

Paramétrisation locale dans la Méthode Asymptotique Numérique: Application au calcul des structures

Hicham Mottaqui

Laboratoire de Calcul Scientifique en Mécanique, Faculté des Sciences Ben M'Sik,
Université Hassan II Mohammedia - Casablanca, Maroc, hmottaqui@gmail.com

Bouazza Braikat

Laboratoire de Calcul Scientifique en Mécanique, Faculté des Sciences Ben M'Sik,
Université Hassan II Mohammedia - Casablanca, Maroc, b.braikat@gmail.com

Noureddine Damil

Laboratoire de Calcul Scientifique en Mécanique, Faculté des Sciences Ben M'Sik,
Université Hassan II Mohammedia - Casablanca, Maroc, noureddine.damil@gmail.com

Résumé

La Méthode Asymptotique Numérique MAN est une méthode de continuation basée sur le calcul des séries vectorielles tronquées par rapport à un paramètre de chemin "a" [1]. Le concept de paramétrisation, c'est-à-dire le choix de l'équation auxiliaire définissant le paramètre "a" classiquement utilisé dans la MAN, est celui de la longueur d'arc linéarisée [2]. Dans cet article, nous discutons sur l'utilisation dans la MAN du concept de paramétrisation locale, proposé par Seydel [3], Rheinboldt et Burkadt [4] et Gervais et Sadiky [5]. Une expérimentation numérique permettant de déterminer le choix optimal du vecteur de projection \mathbf{e}_i de la paramétrisation locale, est présentée. Nous proposons une nouvelle paramétrisation locale que nous comparons à celles proposées dans [3, 4, 5]. Cette paramétrisation locale permet d'obtenir des résultats proches de ceux de l'expérimentation numérique. La discussion sera faite sur des exemples de calcul des structures en non linéaire géométrique.

Abstract

The Asymptotic Numerical Method ANM is a path following method based on the computation of truncated vectorial series with respect to a path parameter "a" [1]. The concept of parameterization, i.e. the choice of the auxiliary equation defining the parameter "a", usually used in the ANM, is the linearized arc length parameterization [2]. In this paper, we discuss the use, in the ANM, of the concept of local parameterization proposed by Seydel [3], Rheinboldt and Burkadt [4] and Gervais and Sadiky [5]. A numerical experimentation to determine the optimal choice of the projection vector \mathbf{e}_i of the local parameterization is presented. We propose a new local parameterization that we compare to those proposed in [3, 4, 5]. The results, obtained by the proposed local parameterization, are close to those of the numerical experimentation. To illustrate the performance of these local parameterizations, we give some numerical comparisons on nonlinear elastic shell problems.

1. INTRODUCTION

Un problème en mécanique non linéaire des structures peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - \lambda \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1)$$

où \mathbf{R} est le vecteur résidu, $\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{S})$ est le vecteur inconnu, \mathbf{u} est le déplacement et \mathbf{S} est le tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff, λ est un paramètre de chargement, $\mathbf{L}(\cdot)$ est un opérateur linéaire, $\mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$ est un opérateur quadratique et \mathbf{F} est le vecteur des forces extérieures donné. La MAN est un outil de calcul numérique qui combine une technique de perturbation, une technique de discrétisation et une technique de continuation [1,6]. La solution est ainsi obtenue branche par branche. On représente la $j^{\text{ème}}$ branche solution de (1), à partir d'un point solution donné $(\mathbf{U}^j, \lambda^j)$, par une série entière tronquée à un ordre N en fonction d'un paramètre de chemin "a":

$$\begin{cases} \mathbf{U}_N(a) = \mathbf{U}^j + a\mathbf{U}_1 + a^2\mathbf{U}_2 + \dots + a^N\mathbf{U}_N \\ \lambda_N(a) = \lambda^j + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + \dots + a^N\lambda_N \end{cases}, \quad a \in [0, a_{\max}] \quad (2)$$

où $[0, a_{\max}]$ désigne le domaine de validité de la représentation (2). Ainsi, la recherche de la solution (\mathbf{U}, λ) du problème non linéaire (1) est remplacée par la recherche de N termes $(\mathbf{U}_p, \lambda_p)$ solutions de N problèmes linéaires :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{U}^j)\mathbf{U}_p - \lambda_p\mathbf{F} = \mathbf{F}_p^{\text{nl}} = -\sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_{p-r}) \quad (3)$$

L'équation (3) pour $p=1$, $\mathbf{F}_1^{\text{nl}} = 0$, définit le vecteur tangent $\mathbf{T} = {}^t(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$ au point de départ $(\mathbf{u}^j, \lambda^j)$. La solution générale du problème (3) peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{U}_p = \lambda_p \widehat{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{U}_p^{\text{nl}} \quad (4)$$

où

$$\widehat{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{L}_t(\mathbf{U}^j)^{-1}\mathbf{F} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_p^{\text{nl}} = \mathbf{L}_t(\mathbf{U}^j)^{-1}\mathbf{F}_p^{\text{nl}} \quad (5)$$

Pour résoudre complètement les problèmes (3), on doit ajouter une équation auxiliaire. Dans la MAN [1], nous avons souvent utilisé, comme équation auxiliaire, celle correspondant à la pseudo longueur d'arc PLA [2] :

$$a = \langle \mathbf{V}, \mathbf{T} \rangle \quad (6)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne un produit scalaire et $\mathbf{V} = {}^t(\mathbf{u} - \mathbf{u}^j, \lambda - \lambda^j)$. La paramétrisation (6) est généralement utilisée dans la méthode de Newton-Raphson [2, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Le système (3) (6) est résolu par (4) et par :

$$\lambda_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \widehat{\mathbf{u}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{u}}_1}}, \quad \lambda_p = -\lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_p^{\text{nl}} \quad (7)$$

Le signe \pm , dans le premier terme, dépend du choix de l'orientation. Dans cet article, on choisit le signe du produit scalaire $\langle \mathbf{T}^{*j}, \mathbf{T}^{*j-1} \rangle$, où \mathbf{T}^{*j} et \mathbf{T}^{*j-1} sont respectivement les vecteurs tangents normalisés aux points de départ de la branche^j et de la branche^{j-1}. On utilise une méthode d'éléments finis classique en déplacement afin de discrétiser les problèmes linéaires (5). Ces problèmes admettent

la même matrice de rigidité tangente. Pour obtenir toute la solution, on utilise une technique de continuation [1,6]. La fin de la branche^j est le point de départ pour la branche^{j+1}. Dans la continuation série [1,6], le domaine de validité $[0, a_{\max}]$ est approché par la relation :

$$a_{\max} = \left(\varepsilon_s \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_N\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (8)$$

où ε_s est un paramètre de tolérance donné et $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire. Chaque branche solution est ainsi obtenue par une seule inversion de la matrice de rigidité tangente. Les approximants de Padé permettent d'augmenter le domaine de validité de la représentation polynomiale (2). La représentation rationnelle correspondante s'écrit sous la forme [15] :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{N(a)} = \mathbf{U}^j + a \frac{\Delta_{N-2}(a)}{\Delta_{N-1}(a)} \mathbf{U}_1 + a^2 \frac{\Delta_{N-3}(a)}{\Delta_{N-1}(a)} \mathbf{U}_2 + \dots + a^{N-1} \frac{1}{\Delta_{N-1}(a)} \mathbf{U}_{N-1} \\ \lambda_{N(a)} = \lambda^j + a \frac{\Delta_{N-2}(a)}{\Delta_{N-1}(a)} \lambda_1 + a^2 \frac{\Delta_{N-3}(a)}{\Delta_{N-1}(a)} \lambda_2 + \dots + a^{N-1} \frac{1}{\Delta_{N-1}(a)} \lambda_{N-1} \end{cases}, \quad a \in [0, a_{\max}] \quad (9)$$

où $\Delta_p(a) = 1 + ad_1 + a^2d_2 + \dots + a^pd_p$ sont des polynômes de degré p et de coefficients d_p qui dépendent des coefficients d'orthonormalisation des vecteurs \mathbf{u}_p [15]. Dans la continuation Padé [15], le domaine de validité $[0, a_{\max p}]$ est approché par la relation :

$$\frac{\|\mathbf{u}_{N-1}(a_{\max p}) - \mathbf{u}_{N-2}(a_{\max p})\|}{\|\mathbf{u}_{N-1}(a_{\max p}) - \mathbf{u}^j\|} = \varepsilon_p \quad (10)$$

où ε_p est un paramètre de tolérance donné. Nous avons appliqué avec succès la MAN [1] pour la résolution des problèmes non linéaires issus de la mécanique. En particulier, nous avons montré, sur plusieurs exemples, l'efficacité et la robustesse de la MAN pour le suivi de courbe [1, 6, 15,16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. La MAN permet de calculer toute la solution en peu de pas pour un ordre et une tolérance fixés. Plusieurs comparaisons avec la méthode de Newton Raphson ont été réalisées [1,6]. Dans ce travail, on discute l'influence du choix de l'équation auxiliaire (6) sur les longueurs des pas séries ou Padé. Nous allons introduire et discuter des paramétrisations locales comme celles proposées par Seydel [3, 7], Rheinboldt [24] et Rheinboldt et Burkadt [4]. Ces paramétrisations locales ont été discutées par Gervais et Sadiky [5, 25] et Sadiky [26] dans le cadre de la MAN. Une autre façon de paramétriser une branche est d'utiliser n'importe quelle composante du vecteur \mathbf{V} comme paramètre. Ainsi, comme dans [3], l'équation auxiliaire (6) peut être remplacée par l'équation auxiliaire suivante:

$$a = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{V} \rangle \quad (11)$$

où \mathbf{e}_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^{\text{NDL}+1}$, NDL étant le degré de liberté de la structure discrétisée, ($i = 1, \dots, \text{NDL} + 1$). Le cas $i = \text{NDL} + 1$ correspond à une paramétrisation de type charge imposée et les autres cas correspondent à une paramétrisation de type déplacement imposé. L'indice

"i" et par conséquent l'équation auxiliaire (11) ont un caractère local, c'est-à-dire que la composante change pour chaque branche^j de la continuation MAN. Différentes paramétrisations locales, choix de l'équation auxiliaire et choix de l'indice "i", seront proposées et comparées entre elles et avec la paramétrisation classiquement utilisée dans la MAN: la pseudo longueur d'arc. Afin de déterminer le meilleur choix de l'indice "i", nous présentons une expérimentation numérique. Dans cette expérimentation, on cherche numériquement l'indice "i", c'est-à-dire la composante du vecteur $\mathbf{V} = {}^t(\mathbf{u} - \mathbf{u}^j, \lambda - \lambda^j)$, permettant d'obtenir le plus grand domaine de validité $[0, a_{\max}]$ (8).

Les tests numériques porteront sur des exemples provenant du calcul des structures en non linéaire géométrique. Le premier exemple concerne la flexion d'une plaque carrée, le deuxième exemple concerne le post flambage d'un arc profond, le troisième exemple concerne le flambage d'un toit soumis à une force au milieu et le quatrième exemple concerne le flambage d'un toit soumis à une force décalée.

2. PARAMETRISATION LOCALE DANS LA MAN

Dans la paramétrisation locale utilisée dans [4, 5], les auteurs ont remplacé l'équation auxiliaire (11) par l'équation auxiliaire suivante :

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{V} \rangle - a \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{T}^* \rangle = 0 \quad (12)$$

où $\mathbf{T}^* = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1}} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ est le vecteur tangent normé au point de départ $(\mathbf{u}^j, \lambda^j)$. Le vecteur de projection " \mathbf{e}_i " doit vérifier la relation $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{T}^* \rangle \neq 0$. En utilisant l'équation auxiliaire (11), le système (3) (11) est alors résolu par (4) et par

$$\lambda_1 = \frac{1}{\langle \hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{e}_i \rangle}, \quad \lambda_p = -\lambda_1 \frac{\langle \mathbf{v}_p^{nl}, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{T}, \mathbf{e}_i \rangle} \quad (13)$$

où $\hat{\mathbf{v}}_1 = {}^t(\hat{\mathbf{u}}_1, 1)$ et $\mathbf{v}_p^{nl} = {}^t(\mathbf{u}_p^{nl}, 0)$.

En utilisant l'équation auxiliaire (12), le système (3) (12) est résolu par (4) et par

$$\lambda_1 = \frac{\langle \mathbf{T}^*, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{e}_i \rangle} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1}}, \quad \lambda_p = -\lambda_1 \frac{\langle \mathbf{v}_p^{nl}, \mathbf{e}_i \rangle}{\langle \mathbf{T}, \mathbf{e}_i \rangle} \quad (14)$$

Signalons que la différence entre les expressions des coefficients λ_p dans (13) et (14) réside uniquement dans le premier terme λ_1 . Ce premier terme ne dépend pas de l'indice "i" dans le cas de l'équation auxiliaire (12). Dans les applications numériques, nous avons constaté que ces deux expressions (13) et (14) donnent presque les mêmes résultats.

Il reste à préciser le choix de l'indice "i" qui permettra le plus grand pas. L'indice "i" ($1 \leq i \leq \text{NDL} + 1$) est localement déterminé pour chaque branche^j. Plusieurs algorithmes sont possibles pour le choix de l'indice "i".

Dans le premier algorithme (Algo1), comme dans [3], on utilise l'équation auxiliaire (11), c'est à dire les expressions de λ_p données par (13) et on choisit l'indice "i" égal à l'indice "i₁" correspondant à la première composante maximale en module de \mathbf{T}^* .

Dans le deuxième algorithme (Algo2), comme dans [4], on utilise l'équation auxiliaire (12), c'est-à-dire les expressions de λ_p données par (14) et on choisit l'indice "i" égal à l'indice "i₂" correspond à la deuxième composante maximale en module de \mathbf{T}^* et non à "i₁" lorsque les trois sous conditions suivantes sont vérifiées :

$$|\langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{T}^j \rangle| > |\langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{T}^{j-1} \rangle|, \quad |\langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{T}^{j-1} \rangle| > |\langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{T}^j \rangle|, \quad \frac{|\langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{T}^j \rangle|}{|\langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{T}^{j-1} \rangle|} > \mu \quad (15)$$

où μ est un réel fixé ($0 < \mu < 1$), que l'on choisira par la suite égal à 0.1.

Dans le troisième algorithme (Algo3), comme dans [5], on utilise l'équation auxiliaire (12) c'est-à-dire les expressions de λ_p données par (14) et on choisit l'indice "i₂" et non "i₁" lorsque les trois sous conditions suivantes sont vérifiées

$$\frac{|\langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{T}^j \rangle|}{|\langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{T}^{j-1} \rangle|} > \frac{|\langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{T}^j \rangle|}{|\langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{T}^{j-1} \rangle|}, \quad \frac{|\langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{T}^j \rangle|}{|\langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{T}^{j-1} \rangle|} > \mu, \quad \langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{T}^j \rangle \langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{T}^{j-1} \rangle > 0 \quad (16)$$

Dans le quatrième algorithme (Algo4), on utilise l'équation auxiliaire (12), c'est-à-dire les expressions de λ_p données par (14) et on choisit l'indice "i" qui correspond à la plus grande composante en valeur absolue du vecteur séquent défini par :

$$\mathbf{V}_{\text{sec}} = (\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^{j-1}, \lambda^j - \lambda^{j-1}) \quad (17)$$

où $(\mathbf{u}^{j-1}, \lambda^{j-1})$ est le point de départ de la branche^{j-1}.

Quel est le choix optimal de l'indice "i" ? A fin de répondre à cette question, nous avons réalisé une expérimentation numérique (EXN). Pour chaque pas et pour chaque indice "i" ($1 \leq i \leq \text{NDL} + 1$), on calcule tous les termes de la série (2), puis on calcule le domaine de validité $[0, a_{\text{maxs}}]$ par la formule (8). On choisit l'indice "i" qui correspond à la plus grande valeur de "a_{maxs}". Bien entendu, cette procédure demande beaucoup de temps de calcul et ne peut être considérée comme un algorithme efficace.

3. APPLICATIONS NUMERIQUES

Dans cette section, on discute l'influence des quatre paramétrisations locales dans la MAN:

1. Paramétrisation locale de type Seydel: (Algo1), i correspond à la plus grande composante du vecteur tangent $|\mathbf{T}^*|$.
2. Paramétrisation locale de type Rheinboldt: (Algo2), " i " est donné par les conditions (15).
3. Paramétrisation locale de type Gervais-Sadiky: (Algo3), " i " est donné par les conditions (16).
4. Paramétrisation locale de type vecteur sécant: (Algo4), " i " correspond à la plus grande composante du vecteur sécant $|\mathbf{V}_{\text{sec}}|$ (17).

Ces paramétrisations sont testées sur des exemples de coques minces élastiques en non linéaire géométrique. Les structures étudiées sont discrétisées à l'aide d'un élément fini triangulaire de type DKT18. Les résultats numériques des quatre paramétrisations locales dans la MAN sont comparés en nombre de pas (nombre de branche^j) nécessaire pour obtenir la courbe de réponse désirée : courbe charge - déplacement. Afin de tester l'influence de l'ordre de troncature N , on examine trois ordres de troncatures: un petit ordre $N=10$, un ordre souvent utilisé dans la MAN $N=20$ et un ordre assez grand $N=30$. Ces résultats de continuation, série ou Padé, avec paramétrisation locale seront comparés d'une part aux résultats de continuation MAN avec la paramétrisation de pseudo longueur d'arc et d'autre part aux résultats de l'expérimentation numérique. Les quatre testes numériques concernent la flexion d'une plaque carrée, le post flambage d'un arc profond, le flambage d'un toit soumis à une force centrale et le flambage d'un toit soumis à une force décalée de son milieu.

3.1 Plaque en flexion

La première application concerne la flexion d'une plaque carrée élastique encadrée aux quatre bords et soumise à une force en son centre. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données sur la figure 1-a. La plaque est discrétisée en 32 éléments triangulaires de type DKT18 soit un nombre total de degrés de liberté égal à 150. La courbe de réponse charge – déplacement au centre de la plaque (λ, w) est donnée sur la figure 1-b. Sur le tableau 1, on reporte les indices " i " utilisés par les quatre paramétrisations locales et par l'expérimentation numérique (EXN) pour les deux premiers pas de la continuation série à l'ordre 20. Sur le tableau 2, on donne le nombre de pas MAN série et Padé pour atteindre une flèche de 4 mm dans le cas de la paramétrisation de pseudo longueur d'arc PLA et dans le cas des quatre paramétrisations locales pour les ordres 10, 20 et 30.

D'après le tableau 1, on remarque que les trois premières paramétrisations locales: type seydel (Algo1), type Rheinboldt (Algo2) et type Gervais-Sadiky (Algo3) utilisent le même indice " $i = NDL + 1 = 151$ " pour tous les pas de la MAN; et par conséquent ils demandent le même nombre de pas, soit 10 pas à l'ordre 20, pour obtenir toute la courbe de la figure 1, voir tableau 2. Dans cet exemple, ces trois algorithmes utilisent une paramétrisation de type charge imposée, c'est la 151^{ème} composante du vecteur \mathbf{V} qui est ici imposée. Dans le cas de la paramétrisation locale basée sur le vecteur sécant (Algo4), au premier pas le pilotage est de type charge imposée, la 151^{ème} composante est bloquée et au deuxième pas le pilotage est de type déplacement imposé, la 75^{ème} composante est bloquée. Notons que d'après l'expérimentation numérique (EXN), le pilotage optimum utilise une paramétrisation de type déplacement imposé suivant la 75^{ème} composante. La paramétrisation, utilisée dans (Algo4), ne demande que 4 pas au lieu de 10 pas pour les trois autres paramétrisations locales (voir tableau 2) pour obtenir la courbe charge - déplacement de la figure 1-b. D'après le tableau 2, on peut constater que les résultats obtenus par l'algorithme (Algo4) sont proches de ceux obtenus dans l'expérimentation numérique (EXN). D'après le tableau 2, on peut constater aussi que les trois premières paramétrisations locales (Algo1), (Algo2) et (Algo3) et la paramétrisation de pseudo longueur d'arc (PLA) sont équivalentes. Sur le tableau 2, on donne aussi le nombre de pas pour obtenir toute la courbe dans le cas d'une continuation Padé pour les trois ordres de troncature et pour les cinq paramétrisations : pseudo longueur d'arc et les 4 paramétrisations locales. Les résultats

montrent que l'utilisation des approximants de Padé permet de réduire le nombre de pas et ce pour toutes les paramétrisations utilisées.

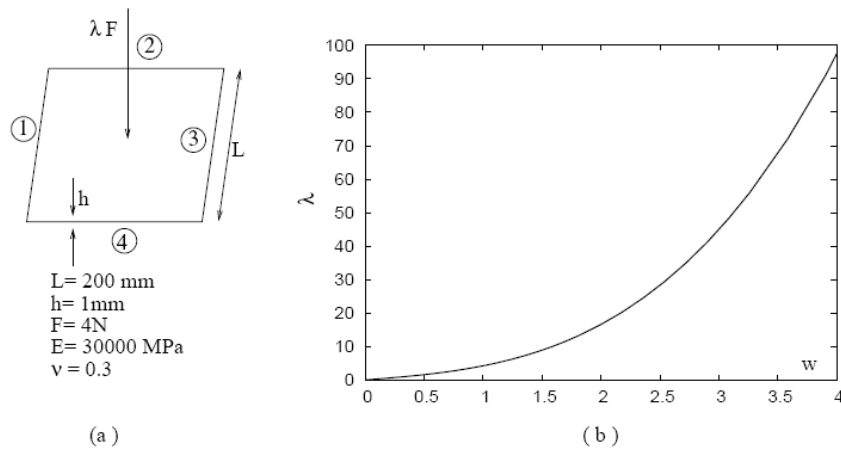


Figure 1: (a)- Plaque en flexion (b)- Courbe charge déplacement au nœud chargé.

Pas n°	Algo1	Algo2	Algo3	Algo4	EXN
1	151	151	151	151	75
2	151	151	151	75	75

Tableau 1 : Les indices "i" utilisés par les 4 paramétrisations locales et par l'expérimentation numérique (EXN) $N = 20$, $\epsilon_s = 10^{-6}$, $NDL = 150$.

Ordre	PLA		Algo1		Algo2		Algo3		Algo4		EXN
	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série
10	16	8	16	11	16	11	16	11	6	5	5
20	9	8	10	7	10	7	10	7	4	3	3
30	8	7	9	7	9	7	9	7	4	3	3

Tableau 2 : Nombres de pas pour atteindre une flèche de $w=4\text{mm}$. Continuation série et Padé pour les différents algorithmes et pour les ordres $N = 10, 20, 30$. $\epsilon_s = 10^{-6}$, $\epsilon_p = 10^{-3}$.

3.2 Flambage d'un arc profond

La deuxième application concerne le flambage d'un arc profond en appui simple aux deux extrémités et soumis à une force λF en son milieu et à une force de perturbation λP , $P = F/100$. Les données géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure 2-a. L'arc est discrétisé en 200 éléments triangulaires de type DKT18; soit 1212 degrés de liberté.

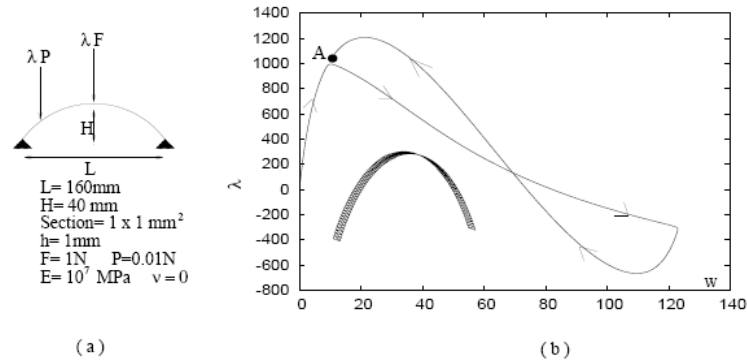


Figure 2: (a) Flambage d'un arc profond. (b) Courbe charge - déplacement au nœud chargé

Pas	Algo1	Algo2	Algo3	Algo4	EXN
1	1213	1213	1213	1213	383
2	1213	1213	1213	303	285
20	1213	1213	1213	183	89
21	1213	189	189	183	795

Tableau 3 : Les indices "i" utilisés par les quatre paramétrisations locales et par l'expérimentation numérique (EXN),
 $N = 20$, $\varepsilon_s = 10^{-14}$, $NDL = 1212$

Ordre	PLA		Algo1		Algo2		Algo3		Algo4		EXN
	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série
N=10	618	165	1231	250	903	287	929	293	435	142	305
N=20	109	38	196	60	136	40	162	40	83	30	63
N=30	64	28	106	43	76	34	89	39	50	26	38

Tableau 4 : Nombre de pas nécessaires pour obtenir toute la courbe de la figure 2. Continuation série et Padé pour les différents algorithmes, $N = 10, 20, 30$. $\varepsilon_s = 10^{-14}$, $\varepsilon_p = 10^{-9}$

Sur la figure 2-b, on représente la courbe de réponse charge – déplacement (λ, w) au centre de l'arc. Cette courbe présente deux points de quasi-bifurcations et deux points limites en charge. Cet exemple est un benchmark pour tester la fiabilité et la robustesse des algorithmes de continuation. Sur le tableau 3, on donne le numéro de la composante du vecteur V utilisée pour le pilotage de la courbe de la figure 2-b dans le cas des quatre paramétrisations locales (Algo1, Algo2, Algo3, Algo4) et de l'expérimentation numérique (EXN). Sur le tableau 4, on donne le nombre de pas MAN série et Padé pour atteindre le point A de la figure 2-b dans le cas de la paramétrisation de pseudo longueur d'arc PLA et dans le cas des 4 paramétrisations locales pour les ordres 10, 20 et 30.

D'après le tableau 3, on constate que les trois premières paramétrisations locales (Algo1), (Algo2) et (Algo3) utilisent le même indice " $i = NDL + 1 = 1213$ " correspondant à la dernière composante du vecteur V , c'est-à-dire un pilotage à charge imposée, jusqu'au vingtième pas qui correspond au premier point de quasi-bifurcation. La paramétrisation locale de type vecteur sécant dans l'algorithme (Algo4) utilise un indice différent des trois premières paramétrisations locales dès le deuxième pas, voir tableau 3. Les résultats obtenus à l'aide de cette paramétrisation locale (Algo4) sont proches de

ceux obtenus dans l'expérimentation numérique, voir EXN au tableau 4. Par exemple à l'ordre 20, il faut 109 pas pour obtenir toute la courbe de la figure 2-b si on utilise une paramétrisation de pseudo longueur d'arc et respectivement 196 pas, 136 pas et 162 pas si on utilise respectivement les paramétrisations locales de type Seydel (Algo1), de type Rheinboldt (Algo2) et de type Gervais-Sadiky (Algo3).

Dans cet exemple, le nombre de pas pour obtenir toute la courbe solution est assez grand, ceci est dû à la présence des deux points de quasi-bifurcations et des deux points limites, voir figure 2-b. On constate, d'après le tableau 4, que la paramétrisation de pseudo longueur d'arc PLA demande moins de pas que les trois premières paramétrisations locales : Algo1, Algo2, Algo3 et ceci pour les trois ordres testés. La paramétrisation locale proposée, Algo4, permet de réduire le nombre de pas par rapport à la paramétrisation de pseudo longueur d'arc PLA. Par exemple, à l'ordre $N = 30$ continuation série, toute la courbe est obtenue à l'aide de 50 pas au lieu de 64 dans le cas de la pseudo longueur d'arc PLA, et respectivement 106 pas, 76 pas et 89 pas pour les trois premières paramétrisations locales Algo1, Algo2, Algo3. Sur cet exemple, on constate aussi que les résultats obtenus à l'aide de la paramétrisation locale de type vecteur sécant, Algo4, sont proches de ceux de l'expérimentation numérique. Par exemple, à l'ordre 20, l'expérimentation numérique prévoit 63 pas pour obtenir toute la courbe de la figure 2 et à l'aide de la paramétrisation locale proposée dans l'Algo4, la courbe est obtenue à l'aide de 83 pas, ce qui est mieux que le nombre de pas utilisé par les autres paramétrisations locales et celle de pseudo longueur d'arc. On pourra aussi constater pour cet exemple que l'utilisation des approximants de Padé permet de réduire considérablement le nombre de pas quelque soit la paramétrisation utilisée.

3.3 Flambage d'un toit cylindrique

La troisième application concerne un toit cylindrique articulé le long de deux bords opposés (① et ②) et soumis à un chargement λF appliqué au point central (voir figure 3-a). Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont reportées sur la figure 3-a. Par raison de symétrie, seulement un quart du toit est discrétisé en 200 éléments finis triangulaires de type DKT18 ; soit 726 degrés de liberté. Dans figure 3-b, on représente la courbe de réponse charge - déplacement (λ, w) au nœud chargé.

Sur le tableau 5, on donne le numéro de la composante du vecteur V utilisée pour le pilotage de la courbe de la figure 3-b dans le cas des quatre paramétrisations locales (Algo1, Algo2, Algo3, Algo4) et de l'expérimentation numérique (EXN). Sur le tableau 5, on donne le nombre de pas MAN série et Padé pour atteindre une flèche w de 24 mm au point chargé dans le cas de la paramétrisation de pseudo longueur d'arc PLA et dans le cas des 4 paramétrisations locales pour les ordres 10, 20 et 30.

Sur le tableau 5, on remarque, sur cet exemple, que l'algorithme (Algo4) utilise le même indice que les algorithmes (Algo1) et (Algo2), le pilotage se fait pour les deux premiers pas selon la 3^{ème} composante du vecteur V . Sur le tableau 6, on constate que tous les algorithmes donnent des résultats plus au moins équivalents et qui sont proches de l'optimum donné par l'expérimentation numérique (EXN). Par exemple, à l'ordre 20, la courbe de la figure 3-b ne peut être obtenue par moins de 10 pas de continuation MAN série d'après notre expérimentation numérique, voir EXN du tableau 6. A ce même ordre $N=20$, la courbe est obtenue en 13 pas quelque soit la paramétrisation utilisée, ce qui est proche de l'optimum « 10 pas ». Les résultats indiqués au tableau 6 montrent que la continuation Padé permet de réduire le nombre de pas série quelque soit la paramétrisation utilisée.

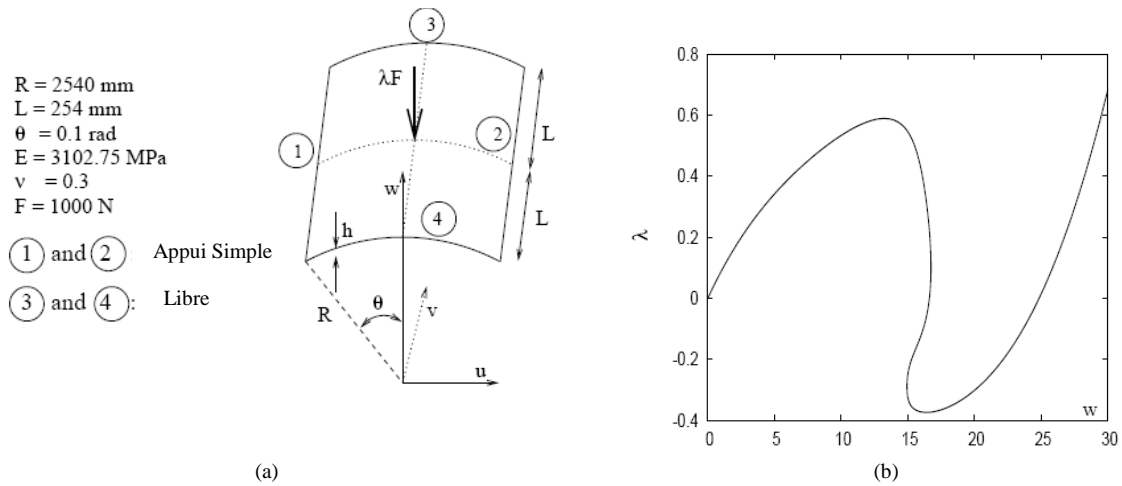


Figure 3: (a) Toit cylindrique étudié $h = 6.35\text{mm}$, (b) Courbe charge - déplacement au nœud chargé

Pas	Algo1	Algo2	Algo3	Algo4	EXN
1	3	3	3	3	215
2	3	3	69	3	365

Tableau 5 : Les indices "i" utilisés par les quatre paramétrisations locales et par l'expérimentation numérique (EXN),
 $N = 20$, $\varepsilon_s = 10^{-6}$, $NDL = 726$

Ordre	PLA		Algo1		Algo2		Algo3		Algo4		EXN
	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série
10	24	21	27	22	27	23	27	23	27	23	18
20	13	8	13	8	13	8	13	8	13	8	10
30	11	8	11	8	11	8	11	8	11	8	9

Tableau 6 : Nombre de pas pour atteindre une flèche $w \approx 24$. Continuation série et Padé pour les différents algorithmes et pour, $\varepsilon_s = 10^{-8}$, $\varepsilon_p = 10^{-12}$, $N = 10, 20, 30$.

3.4 Toit cylindrique soumis à un chargement décalé de son centre

Les paramétrisations sont appliquées sur un exemple de flambage un peu plus compliqué étudié dans [27]. Il s'agit d'un toit cylindrique en appui simple sur deux cotés opposés et libre sur les deux autres, voir figure 4. Le toit est soumis à un chargement décalé par 4.667% de son centre dans la direction axiale et dans la direction circonférentielle. Les auteurs, dans [27], ont utilisé un élément coque à 9-nœuds basé sur une formulation en grande rotation. Dans ce travail, la structure est discrétisée en 1152 éléments triangulaires de type DKT18 soit 3750 degrés de liberté. Ce type de chargement conduit à une courbe de réponse assez compliquée dans les régions instables, voir figure 4.

Sur le tableau 7, on donne le numéro de la composante du vecteur V utilisée pour le pilotage de la courbe de la figure 7-b dans le cas des quatre paramétrisations locales (Algo1, Algo2, Algo3, Algo4). On n'a pas reporté les résultats de l'expérimentation numérique qui demandent un grand temps CPU. Sur le tableau 8, on donne le nombre de pas MAN série et Padé pour atteindre une flèche w de 24 mm

au point chargé dans le cas de la paramétrisation de pseudo longueur d'arc PLA et dans le cas des quatre paramétrisations locales pour les ordres 10, 20 et 30.

Sur le tableau 7, on peut remarque que pour cet exemple, tous les algorithmes utilisent un peu près le même indice, et donc plus au moins le même pilotage. D'ailleurs sur le tableau 8, on peut constater que toutes les paramétrisations sont équivalentes et on peut conclure que l'optimum n'est pas loin de ces résultats. Sur cet exemple assez compliqué, on peut constater que les approximations de Padé apportent une légère amélioration comparée aux autres exemples traités ici..

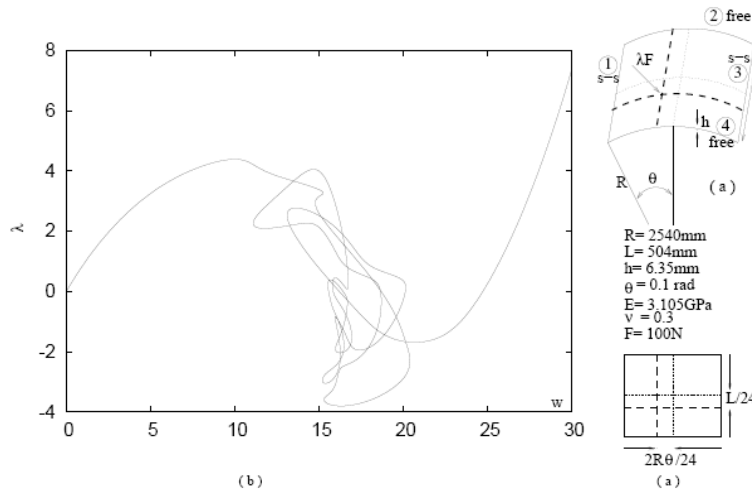


Figure 4: (a) Toit cylindrique étudiée, (b) Courbe charge - déplacement au nœud chargé

Pas	Algo1	Algo2	Algo3	Algo4
1	1719	1719	1719	1719
2	1713	1713	1713	1719

Tableau 7 : Les indices "i" utilisés par les quatre paramétrisations locales pour $N = 20$, $\epsilon_s = 10^{-8}$ NDL = 3750.

Ordre	PLA		Algo1		Algo2		Algo3		Algo4	
	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé	Série	Padé
10	412	403	415	402	416	403	417	403	423	417
20	162	142	163	140	164	141	164	139	163	141
30	123	91	123	91	123	90	125	91	121	92

Tableau 8 : Flambage d'un toit soumis à un chargement décalé de son milieu. Nombre de pas pour atteindre une flèche $w \approx 24$. Continuation série et Padé pour les différents algorithmes et pour les ordres $N = 10, 20, 30$.

4. CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons discuté, sur quatre exemples numériques, quatre types paramétrisations locales : paramétrisation locale de type Seydel: (Algo1), "i" correspond à la plus grande composante du vecteur tangent $|\mathbf{T}^*|$, paramétrisation locale de type Rheinboldt: (Algo2), "i" est donné par les

conditions (15), paramétrisation locale de type Gervais-Sadiky: (Algo3), "i" est donné par les conditions (16) et une nouvelle paramétrisation locale de type vecteur sécant: (Algo4), "i" correspond à la plus grande composante du vecteur sécant $|\mathbf{V}_{\text{sec}}|$ (17). Ces paramétrisations locales diffèrent par le choix de la composante de l'inconnue V utilisée pour définir l'équation auxiliaire. Une expérimentation numérique a permis de montrer qu'il existe toujours un indice « i » qui permet d'obtenir un grand domaine de validité dans la continuation MAN série. Sur ces exemples, on a montré que la paramétrisation locale proposée (Ago4) permet d'obtenir des résultats proches de l'optimum obtenu dans l'expérimentation numérique. Nous avons montré aussi que, sur ces exemples, les approximants de Padé permettent toujours une réduction du nombre de pas par rapport aux séries et ce quelque soit la paramétrisation utilisée.

REFERENCES

1. Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., Méthode Asymptotique Numérique, Hermès-Lavoisier, Paris, 2007.
2. Riks E., Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 47, pp. 219-259, 1984.
3. Seydel R., A Tracing Branches, *World of Bifurcation, Online Collection and Tutorials of Nonlinear Phenomena* (www.bifurcation.de), 1999.
4. Rheinboldt W.C., Burkadt J.V., A Locally parameterized continuation, *Acm Transaction on mathematical Software*, Vol. 9, pp. 215-235, 1983.
5. Gervais J.J., Sadiky H., A new steplength control for continuation with the asymptotic numerical method, *IAM, J. Numer. Anal.*, Vol. 22, pp. 207-229, 2000.
6. Cochelin B., A path-following technique via an asymptotic numerical method, *Computers and Structures*, Vol. 53, pp. 1181-1192, 1994.
7. Seydel R., *From Equilibrium to Chaos. Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Elsevier, New York, 1988.
8. Eriksson A., Derivatives of tangential stiffness matrices for equilibrium path descriptions, *Int J Numer Methods Eng.*, Vol. 32, pp. 1093-1113, 1991.
9. Wagner W., A path-following algorithm with quadratic predictor, *Computers and Structures*, Vol. 39, pp. 339-384, 1991.
10. Crisfeld M.A., *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 1. Wiley: Chichester, 1991.
11. Crisfeld M.A., *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 2. Wiley: Chichester, 1997.
12. Kouhia R., Mikkola M., Some aspects of efficient path-following, *Computers and Structures*, Vol. 72, pp. 509-524, 1999.
13. Lopez S., An effective parametrization for asymptotic extrapolation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 189, pp. 297-311, 2000.
14. Kouhia R., Stabilized forms of orthogonal residual and constant incremental work control path following methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 197, pp. 1389-1396, 2008.
15. Elhage-Hussein A., Potier-Ferry M., Damil N., A numerical continuation method based on Padé approximants, *Int.J. Solids and structures*, Vol. 37, pp. 6981-7001, 2000.
16. Damil N., Potier-Ferry M., A new method to compute perturbed bifurcations: application to buckling of imperfect structures, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 28, pp. 704-719, 1990.
17. Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., Asymptotic Numerical Method and Padé approximants for nonlinear elastic structures, *Int J Numer Methods Eng.*, Vol. 37, pp. 1187-1213, 1994.

18. Potier-Ferry M., Damil N., Braikat B., Descamps J., Cadou J.M., Cao H.L., Elhage Hussein A., Traitement des fortes non linéarités par la méthode asymptotique numérique, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, pp. 171–177, 1997.
19. Lahmam H., Cadou J.M., Zahrouni H., Damil N., Potier-Ferry M., High-order predictor-corrector algorithms, *Int J Numer Methods Eng.*, Vol. 55, pp. 685–704, 2002.
20. Aggoune W., Zahrouni H., Potier-Ferry M., Asymptotic numerical method for unilateral contact, *Int J Numer Methods Eng.*, Vol 68, pp. 605–631, 2006.
21. Assidi M., Zahrouni H., Damil N., Potier-Ferry M., Regularization and perturbation technique to solve plasticity problems, *In J Mater Form.* Vol. 2, pp. 1–14, 2009.
22. Cadou J. M., Duigou L., Damil N., Potier-Ferry M., Convergence acceleration of iterative algorithms: Applications to thin shell analysis and Navier-Stokes equations, *Computational Mechanics*, Vol. 43, pp. 253-264, 2009.
23. Nezamabadi S., Yvonnet J., Zahrouni H., Potier-Ferry M., A multilevel computational strategy for handling microscopic and macroscopic instabilities, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 198, pp. 2099-2110, 2009.
24. Rheinboldt W.C., *Numerical Analysis of parameterized Nonlinear Equations*, Wiley, New York, 1986.
25. Gervais J.J., Sadiky H., A continuation method based on a high order predictor and an adaptative steplength control, *ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 84, pp. 551–563, 2004.
26. Sadiky H., *Une classe de méthodes de continuation utilisant le développement de Taylor*, Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, 2000.
27. Hoon Kim J., Hyup Kim Y., A predictor-corrector method for structural nonlinear analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, pp. 959-974, 2001.