

## Etude numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée confinant des fluides non-Newtoniens

M. Kaddiri

Université Sultane Moulay Slimane, Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire de Modélisation des Ecoulements et des Transferts (LAMET), B.P. 523, Béni-Mellal, Maroc, [m.kadiri@fstbm.ac.ma](mailto:m.kadiri@fstbm.ac.ma)

M. Naïmi

Université Sultane Moulay Slimane, Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire de Modélisation des Ecoulements et des Transferts (LAMET), B.P. 523, Béni-Mellal, Maroc, [naïmi@fstbm.ac.ma](mailto:naïmi@fstbm.ac.ma)

T. Makayssi

Université Sultane Moulay Slimane, Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire de Modélisation des Ecoulements et des Transferts (LAMET), B.P. 523, Béni-Mellal, Maroc, [tmkayssi@fstbm.ac.ma](mailto:tmkayssi@fstbm.ac.ma)

A. Raji

Université Sultane Moulay Slimane, Faculté des Sciences et Techniques, Laboratoire de Modélisation des Ecoulements et des Transferts (LAMET), B.P. 523, Béni-Mellal, Maroc, [abderaji@fstbm.ac.ma](mailto:abderaji@fstbm.ac.ma)

M. Hasnaoui

Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia, Laboratoire de Mécanique des Fluides et Energétique (LMFE), B.P. 2390, Marrakech, Maroc, [hasnaoui@ucam.ac.ma](mailto:hasnaoui@ucam.ac.ma)

### Résumé

L'étude bidimensionnelle de la convection naturelle pour des fluides non-Newtoniens confinés dans une cavité carrée, chauffée et refroidie sur ses côtés verticaux à l'aide de densités de flux uniformes, est entreprise par voie numérique utilisant une technique aux différences finies. Les paramètres gouvernant le problème sont le nombre de Rayleigh,  $Ra$ , et l'indice de comportement,  $n$ . Les effets de ces paramètres sur la structure de l'écoulement et le transfert thermique sont analysés.

### Abstract

Two-dimensional steady-state natural convection for non-Newtonian power-law fluids confined in a square cavity, heated and cooled from its vertical sides with uniform heat fluxes, is conducted numerically using a finite difference technique. The parameters governing the problem are the Rayleigh number,  $Ra$ , and the flow behavior index,  $n$ . The effects of these parameters on the flow structure and heat transfer characteristics are analyzed.

### 1. INTRODUCTION

La convection naturelle, appelée aussi convection libre, est fréquemment rencontrée aussi bien dans les processus naturels qu'industriels. En raison de son importance dans divers domaines de la vie active, plusieurs chercheurs se sont attelés à examiner son influence sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans de nombreuses configurations géométriques à conditions aux limites différentes. Une revue de la littérature dans ce domaine peut être trouvée dans Ostrach [1] et Gebhart et al. [2].

D'autre part, bien que les fluides non-Newtoniens soient présents dans plusieurs applications industrielles, il existe très peu de travaux portant sur la convection naturelle dans de tels milieux [3,4],

en comparaison avec ceux Newtoniens. Cela peut être attribué à la difficulté à appréhender physiquement les mouvements convectifs et à les modéliser mathématiquement.

Aussi, la littérature dévoile un penchant des travaux sur la convection naturelle en cavité rectangulaire qu'en celle carrée. De plus, les conditions aux limites considérées dans la majorité des cas sont de type Dirichlet (température imposée) [3,5].

L'objectif de ce travail est donc d'étudier la convection naturelle dans une cavité carrée confinant un fluide non-Newtonien et soumise à des conditions aux limites thermiques de type Newman (flux de chaleur imposé) (Figure 1).

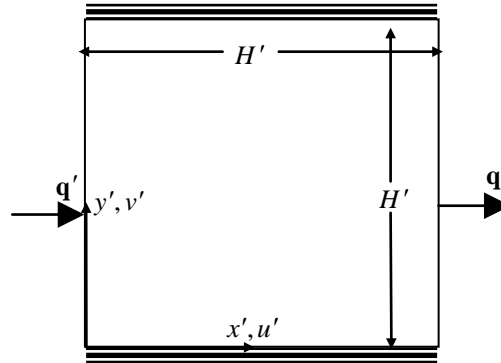


Figure 1 : Modèle physique et système de coordonnées.

Pour caractériser le comportement rhéologique non-Newtonien du fluide, le modèle en loi de puissance, proposé originalement par Ostwald-de Waele, est adopté. Une solution numérique des équations gouvernantes est obtenue, par le biais d'une approche aux différences finies, pour des valeurs des paramètres de contrôle couvrant les convections faible, modérée et forte, et les comportements pseudo-plastique, Newtonien et dilatant.

## 2. EQUATIONS GOUVERNANTES

Sous les hypothèses de la convection, communément utilisées, les équations adimensionnelles de transport de la vorticité,  $\Omega$ , de l'énergie,  $T$ , et de la fonction de courant,  $\psi$ , s'écrivent, respectivement :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\Omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Omega)}{\partial y} = Pr \left[ \mu_a \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right] + 2 \left[ \frac{\partial \mu_a}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] \right] + S_\Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2)$$

et

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (3)$$

où

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4)$$

$$\mu_a = \left[ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (5)$$

et

$$S_\Omega = Pr \left[ \left[ \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial y^2} \right] \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] - 2 \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial x \partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right] + Pr Ra \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6)$$

Dans le système d'équations ci-dessus, les quantités adimensionnelles,  $\mu_a$  et  $S_\Omega$ , sont respectivement la viscosité apparente et le terme source. Les conditions aux limites associées au problème sont :

$$u = v = \psi = \partial T / \partial x + 1 = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ and } 1 \quad (7)$$

$$u = v = \psi = \partial T / \partial y = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ and } 1 \quad (8)$$

En plus de l'indice de comportement,  $n$ , deux autres paramètres adimensionnels apparaissent dans les équations, à savoir les nombres de Prandtl et de Rayleigh généralisés définis respectivement par :

$$Pr = \frac{(k/\rho) H'^{2-2n}}{\alpha^{2-n}} \quad \text{et} \quad Ra = \frac{g \beta H'^{2n+2} q'}{(k/\rho) \alpha^n \lambda} \quad (9)$$

auxquels s'ajoute le nombre de Nusselt moyen mesurant l'intensité du transfert de chaleur global dans la direction horizontale :

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu(y) dy \quad (10)$$

où

$$Nu(y) = \frac{q' L'}{\lambda \Delta T'} = \frac{1}{\Delta T} = \frac{1}{T(0, y) - T(1, y)} \quad (11)$$

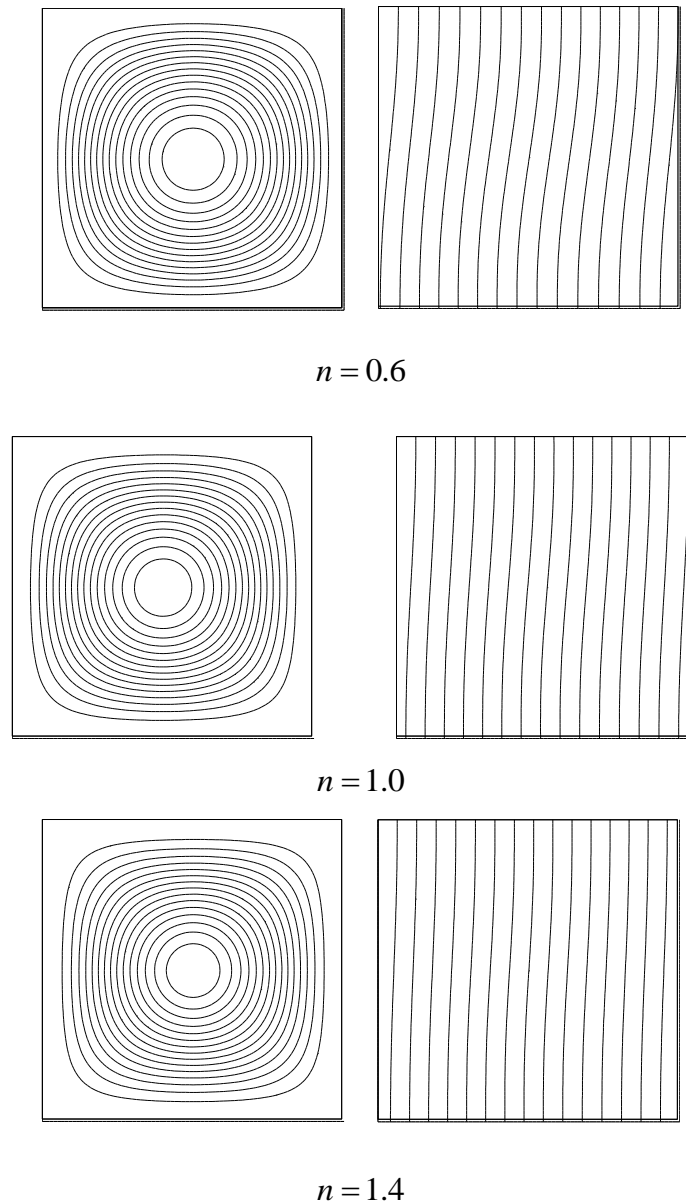
est le nombre de Nusselt local correspondant. Il convient de remarquer que pour  $n = 1$  les grandeurs adimensionnelles  $Pr$  et  $Ra$  retrouvent leurs expressions classiques Newtoniennes pourvue que la consistance  $k$  soit remplacée par la viscosité Newtonienne  $\mu$ .

### 3. SOLUTION NUMERIQUE

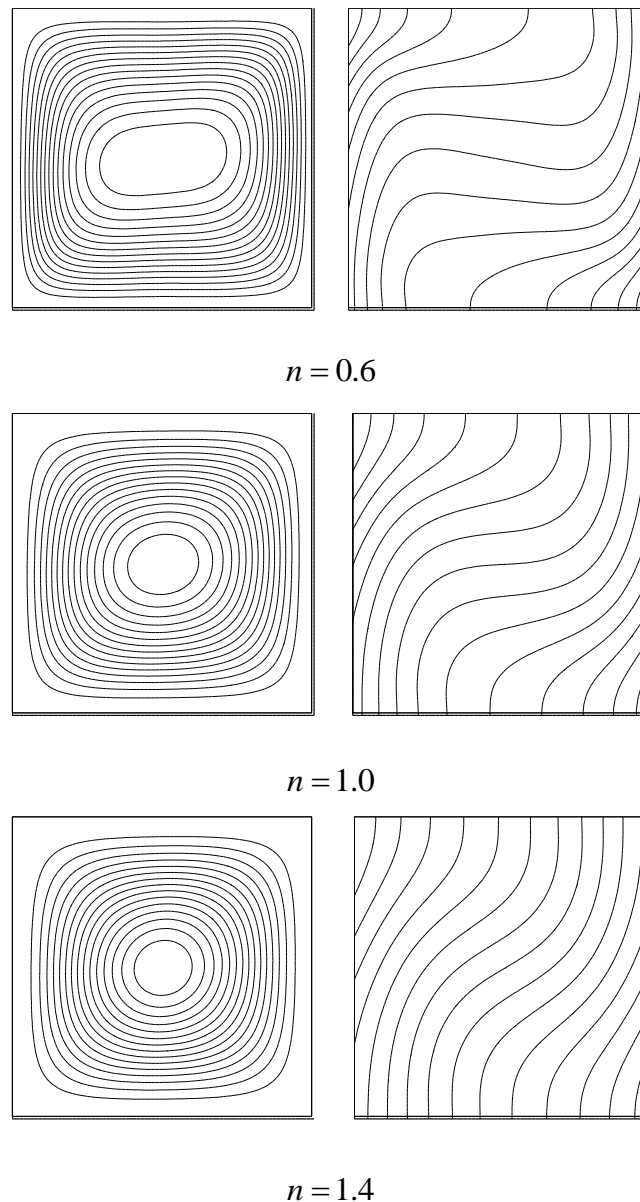
Les équations gouvernantes sont résolues en utilisant l'approche aux différences finies centrées dans un maillage régulier. L'intégration des équations (1) et (2) est effectuée à l'aide de la méthode implicite des directions alternées (ADI). L'équation (3), elle, est traitée au moyen de la méthode de sur-relaxation successive par point (PSOR) avec un facteur de relaxation optimal calculé à l'aide de la formule de Franckel [4]. Ainsi, la grille uniforme de taille  $81 \times 81$  est jugée suffisante pour modéliser convenablement les champs d'écoulement et de température au sein de la cavité carrée considérée.

#### 4. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Pour les fluides non-Newtoniens, les valeurs rencontrées pour  $Pr$  sont très élevées ce qui rend négligeable la contribution des termes convectifs dans l'équation (1). Par conséquent, la convection thermique devient insensible à toute variation des grandes valeurs de ce paramètre [4]. Ainsi, le problème de la convection naturelle au sein de la cavité considérée est gouverné par l'indice de comportement,  $n$ , auquel sont affectées les valeurs 0.6, 1.0 et 1.4 pour inclure les comportements pseudo-plastique ( $0 < n < 1$ ), Newtonien ( $n = 1$ ) et dilatant ( $n > 1$ ), et le nombre de Rayleigh,  $Ra$ , qui prend les valeurs  $10^2$ ,  $10^4$  et  $10^6$  pour rendre compte des convections faible, modérée et relativement forte.



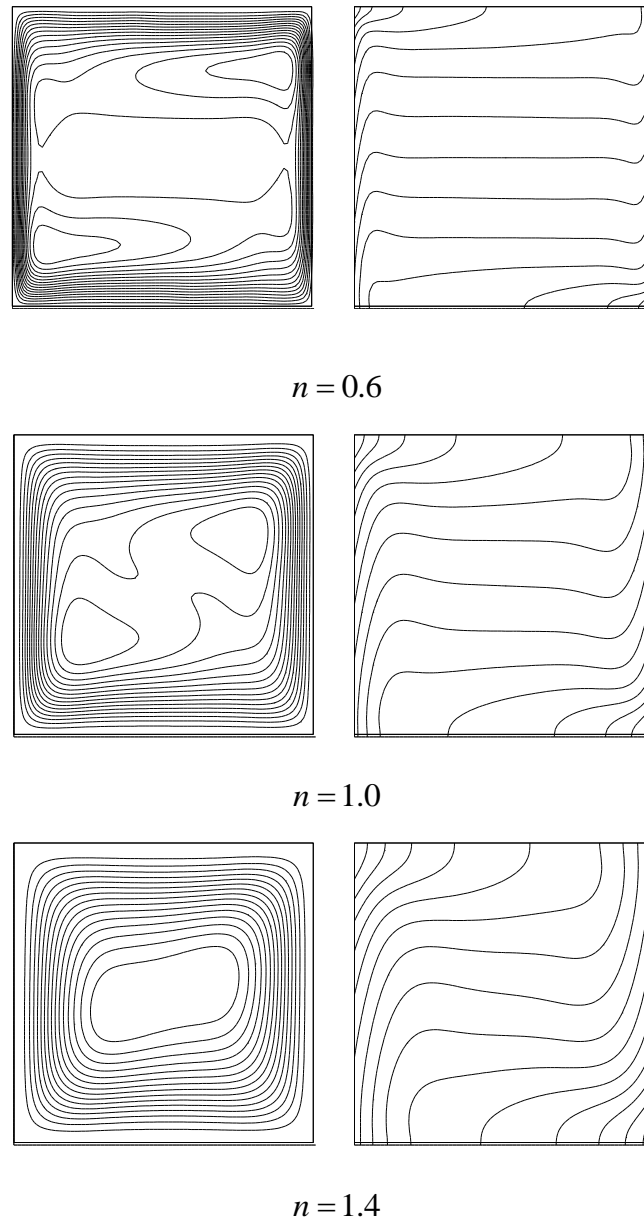
**Figure. 2.** Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour  $Ra = 10^2$  et différentes valeurs de  $n$ .



**Figure 3.** Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour  $Ra = 10^4$  et différentes valeurs de  $n$ .

Des configurations d'écoulement et de température, obtenues numériquement, pour  $Ra = 10^2$  (convection faible),  $Ra = 10^4$  (convection modérée) et  $Ra = 10^6$  (convection relativement forte) et pour  $n = 0.6, 1$  et  $1.4$ , sont présentées dans la figure 2. Leur examen permet de donner une idée sur les effets conjugués des paramètres  $n$  et  $Ra$ , sur la convection à l'intérieur de la cavité.

Pour  $Ra = 10^2$ , la figure 2 montre globalement que l'écoulement est unicellulaire pour les valeurs de  $n$  considérés. Qualitativement, les lignes de courant semblent moins sensibles aux variations de  $n$  que les isothermes qui, elles, tendent à devenir verticale en augmentant  $n$ , témoignant ainsi de la mise en place progressive du régime de conduction.



**Figure 4.** Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour  $Ra = 10^6$  et différentes valeurs de  $n$ .

Pour  $Ra = 10^4$ , comme on peut le voir sur la figure 3, l'écoulement demeure unicellulaire, mais avec une tendance des lignes de courant à devenir moins serrées au niveau des parois en augmentant  $n$ , indiquant une convection de moins en moins intense au cours d'une telle évolution. Une conclusion analogue peut être tirée des isothermes qui deviennent moins déformées lorsque  $n$  passe de 0.6 à 1.4.

Finalement, pour  $Ra = 10^6$ , la figure 4 montre, pour  $n = 0.6$ , une rupture de la structure d'écoulement unicellulaire et un développement de couches limites au niveau des parois thermiquement actives.

Cela se traduit, en fait, par des lignes de courant bien serrées au niveau des parois verticales et des isothermes présentant une zone plate s'étalant horizontalement sur la majeure partie de la cavité et des zones de forts gradients du côté des bords verticaux. En augmentant progressivement  $n$  jusqu'à 1.4, la structure de l'écoulement recouvre sa forme unicellulaire bien organisée avec une disparition relative des couches limites, aussi bien dynamiques que thermiques, et une réduction au même temps de la zone de faible gradient thermique comme le montrent les isothermes.

Ces observations qualitatives trouvent confirmation dans le tableau 1, dans lequel sont répertoriées les valeurs de l'intensité de l'écoulement,  $|\psi_{max}|$ , et celles du taux de transfert de chaleur moyen,  $\overline{Nu}$ , pour les valeurs de  $n$  et de  $Ra$  considérées dans cette étude. Ainsi, comme on peut l'observer, une augmentation de  $n$ , à  $Ra$  fixe, conduit à une diminution de  $|\psi_{max}|$  et de  $\overline{Nu}$  alors qu'une augmentation de  $Ra$ , à  $n$  fixe, produit l'effet contraire. Il convient donc de souligner les effets conjugués opposés des paramètres gouvernants,  $n$  et  $Ra$ , sur la convection thermique.

$Ra$	$n$ 0.6		$n$ 1.0		$n$ 1.4	
	$ \psi_{max} $	$\overline{Nu}$	$ \psi_{max} $	$\overline{Nu}$	$ \psi_{max} $	$\overline{Nu}$
$10^2$	0.216	1.007	0.126	1.003	0.102	1.002
$10^4$	5.038	3.575	3.160	1.982	1.829	1.350
$10^6$	10.107	16.887	6.743	6.456	6.249	3.621

**Tableau 1 :** Valeurs de  $|\psi_{max}|$  et de  $\overline{Nu}$  pour différentes valeurs de  $n$  et de  $Ra$ .

Pour expliquer l'incidence du comportement rhéologique sur l'écoulement et le transfert, il faut se référer à la relation constitutive (5), exprimant l'évolution en puissance de la viscosité apparente adimensionnelle avec le taux de cisaillement généralisé. En effet, une augmentation de  $n$  mène à une augmentation de la viscosité apparente, connue généralement pour son rôle de freinage du mouvement du fluide. En revanche, une diminution de  $n$  réduit la viscosité et augmente par la même occasion la fluidité ce qui se traduit par une intensification de l'écoulement et donc une amélioration du transfert de chaleur ou en d'autres termes une amplification de la convection. Des observations similaires concernant les influences de  $n$  et de  $Ra$  sur la convection ont été rapportées dans le passé par Turki [3] et Hadim et al. [5], lors de leurs investigations sur la convection naturelle d'un fluide non-Newtonien confiné, respectivement, dans des cavités fluide et poreuse différentiellement chauffées dans la direction horizontale.

## 5. CONCLUSION

L'étude de la convection naturelle dans une cavité carrée, chauffée horizontalement et remplie de fluides non-Newtoniens, à comportement en loi de puissance, est entreprise par voie numérique. Les résultats obtenus apportent des informations précises sur l'incidence du comportement rhéologique sur les champs dynamique et thermique, et sur le transfert thermique résultant.

Il apparaît, clairement, qu'une augmentation de l'indice de comportement,  $n$ , réduit la convection thermique, alors qu'une diminution de ce paramètre produit l'effet opposé et conduit à une sérieuse altération de la structure de l'écoulement pour les valeurs relativement élevées du nombre de Rayleigh,  $Ra$ . Ceci montre, donc, que le comportement pseudo-plastique ( $0 < n < 1$ ) favorise la convection alors

que celui dilatant ( $n > 1$ ) la défavorise.

## 6. REFERENCES

1. Ostrach, S., "Natural Convection in Enclosures", J. Heat Transfer, Vol. 110, pp.1175-1190, 1988.
2. Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R. L., and Sammakia, B., Buoyancy-Induced Flows and Transport, chap. 16, Hemisphere, Washington, DC, 1988.
3. Turki, S., Contribution à l'étude numérique des transferts par convection naturelle et par convection mixte dans les fluides non-Newtoniens confinés, Thèse de Doctorat, CNAM, Paris, France, 1990.
4. Lamsaadi, M., Naïmi, M., and Hasnaoui, M., Natural convection heat transfer fluids in shallow horizontal rectangular enclosures uniformly heated from the side and filled with non-Newtonian power-law fluids, En. Con. Man., Vol. 47, pp. 2535-2551, 2006.
5. Hadim, H., Non-Darcy natural convection of a non-Newtonian fluid in a porous cavity, Int. Com. Heat Mass Transfer, Vol. 33, pp. 1179–1189, 2006.