

Approche micromécanique du phénomène de rétention d'eau dans un milieu granulaire polydispense

J.P. Gras

LMGC, UMR CNRS 5508, Cc. 048, Université Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, 34095

J.Y. Delenne

LMGC, UMR CNRS 5508, Cc. 048, Université Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, 34095

M.S. El Youssoufi

LMGC, UMR CNRS 5508, Cc. 048, Université Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, 34095

Résumé

On s'intéresse à la répartition de l'eau et à la relation entre la succion et la teneur en eau dans les milieux granulaires. On se focalise sur le domaine pendulaire. Pour une pression capillaire (ou succion) donnée, une modélisation locale permet d'accéder à la forme et au volume d'un pont capillaire entre deux grains sphériques de différents diamètres. La modélisation locale est ensuite utilisée dans le cadre d'une approche par éléments discrets pour déterminer le volume d'eau total pour une succion donnée d'un échantillon composé de dix mille grains. Ensuite les courbes de rétention sont construites. Au niveau local, trois méthodes sont utilisées pour modéliser le pont liquide. Les deux premières méthodes sont basées sur l'approximation toroïdale. La troisième méthode est basée sur la résolution de l'équation différentielle qui définit la forme du pont liquide. La sensibilité de la courbe de rétention aux différents paramètres géométriques (distribution granulométrique et compacité) et aux paramètres physiques (tension superficielle, angle de contact) est étudiée. Finalement, les courbes de rétention obtenues par cette approche numérique sont comparées aux courbes de rétention obtenues expérimentalement sur des billes de verres.

Abstract

We investigate the water distribution and the link between suction and water content in granular media. We focus our study on the pendular state. For a given suction, a local model calculates the shape and the volume of the liquid bridge between two particles of unequal sizes. This local behaviour is then used in a discrete element study to determine the water distribution and the water content associated with a given suction of a sample composed of ten thousands grains. Then retention curves of the granular media are built. At the local scale, three different methods are used to modelise the liquid bridge. The first two methods are based on the toroidal approximation. The third method is based on the integration of the differential equation that defines the liquid bridge shape. A parametric study is made to bring to light the effect of macroscopic parameters (grain-size distribution and solid fraction) and physical parameters (liquid/air surface tension, contact angle) on the water retention curve. Finally, numerical data are compared to experimental results on glass beads.

1. INTRODUCTION

De récents travaux sur les forces de capillarité dans un milieu granulaire humide ont souligné le rôle joué par les interactions capillaires dans la cohésion macroscopique du milieu [1,2]. Ils ont montré notamment que si la quantité d'eau présente dans le milieu a une influence sur son comportement

mécanique, c'est plus le nombre de ponts capillaires par grain qui va jouer le rôle prépondérant dans ce comportement [2]. Dans ces études, le volume de chaque pont liquide est déterminé à partir de considérations géométriques, et notamment les rayons des grains. Dans cette étude, une estimation plus précise du volume du pont liquide est faite qui dépend de la succion. La relation entre la teneur en eau et la succion ou courbe de rétention d'eau qui est d'un grand intérêt en géotechnique peut par la suite être modélisée. Quelques auteurs ont déjà essayé de construire des courbes de rétention pour des échantillons monodisperses [3,4]. L'objet de cette communication se limite à la présentation du modèle de construction de la courbe de rétention de milieux granulaires polydisperses dans le domaine pendulaire. Les résultats numériques seront comparés aux résultats expérimentaux obtenus sur un milieu modèle constitué de billes de verre.

2. ETUDE DE LA RETENTION D'EAU A L'ECHELLE LOCALE

On s'intéresse à l'aspect local à travers l'étude du pont liquide formé entre deux grains sphériques. Pour différentes caractéristiques géométriques du doublet de grains (rayons R_1 et R_2 des grains, distance intergranulaire D) et pour différentes caractéristiques physiques (angle de mouillage θ , tension superficielle σ), on étudie l'influence de la succion sur la forme et le volume du pont liquide. On utilise 3 méthodes différentes : une première méthode utilisant la loi de capillarité proposée par Soulié [1], une seconde méthode basée sur la loi de Laplace relative à la capillarité, une troisième méthode basée sur l'intégration de l'équation différentielle régissant la forme du pont liquide. Dans les deux premières méthodes, on utilise l'approximation toroïdale.

2.1 Approximation toroïdale

La forme du pont liquide est un ménisque dont la courbure extérieure est un cercle (voir figure 1). Cette modélisation ne respecte pas la loi de Laplace dans tout le pont liquide. En effet, la loi de Laplace stipule que la pression est la même dans tout le pont liquide. Dans le cas de l'approximation toroïdale, la pression n'est pas la même dans tout le pont car le rayon de courbure externe est constant. Dans notre cas, la loi de Laplace est appliquée au niveau du rayon de gorge. Cette méthode a déjà été utilisée pour des simulations de traction sur pont liquide à volume constant et a donné des résultats très concluants [5]. Néanmoins, elle sous-estime la valeur de la force capillaire, mais l'écart maximal entre la solution exacte et la solution issue de l'approximation toroïdale est inférieur à 10% [5].

On choisit R_1 inférieur R_2 et on définit $r = \frac{R_1}{R_2}$.

D'après des considérations géométriques, on peut établir les expressions du rayon de gorge (équations 2 et 3) et l'expression du rayon de courbure extérieur (équation 5). Afin de calculer le rayon de gorge, on calcule la hauteur $\rho + h$ à laquelle on soustrait ρ .

$$\rho + h = \rho \sin(\delta_1 + \theta) + R_1 \sin \delta_1 = \rho \sin(\delta_2 + \theta) + R_2 \sin \delta_2 \quad (1)$$

$$h = \rho [\sin(\delta_1 + \theta) - 1] + R_1 \sin \delta_1 \quad (2)$$

$$h = \rho [\sin(\delta_2 + \theta) - 1] + R_2 \sin \delta_2 \quad (3)$$

Afin de calculer, le rayon de gorge on calcule l'expression de la valeur de la distance intergranulaire D et ensuite on isole ρ .

$$\frac{D}{R_2} = \frac{\rho}{R_2} [\cos(\delta_1 + \theta) + \cos(\delta_2 + \theta)] + r(\cos \delta_1 - 1) + (\cos \delta_2 - 1) \quad (4)$$

$$\rho = \frac{D - R_1(\cos \delta_1 - 1) - R_2(\cos \delta_2 - 1)}{\cos(\delta_1 + \theta) + \cos(\delta_2 + \theta)} \quad (5)$$

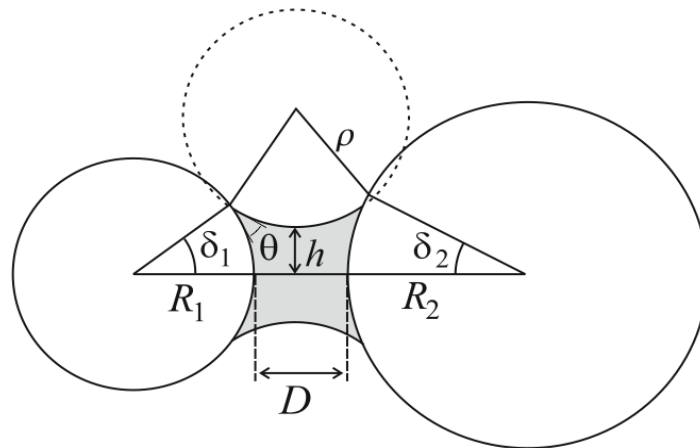


Figure 1 : Géométrie du pont liquide

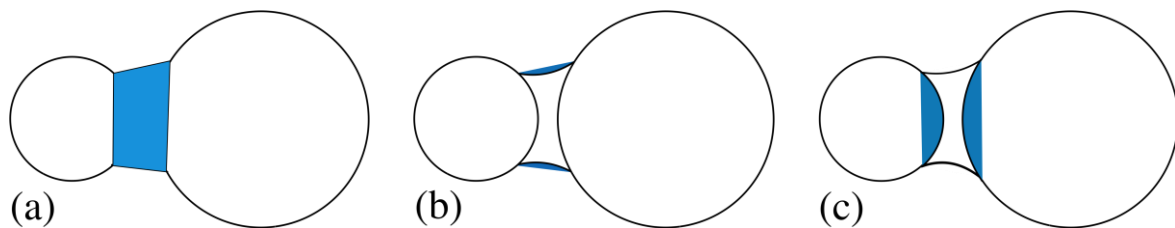


Figure 2 : (a) Volume du tronc de cône V_{tc} , (b) Volume du tore V_{tore} , (c) Volume des calottes sphériques V_{c1} et V_{c2}

Le volume du pont liquide est déterminé à partir du volume du tronc de cône noté V_{tc} , du volume du tore compris entre le tronc de cône précédent et le pont liquide noté V_{tore} et des volumes des deux

calottes sphériques correspondant aux deux angles de remplissage δ_1 et δ_2 , notés V_{c1} et V_{c2} . Ces différents volumes sont décrits sur la figure 2.

Le volume du pont liquide V est donc donné par :

$$V = V_{tc} - V_{toire} - V_{c1} - V_{c2} \quad (6)$$

Avec :

$$V_{tc} = \frac{\pi}{3} R_2^3 \left[r(1 - \cos \delta_1) + D^* + 1 - \cos \delta_2 \right] \left[\sin^2 \delta_2 + r \sin \delta_1 \sin \delta_2 + r^2 \sin^2 \delta_1 \right]$$

$$V_{toire} = 2\pi \left[\rho + h - \frac{2}{3} \frac{\rho \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)} \cos \left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \right) \right] \left[\frac{1}{2} \rho^2 (\alpha - \sin \alpha) \right]$$

$$V_{c1} = \frac{\pi}{6} R_1^3 (1 - \cos \delta_1) \left(3 \sin^2 \delta_1 + (1 - \cos \delta_1)^2 \right)$$

$$V_{c2} = \frac{\pi}{6} R_2^3 (1 - \cos \delta_2) \left(3 \sin^2 \delta_2 + (1 - \cos \delta_2)^2 \right)$$

Ensuite, afin de relier la succion à la forme et au volume du pont liquide, on utilise deux méthodes :

Méthode utilisant la loi de Soulié

La force capillaire F_{cap} engendrée par le pont liquide est directement liée à la géométrie du pont liquide. Cette force résulte de la combinaison de deux forces : la tension superficielle du liquide σ et la différence de pression $\Delta p = p_a - p_w$ entre la phase gazeuse (p_a) et la phase liquide du pont (p_w). Cette différence est appelée pression capillaire ou encore succion s à l'échelle locale. La force capillaire est exprimée au niveau de la plus petite section du pont liquide (au niveau du rayon de gorge h) par [6]:

$$F_{cap} = 2\pi h \sigma + \pi h^2 s \quad (7)$$

$$s = 2 \frac{(F_{cap} - \underline{h}) \sigma}{(\underline{h})^2 R_2} \quad (8)$$

Soulié a proposé une expression explicite de la force capillaire [1]:

$$\underline{F}_{cap} = \frac{\sqrt{r}}{2} (c + \exp(a\underline{D} + b)) \quad (9)$$

où :

$$\begin{aligned} a &= -1,1(\underline{V})^{-0.53} \\ b &= (-0,148\ln(\underline{V}) - 0,96)\theta^2 - 0,0082\ln(\underline{V}) + 0,48 \\ c &= 0,0018\ln(\underline{V}) + 0,078 \end{aligned}$$

Avec :

$$\underline{F}_{cap} = \frac{F_{cap}}{2\pi\sigma R_2}, \quad \underline{h} = \frac{h}{R_2}, \quad \underline{D} = \frac{D}{R_2}, \quad \underline{V} = \frac{V}{R_2^3}, \quad r = \frac{R_1}{R_2}$$

Cette expression est en accord avec les résultats expérimentaux de Willet et al.[7] et Soulié et al [1]. A partir de considérations géométriques et des équations 8 et 9, on peut calculer numériquement le volume du pont liquide pour une succion donnée. On peut également avoir accès à de nombreuses informations telles que les valeurs du rayon de gorge, du rayon de courbure externe et des angles de remplissage. Dans l'article, les expressions soulignées correspondent aux formes adimensionnées.

Méthode utilisant la loi de Laplace

Le théorème de Laplace établit que le saut de pression Δp qui se produit quand on traverse la surface de séparation de deux fluides, est égal au produit de la tension superficielle σ par la courbure de la surface $C = \frac{1}{\rho_{int}} + \frac{1}{\rho_{ext}}$. ρ_{int} et ρ_{ext} sont les rayons de courbure algébriques de la surface. Dans notre cas, $\rho_{int} = -h$, $\rho_{ext} = \rho$ et la forme du pont liquide présente des courbures inversées. L'expression de Laplace est définie par l'équation suivante :

$$\Delta p = s = \sigma \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{h} \right) \quad (10)$$

Comme ρ et h sont des fonctions de l'angle de remplissage δ_1 , on peut déterminer numériquement δ_1 pour une succion donnée et en déduire le volume du pont liquide.

2.2 Méthode basée sur l'intégration de l'équation différentielle

Dans ce cas, la courbure extérieure du pont liquide n'est plus un cercle (voir figure 3), c'est la courbure qui correspond à la surface d'énergie minimale.

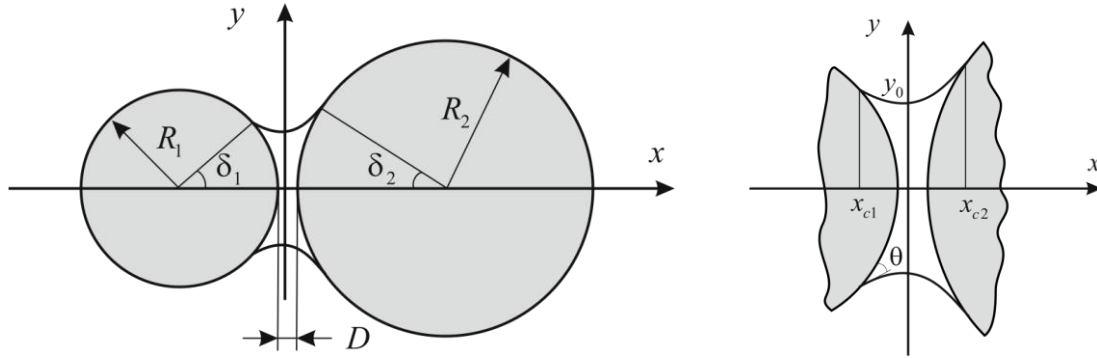


Figure 3 : Représentation géométrique du pont liquide entre deux particules de tailles différentes d'après Soulié [1].

Elle est donnée par la résolution numérique de l'équation différentielle 11. Soulié [1] a montré que l'équation différentielle adimensionnée qui régit la forme du pont liquide se présente sous la forme :

$$H \underline{y}(\underline{x}) + \sigma \frac{1 + \underline{y}'^2(\underline{x}) - \underline{y}(\underline{x}) \underline{y}''(\underline{x})}{(1 + \underline{y}'^2(\underline{x}))^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (11)$$

Avec

$$\underline{x} = \frac{x}{R_2}, \quad \underline{y} = \frac{y}{R_2}, \quad \underline{y}'(\underline{x}) = \dot{y}(x), \quad \underline{y}''(\underline{x}) = R_2 \ddot{y}(x) \text{ et } H = \frac{sR_2}{\sigma}.$$

A partir des conditions aux limites au niveau du rayon de gorge et des conditions de contact au niveau de la ligne triple, on peut résoudre numériquement cette équation en cherchant une solution de forme polynomiale. On s'aperçoit que la solution de cette équation différentielle est un polynôme formé uniquement de puissances paires. Le volume du pont liquide est ensuite donné par :

$$\underline{V} = \pi \int_{\underline{x}_{c2}}^{\underline{x}_{c1}} \underline{y}^2(\underline{x}) d\underline{x} - \underline{V}_1 - \underline{V}_2 \quad (12)$$

\underline{x}_{c1} et \underline{x}_{c2} sont les abscisses pour lesquelles le pont liquide rentre respectivement en contact avec le grain 1 et le grain 2. \underline{V}_1 et \underline{V}_2 désignent les volumes adimensionnés des portions de grains solides recouvertes par le pont liquide. Ces portions mouillées sont des calottes sphériques de volumes respectifs [1] :

$$\underline{V}_j = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R_j}{R_2} \right)^3 (1 - \cos \delta_j)^2 (2 + \cos \delta_j) \quad j = 1, 2 \quad (13)$$

On peut calculer la distance intergranulaire par [1]:

$$\underline{D} = \underline{x}_{c2} - (1 - \cos \delta_2) - \underline{x}_{c1} - r(1 - \cos \delta_1) \quad (14)$$

On peut par la suite calculer numériquement le volume du pont liquide pour une configuration géométrique et une succion données.

2.3 Résultats de l'étude locale

Dans un premier temps, on étudie le pont liquide à succion constante. Connaissant R_1, R_2, D, s , on peut déterminer les angles de remplissage δ_1, δ_2 , et le volume du pont correspondant. L'intérêt de cette méthode est de pouvoir considérer un échantillon de grains (compacité, taille des grains) à une succion donnée et de répartir l'eau dans celui-ci en calculant le volume d'eau présent dans chaque doublet de l'échantillon. Les résultats sont explicités sur la figure 4. Cette figure donne les variations du volume du pont liquide en fonction de la distance intergranulaire pour différentes succions avec les trois méthodes. Les résultats sont du même ordre de grandeur et les écarts diminuent avec l'augmentation de la succion. La courbe correspondant à la méthode de Soulié n'a pas le même comportement que les courbes issues des deux autres méthodes. En effet, cette courbe est monotone décroissante alors que les deux autres sont croissantes puis décroissantes. On remarque un brusque saut du volume à partir d'une certaine valeur de D . Cette distance est considérée comme la distance de rupture du pont liquide et est notée $D_{ruptCrit}$.

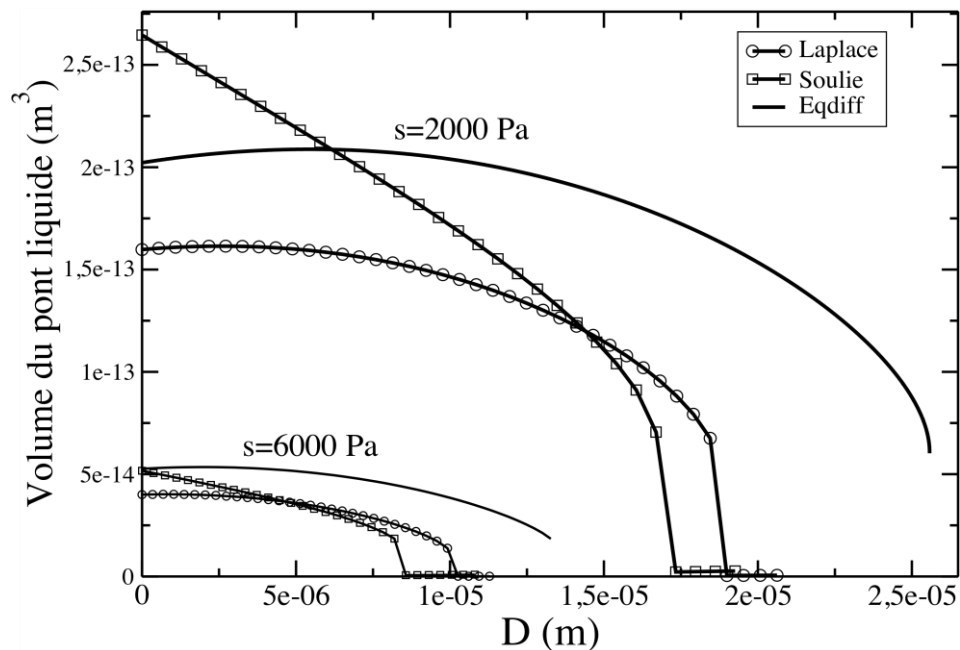


Figure 4 : Volume du pont liquide en fonction de la distance interparticulaire pour une succion donnée et pour deux grains de rayons $100\mu\text{m}$ et $200\mu\text{m}$ ($\sigma = 0.073 \text{ N/m}$, $\theta = 0$).

3. ETUDE NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE DE LA RETENTION D'EAU

On construit un échantillon par la méthode D.E.M. [8] et le code de calcul réalisé par Richefeu [2]. Il s'agit d'un échantillon cylindrique composé de 10000 grains. A ce stade, on dispose de la porosité, du volume et de la masse sèche. Cet échantillon est composé d'une série de doublets où un pont capillaire est susceptible d'exister. Numériquement, on connaît le nombre de doublets, directement lié au nombre de contacts et à la succion (pour ce qui concerne les doublets créés pour une distance interparticulaire différente de zéro). Pour une succion donnée, on affecte le volume du pont liquide correspondant à chaque doublet. Ce volume dépend des rayons des grains du doublet, de la distance interparticulaire et des paramètres physiques (σ, θ). En sommant les volumes de tous ces ponts liquides, on peut déterminer la teneur en eau pour une succion donnée. Si on réitère cette opération pour différentes valeurs de la succion, on peut représenter la courbe de rétention de l'échantillon numérique. L'hypothèse de base de cette approche consiste à considérer qu'à l'équilibre la succion est homogène dans tout l'échantillon. Certains résultats de la littérature semblent corroborer cette hypothèse [9].

On peut par la suite étudier qualitativement la sensibilité des courbes de rétention aux différents paramètres physiques et géométriques (figure 5). Ces paramètres influencent fortement la courbe de rétention. On remarque que la rétention d'eau diminue avec l'augmentation de la taille des grains et de l'angle de contact. Au contraire la rétention d'eau augmente avec l'augmentation de la tension superficielle et de la distance de rupture choisie. L'influence mutuelle de l'angle de contact et de la distance de rupture sur la rétention d'eau peut expliquer l'hystérésis de la courbe de rétention entre le comportement au mouillage et le comportement au séchage. En effet, on peut supposer que lors d'une phase de mouillage, des ponts capillaires se forment et existent uniquement au contact (ce qui correspond à $D_{rupt} = 0$). De plus, il est possible que l'angle de mouillage soit supérieur durant la phase de mouillage que durant la phase de séchage si l'on se réfère à une goutte se déplaçant sur une surface. Ces deux effets expliquent la diminution de la rétention d'eau relative à la phase de mouillage.

Afin de tester la validité de la modélisation proposée, une étude expérimentale de la rétention d'eau a été réalisée. Elle a porté sur un milieu granulaire composé de billes de verre (masse volumique égale à 2600 kg/m^3). Les billes de verre sont tamisées afin de contrôler leur granulométrie. Pour les essais expérimentaux, on réalise deux échantillons avec un diamètre des billes compris respectivement entre $500 \mu\text{m}$ et $630 \mu\text{m}$, et entre $100 \mu\text{m}$ et $200 \mu\text{m}$. Le principe des expériences consiste à imposer différentes pressions d'eau négatives au milieu granulaire préalablement saturé d'eau et à attendre que celui-ci se désature jusqu'à une teneur en eau d'équilibre. Lorsque l'équilibre est atteint, on connaît la valeur de la succion et on déduit la teneur en eau par pesée de l'échantillon. On dispose donc du couple (w, s) pour chaque pression d'eau imposée. Pour ce qui concerne les succions plus élevées (à partir de 40 kPa), on utilise un banc de sorption à humidité relative contrôlée. Le banc de sorption a été utilisé uniquement pour l'échantillon dont le diamètre des billes est compris entre $500 \mu\text{m}$ et $630 \mu\text{m}$.

Pour chaque échantillon, les calculs de la succion d'entrée d'air et de la teneur en eau correspondant à la limite de coalescence permettent d'étendre la modélisation au régime funiculaire. La succion d'entrée d'air est calculée en supposant que ce sont les plus gros pores qui se vident en premier [10]. A partir d'un critère basé sur les angles de remplissage des ponts, il est possible d'évaluer la teneur en eau à partir de laquelle les ponts se touchent (limite de coalescence). On peut ainsi construire la courbe de

rétenion. La courbe de rétenion obtenue expérimentalement est ensuite comparée à la courbe de rétenion d'un échantillon numérique aussi similaire que possible à l'échantillon testé expérimentalement (figure 6).

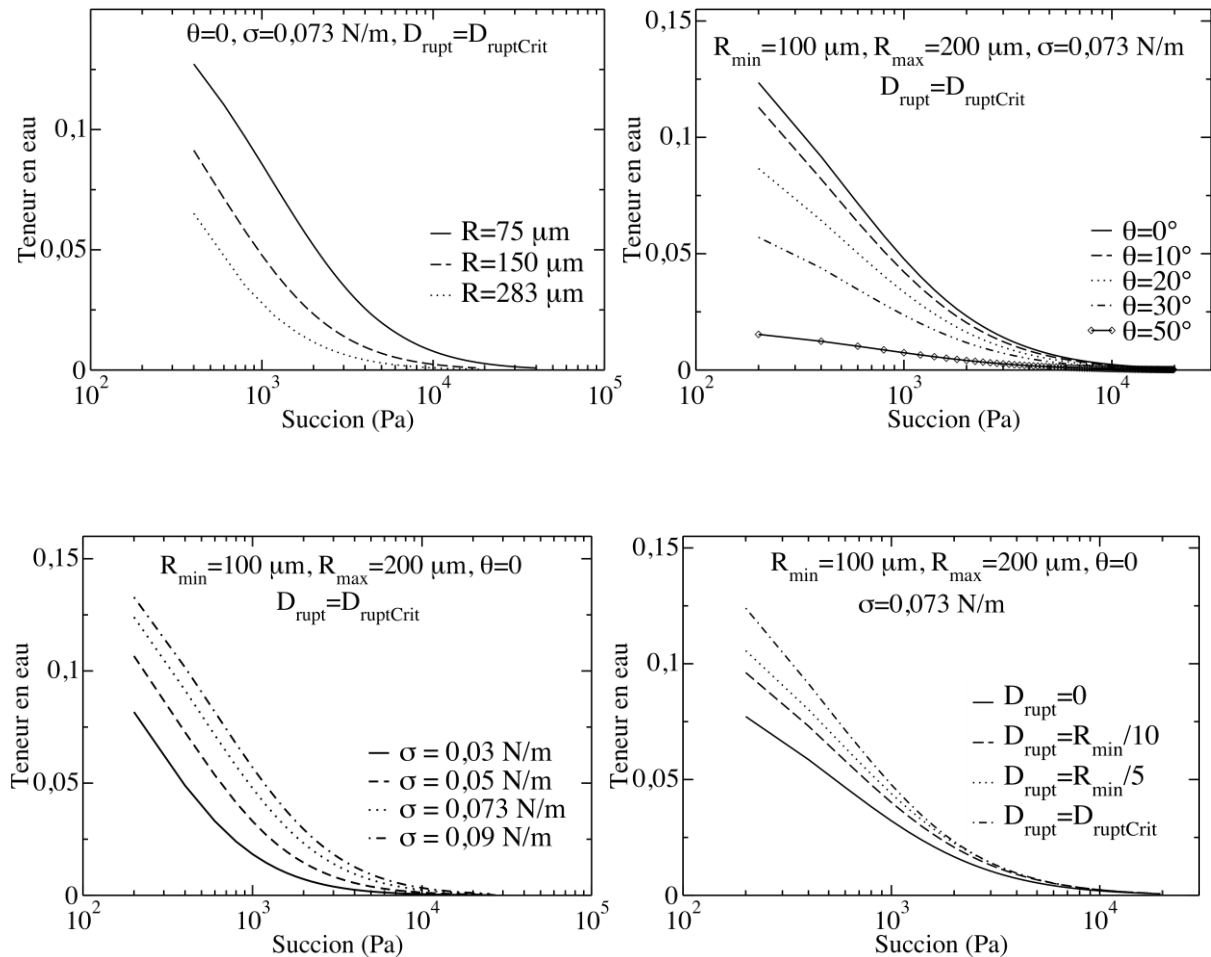


Figure 5 : Etude de l'influence de la granulométrie, de l'angle de mouillage, de la tension superficielle et de la distance de rupture choisie sur la courbe de rétenion ($\phi \approx 40\%$).

On remarque que les courbes expérimentale et numérique sont très proches avec une bonne estimation de la succion d'entrée d'air et de la teneur en eau relative au début de la coalescence. Néanmoins, dans le domaine pendulaire, le modèle sous-estime la valeur de la teneur en eau. Ceci peut être dû en partie à la non prise en compte de l'eau adsorbée à la surface des grains et aussi à la non prise en compte de la rugosité et de la forme réelle des billes de verres.

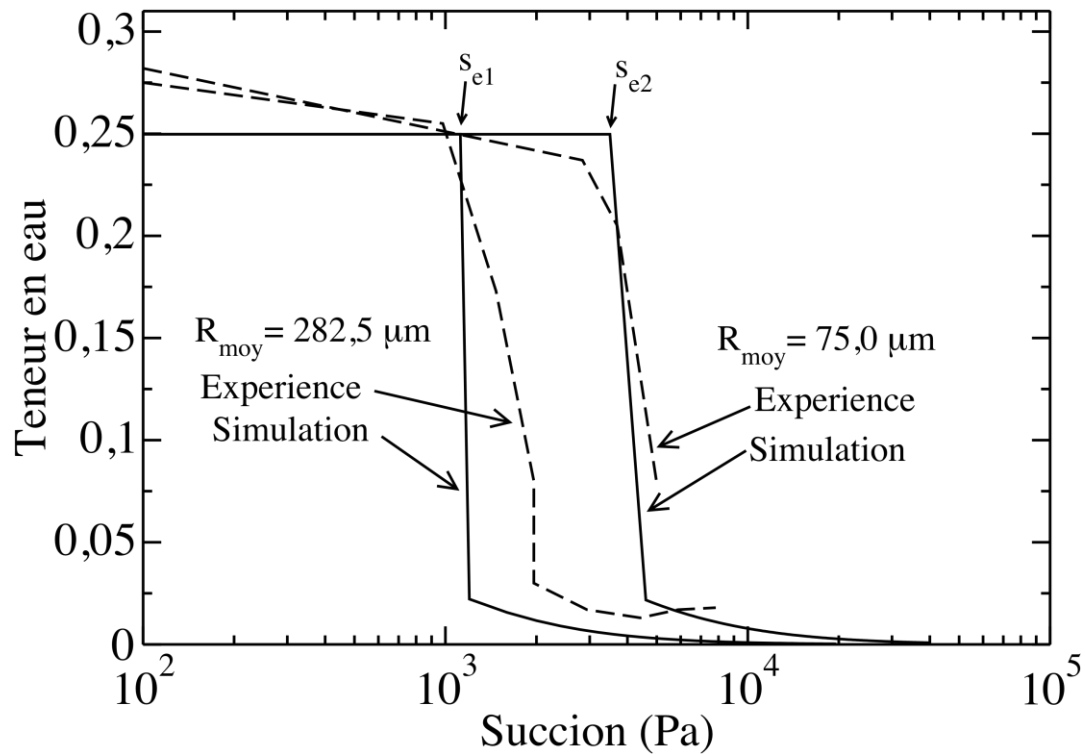


Figure 6 : Comparaison entre les courbes de rétention numériques et expérimentales pour des échantillons dont les porosités sont proches (porosité : $\phi \approx 40\%$).

4. CONCLUSION

Par trois approches différentes nous avons déterminé la relation entre la succion et le volume d'eau au niveau local. Ces approches ont donné des résultats proches à la fois sur les plans qualitatif et quantitatif. Une étude paramétrique a permis de mettre en évidence l'influence de la tension superficielle, de l'angle de mouillage, de la taille des grains et de la distance de rupture sur la courbe de rétention. Les origines de l'hystérésis de la courbe de rétention d'un milieu granulaire ont pu être identifiées à la lumière de cette étude paramétrique. Par ailleurs, on constate un assez bon accord entre les courbes expérimentales et celles issues de la modélisation avec une bonne approximation de la teneur en eau à la limite de coalescence et de la succion d'entrée d'air. La méthode des éléments discrets paraît donc bien adaptée à l'étude de la rétention d'eau dans les milieux granulaires. La modélisation proposée porte exclusivement sur le domaine pendulaire. Il convient à présent d'étendre ces études au domaine funiculaire afin de couvrir un plus large champ d'applications.

5. REFERENCES

1. Soulié F., Cherblanc F., El Youssoufi M. S. and Saix C., Influence of liquid bridges on the mechanical behaviour of polydisperse granular materials. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 30, 213-228, 2006.

2. Richefeu V., El Youssoufi M. S. and Radjaï F., Shear strength properties of wet granular materials. *Physical Review E*, 73, 051304, 2006.
3. Likos W. J., Lu N., Hysteresis of Capillary stress in unsaturated granular soil. *Journal of Engineering Mechanics*, 130, No. 6, 646-655, 2004.
4. El Shamy U. and Gröger T., Micromechanical aspects of the shear strength of wet granular soils. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 32, 1763-1790, 2008.
5. G. Lian, C. Thornton, J. M. Adams, A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies, *Journal of colloid and Interface Science* 161 (1993) 138–147.
6. K. Hotta, K. Takeda, K. Linoya, The capillary binding force of a liquid bridge, *Powder Technology* 10 (1974) 231–242.
7. C. D. Willet, M. J. Adams, S. A. Johnson, J. P. K. Seville, Capillary bridges between two spherical bodies, *Langmuir* 16 (2000) 9396–9405.
8. Cundall P. A. et Strack O. D. L., A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1),47-65, 1979.
9. Scheel M., Seemann R., Brinkmann M., Di Michiel M., Sheppard A. and Herminghaus S., Liquid distribution and cohesion in wet granular assemblies beyond the capillary bridge regime. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 20, 494236 (7pp), 2008.
10. Reinson J. R., Fredlund D. G., and Wilson G. W., Unsaturated flow in coarse porous media. *Canadian Geotechnical Journal*, 42, 252-262, 2005.