rapport  $\omega$ .



**Figure 4** : Chauffage par le haut ( $Ra < 0$ ) - Evolution de la valeur absolue du nombre de Rayleigh critique,  $Ra_c$ , et du nombre d'onde critique,  $q_c$ , en fonction de la fréquence adimensionnelle,  $\Omega_1$ , pour  $Pr^* = 1$  et  $Fr_1 = 1.6 \cdot 10^{-4}$  et pour les valeurs de  $\omega = 1/\sqrt{37}$ ,  $\omega = \sqrt{2}$  et  $\omega = \sqrt{37}$ .



**Figure 5** : Chauffage par le bas ( $Ra > 0$ ) - Evolution du nombre de Rayleigh critique,  $Ra_c$ , en fonction du nombre de Prandtl,  $Pr^*$ , pour  $\Omega_1 = 100$ ,  $Fr_1 = 1.6 \cdot 10^{-4}$  et pour différentes valeurs de  $\omega$ .

## 5. CONCLUSION

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'influence de la modulation gravitationnelle quasi-périodique sur le seuil d'instabilité convectif au sein d'une couche fluide confinée dans une cellule de Hele-Shaw et soumise à un gradient de température constant de même sens ou de sens opposé à la pesanteur. Un choix de grandeurs caractéristiques approprié aux problèmes de convection en cellule de Hele-Shaw suivi d'une analyse asymptotique, nous ont permis de faire la distinction entre deux formulations linéaires, chacune dépendant de l'ordre de grandeur du nombre de Prandtl. Lorsque le nombre de Prandtl est de l'ordre de l'unité ou très supérieur à l'unité (eau, huiles, liquides magnétiques...), les oscillations quasi-périodiques n'ont ni un effet stabilisant ni un effet déstabilisant. Nous avons le même critère de stabilité que celui du cas non modulé. Néanmoins, les amplitudes du champ de vitesse et de température, que nous avons obtenues de façon analytique, sont quasi-périodiques. Pour des liquides à faible nombre de Prandtl (métaux liquides: mercure...), le système d'équations régissant le mouvement de convection se réduit à un oscillateur paramétrique linéaire correspondant à l'équation de Mathieu quasi-périodique avec un terme de frottement. Par la suite, la méthode des balances harmoniques [12, 13] nous a permis de déterminer un critère de stabilité. L'effet du rapport des fréquences  $\omega = \Omega_2 / \Omega_1 = \omega_2 / \omega_1$  sur le seuil de convection a été observé pour une couche fluide chauffée par le bas et pour le cas d'un chauffage par le haut. Nous avons montré que la modulation avec deux fréquences incommensurables produit un effet stabilisant ou déstabilisant selon le rapport des fréquences  $\omega$ . Il s'avère que ce rapport joue un rôle important pour contrôler l'instabilité au seuil de convection. L'effet du nombre de Prandtl a été aussi étudié pour  $\Omega_1 = 100$  et pour différentes valeurs de  $\omega$ ; dans cette dernière analyse, on a montré que la modulation quasi-périodique de la pesanteur a un effet stabilisant dépendant fortement de  $\omega$ .

## REFERENCES

1. S. Aniss, M. Souhar and M. Belhaq, "Asymptotic study of the convective parametric instability in hele-shaw cell," *Phys. Fluids, A* 12, pp. 262-268 (2000).
2. S. Aniss, M. Belhaq, M. Souhar and M. G. Velarde, "Asymptotic study of Rayleigh-Bénard convection under time periodic heating in hele-shaw cell," *Phys. Scr.*, 71, pp. 395-401 (2005).
3. T. Boulal, S. Aniss, M. Belhaq and R. Rand, "Effect of quasi-periodic gravitational modulation on the stability of a heated fluid layer", *Phys. Rev. E*, 76 (52), pp. 2-5 (2007).
4. J. W. Elder, "Steady free convection in a porous medium heated from below," *J. Fluid Mech.*, 27, pp. 29-48 (1967).
5. M. A. Combarous and S. A. Bories, "Hydrothermal convection in saturated porous media," *Advances in Hydroscience*, Academic Press, pp. 231-307 (1975).
6. [6] B. K. Hartline and C. R. B. Lister, "Thermal convection in hele-shaw cell," *J. Fluid Mech.*, 79, pp. 379-389 (1977).
7. B. K. Hartline and C. R. B. Lister, "An experiment to verify the permeability of hele-shaw cells," *Geophys. Res. Lett*, 5, p. 225-227 (1978).
8. O. Kvernfold, "On the stability of non linear convection in hele-shaw cell," *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 22, pp. 395-400 (1979).
9. O. Kvernfold and P. A. Tyvand, "Nonlinear thermal convection in anisotropic porous media," *J. Fluid Mech.*, p. 673 (1980).
10. S. Aniss, M. Souhar and J. P. Brancher, "Asymptotic study and weakly non linear analysis at the onset of Rayleigh-Bénard convection in hele-shaw cell," *Phys. Fluids*, 7, (5), pp. 926-934 (1995).

11. S. Aniss, "Instabilités convectives en cellule de hele-shaw, Cas d'un liquide magnétique," Thèse INPL, Nancy (1993).
12. R. Rand and R. Hastings, "A quasi-periodic Mathieu equation", Design Engineering Conferences 84-1, **3** PartA, ASME, pp. 747-758 (1995).
13. R.S. Zounes and R. Rand, "Transition curves for the quasi-periodic Mathieu equation", SIAM J. Appl. Math **58**, No. 4, pp. 1094-1115.