

Un nouveau modèle pour la prise en compte de la dissymétrie dans les structures composites

M. Karama

Université de Toulouse, INPT, ENIT, Laboratoire de Génie de Production
47, av d'Azereix BP 1629, F-65016 Tarbes, moussa@enit.fr

S. Mistou

Université de Toulouse, INPT, ENIT, Laboratoire de Génie de Production
47, av d'Azereix BP 1629, F-65016 Tarbes.

Résumé

Les structures composites multicouches sous forme de plaques sont de plus en plus fréquemment utilisées pour la conception de structures mécaniques. Liées à une grande légèreté, ce sont en général des structures résistantes, susceptibles de supporter des chargements importants. Dans ce travail nous proposons la mise en place d'un nouveau modèle théorique de structures multicouches pour répondre à différentes fonctionnalités. En l'absence de solutions exactes (pour les multicouches non symétriques) la validité du modèle sera testée sur des problèmes issus de solutions tridimensionnelles obtenues par éléments finis.

Abstract

The multi-layer composite structures are more and more frequently used for the design of mechanical structures. Dependent on a great lightness, they are in general structures resistant, likely to support important loadings. In this work we propose a new model of multi-layer structures to answer the various following functionalities: to treat the non-symmetrical multi-layer structures, to check the boundaries conditions exactly, to check continuity for displacements and stresses shear transverse to the interfaces of the multi-layer structures, to improve refinement of the terms of membrane and transverse shearing. In the absence of exact solutions (for multi-layer the non-symmetrical ones) the validity of the model will be tested on problems resulting from three-dimensional solutions obtained by finite elements.

1. INTRODUCTION

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La plupart de ces modèles n'assurent pas la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces des couches qui présentent des propriétés mécaniques différentes et ne traitent pas les structures non-symétriques [1]. Or, lors de la conception des structures multicouches, il est nécessaire de vérifier le processus de transfert de charge, donc la prise en compte des contraintes de cisaillement transverse, pour le dimensionnement. Les différentes approches envisageables pour le traitement des structures composites peuvent être regroupées de la façon suivante :

- Approche monocouche équivalente
- Approche continuité aux interfaces (couches discrètes)
- Approche développement asymptotique
- Approche tridimensionnelle

He [2], à partir des travaux de Di Sciuva [1] a proposé une résolution permettant une représentation unifiée des variations du champ de déplacement suivant l'épaisseur et en faisant une analyse cinématique rigoureuse (1) :

$$\begin{aligned} U_{\alpha}(x_1, x_2, x_3, t) &= u_{\alpha}^0(x_1, x_2, t) - x_3 w_{,\alpha}(x_1, x_2, t) + h_{\alpha}(x_3) \phi_{\alpha}(x_1, x_2, t), \alpha = 1, 2 \\ U_3(x_1, x_2, t) &= w(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (1)$$

avec, u_{α}^0 est le champ membranaire, w est le déplacement transversal, ϕ_{α} est le champ de cisaillement transverse, et

$$h_{\alpha}(x_3) = g(x_3) + \sum_{m=1}^{N-1} \lambda_{\alpha}^{(m)} \left[\frac{-x_3}{2} + \frac{f(x_3)}{2} + (x_3 - x_3^{(m)}) H(x_3 - x_3^{(m)}) \right]$$

où $f(x_3)$ est la fonction de raffinement du cisaillement, $g(x_3)$ est la fonction de raffinement membranaire, $H(x_3 - x_3^{(m)})$ est la distribution de Heaviside définie par :

$$H(x_3 - x_3^{(m)}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x_3 \geq x_3^{(m)} \\ 0 & \text{pour } x_3 < x_3^{(m)} \end{cases}$$

Cette cinématique permet de vérifier automatiquement les conditions de continuité des déplacements et des contraintes aux interfaces, ainsi que les conditions aux frontières. Le nombre de déplacements généralisés est par le biais d'approximations associées à la vérification des conditions aux limites et aux frontières, ramené à cinq. La fonction de Heaviside est, de même que dans les travaux de Di Sciuva [1], introduite en facteur des déplacements associés à chaque couche. Ainsi, la continuité du vecteur déplacement à la traversée des interfaces est assurée. Par contre, la cinématique est polynomiale suivant la variable d'épaisseur, ce qui ne permet pas d'obtenir les résultats les plus précis, en particulier en ce qui concerne le calcul des contraintes de cisaillement transverse. La contrainte normale n'est pas prise en compte.

1.1 Historique des fonctions de raffinement du cisaillement et de la membrane

Les différents travaux effectués sur le sujet peuvent être résumés (en citant les travaux les plus récents) selon l'historique suivant :

- 1991, Touratier [3] (structures symétriques) :

$$f(x_3) = \frac{h}{\pi} \text{Sin} \left(\pi \frac{z}{h} \right) \text{ et } g(x_3) = \frac{h}{\pi} \text{Cos} \left(\pi \frac{z}{h} \right)$$

- 2003, KAM [4] (structures symétriques):

$$f(x_3) = x_3 \text{Exp} \left(-2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right) \text{ et } g(x_3) = -x_3 \text{Exp} \left(-2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right)$$

- 2004, KAM (structures non-symétriques, modèle développé dans le cadre de cette étude) :

$$f(x_3) = \left(-\frac{h}{2}\right) \ln \left[\frac{1}{2} + 2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right] \text{ et } g(x_3) = -x_3 \exp \left[-2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right]$$

Ce dernier modèle est introduit pour répondre à une insuffisance des modèles existants pour traiter les structures multicouches et sandwichs présentant une dissymétrie tant géométrique que matérielle. Nous présenterons les développements de ce nouveau modèle dans le cas des poutres et plaques, l'extension aux coques est possible.

2. POUTRE

2.1 Les poutres multicouches

Dans le cas d'une poutre multicouche à deux dimensions, à partir des équations précédentes (1) la cinématique s'écrit:

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_3, t) &= u_1^0(x_1, t) - x_3 w_{,1}(x_1, t) + h_1(x_3) \phi_1(x_1, t) \\ U_2 &= 0 \\ U_3(x_1, t) &= w(x_1, t) \end{aligned} \quad (2)$$

où

$$h_1(x_3) = g(x_3) + \sum_{m=1}^{N-1} \lambda_1^{(m)} \left[\frac{-x_3}{2} + \frac{f(x_3)}{2} + (x_3 - x_3^{(m)}) H(x_3 - x_3^{(m)}) \right]$$

L'introduction d'une nouvelle cinématique s'inspire des travaux développés dans le cadre de la thèse d'Afaq [4] pour traiter les structures multicouches et sandwichs dissymétriques et se résume par les fonctions tests suivantes:

$$f(x_3) = \left(-\frac{h}{2}\right) \ln \left[\frac{1}{2} + 2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right] : \text{ fonction logarithmique de raffinement du cisaillement}$$

$$g(x_3) = -x_3 \exp \left[-2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right] : \text{ fonction exponentielle de raffinement membranaire}$$

A partir de cette nouvelle cinématique, une formulation variationnelle basée sur le principe des puissances virtuelles est développée pour établir les équations d'équilibre et les conditions aux limites naturelles.

2.2 Les équations d'équilibre avec continuité aux interfaces

On utilise le principe des puissances virtuelles pour obtenir les équations d'équilibre et les conditions aux limites :

- Puissance virtuelle des quantités d'accélération :

$$P_{(a)}^* = \int_0^L \left(\Gamma^{(u)} u_1^{0*} + \Gamma^{(w)} w^* + \Gamma^{(\phi)} \phi_1^* \right) dx_1 + \bar{\Gamma}^{(w)} w^* \quad (3)$$

avec

$$\Gamma^{(u)} = I_w \ddot{u}_1^0 + I_{uw} \ddot{w}_{,1}^0 + I_{u\omega} \ddot{\phi}_1, \quad \Gamma^{(w)} = -I_{uw} \ddot{u}_{1,1}^0 + I_w \ddot{w} - I_w \ddot{w}_{,11} - I_{\omega w} \ddot{\phi}_{1,1},$$

$$\Gamma^{(\phi)} = I_{u\omega} \ddot{u}_1^0 + I_{\omega w} \ddot{w}_{,1} + I_{\omega} \ddot{\phi}_1 \quad \text{et} \quad \bar{\Gamma}^{(\omega)} = I_{uw} \ddot{u}_1^0 + I_w \ddot{w}_{,1} + I_{\omega w} \ddot{\phi}_1$$

– Puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$P_{(i)}^* = \int_0^L (N_{11,1} u_1^{0*} + M_{11,11} w^* + (P_{11,1} - P_{13}) \phi_1^*) dx_1 - N_{11} u_1^{0*} - M_{11,1} w^* + M_{11} w_{,1}^* - P_{11} \phi_1^* \quad (4)$$

– Puissance virtuelle des efforts extérieurs :

$$P_{(e)}^* = \int_0^L (\bar{n}_1 u_1^{0*} + (\bar{n}_3 + \bar{m}_{1,1}) w^* + \bar{p}_1 \phi_1^*) dx_1 + \bar{N}_1 u_1^{0*} (\bar{N}_3 - \bar{m}_1) w^* - \bar{M}_1 w_{,1}^* + \bar{P}_1 \phi_1^* \quad (5)$$

2.2.1 Equations d'équilibre et conditions aux limites naturelles

A partir des équations (2-5) on déduit pour les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(u)} &= N_{11,1} + \bar{n}_1 \\ \Gamma^{(w)} &= M_{11,11} + (\bar{n}_3 + \bar{m}_{1,1}) \\ \Gamma^{(\phi)} &= P_{11,1} - P_{13} + \bar{p}_1 \end{aligned} \quad (6)$$

et les conditions aux limites naturelles: $\forall (u_1^{0*}, w^*, \phi_1^{0*}, w_{,1}^*)$

$$\begin{aligned} 0 &= -N_{11} + \bar{N}_1 \\ \bar{\Gamma}^{(w)} &= M_{11,1} + (\bar{N}_3 - \bar{m}_1) \\ 0 &= -P_{11} + \bar{P}_1 \\ 0 &= M_{11} - \bar{M}_1 \end{aligned} \quad (7)$$

La loi de comportement généralisée modifiée ($\sigma_{33} = 0$) s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{13} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} C'_{11} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ 2\varepsilon_{13} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad C'_{11} = \frac{C_{11} C_{33} - C_{13}^2}{C_{33}} \quad (8)$$

Les équations d'équilibre deviennent:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(u)} &= A_{11} u_{1,11}^{0*} - B_{11} w_{,111} + \tilde{K} \phi_{1,11} + \bar{n}_1 \\ \Gamma^{(w)} &= B_{11} u_{1,111}^{0*} - D_{11} w_{,1111} + \tilde{T} \phi_{1,111} + \bar{n}_3 + \bar{m}_{1,1} \\ \Gamma^{(\phi)} &= \tilde{K} u_{1,11}^{0*} - \tilde{T} w_{,111} + \tilde{S} \phi_{1,11} - \tilde{Y} \phi_1 + \bar{p}_1 \end{aligned} \quad (9)$$

et les conditions aux limites naturelles:

$$\begin{aligned} 0 &= A_{11} u_{1,1}^{0*} - B_{11} w_{,11} - \tilde{K} \phi_{1,1} + \bar{N}_1 \\ \bar{\Gamma}^{(w)} &= -B_{11} u_{1,11}^{0*} + D_{11} w_{,111} - \tilde{T} \phi_{1,11} + \bar{N}_3 - \bar{m}_1 \\ 0 &= -\tilde{K} u_{1,1}^{0*} + \tilde{T} w_{,11} - \tilde{S} \phi_{1,1} + \bar{P}_1 \\ 0 &= -B_{11} u_{1,1}^{0*} - D_{11} w_{,11} + \tilde{T} \phi_{1,1} - \bar{M}_1 \end{aligned} \quad (10)$$

2.3 Cas d'une poutre non symétrique à 2 couches [0°/90°]

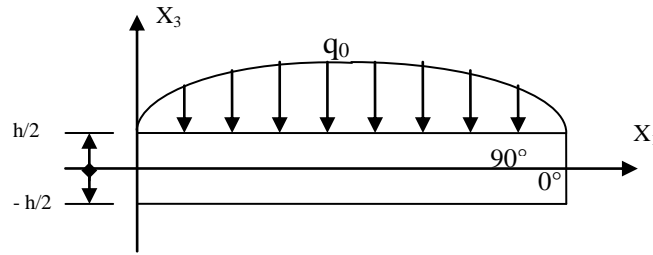


Figure 1 : Poutre [0°/90°] chargé sinusoidalement

La poutre stratifiée est composée de deux couches (de longueur $L=6.35$ m et de hauteur $h=2.794$ m, l'épaisseur est unitaire) en bore/époxy [0°/90°] ; elle est simplement appuyée et soumise à une charge sinusoidale ($q = q_0 \sin(\pi x_1 / a)$, $q_0 = 1$ MPa). Les deux couches sont d'égale épaisseur.

2.3.1 Calcul des coefficients de continuité

Pour calculer les coefficients de continuité, on se place à l'interface et en appliquant la condition de continuité des contraintes de cisaillement transverse (11), on obtient $\lambda_1^{(1)}$:

$$\sigma_{13}^{(m)}(x_3 = x_3^{(m)}) = \sigma_{13}^{(m+1)}(x_3 = x_3^{(m)}) \quad (11)$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{(Q_{55}^{(2)} - Q_{55}^{(1)}) g'(x_3)}{(Q_{55}^{(1)} - Q_{55}^{(2)}) \left(\frac{-1}{2} + \frac{f'(x_3)}{2} \right) - Q_{55}^{(2)}}$$

Les calculs analytiques sont faits à l'aide du logiciel de calcul formel «Mathematica V5». Les propriétés mécaniques pour la couche de 0° sont :

$$E_{11} = 241,5 \text{ GPa}, E_{22} = E_{33} = 18,89 \text{ GPa}, G_{13} = G_{12} = 5,18 \text{ GPa}, G_{23} = 3,45 \text{ GPa},$$

$$\nu_{13} = \nu_{12} = 0,25, \nu_{23} = 0,24, \rho = 2015 \text{ Kg} / \text{m}^3$$

2.3.2 Solutions de Levy

Dans le cas statique, la puissance virtuelle des quantités d'accélération s'annule. Les composantes des forces de surface et de volume sont nulles sauf la composante « f_3 ». On déduit alors la valeur de \bar{n}_3 :

$$\bar{n}_3 = \int_0^h f_3 dx_3 = q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)$$

Avec $q_0=1$ MPa. Pour le cas étudié les solutions de Levy sont de la forme:

$$u_1^0 = u_0 \cos\left(\frac{\pi x_1}{L}\right), \quad w = w_0 \sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right), \quad \phi_1 = \phi_0 \cos\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) \quad (12)$$

Les équations d'équilibre (6) deviennent :

$$0 = A_{11} \alpha^2 u_0 \cos \alpha x_1 + B_{11} \alpha^3 w_0 \cos \alpha x_1 - \tilde{K} \alpha^2 \phi_0 \cos \alpha x_1 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\pi}{L}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= B_{11}\alpha^3 u_0 \sin \alpha x_1 - D_{11}\alpha^4 w_0 \sin \alpha x_1 + \tilde{T}\alpha^3 \phi_0 \sin \alpha x_1 + q_0 \sin \alpha x_1 \\
 0 &= -\tilde{K}\alpha^2 u_0 \cos \alpha x_1 + \tilde{T}\alpha^3 w_0 \cos \alpha x_1 - \tilde{S}\alpha^2 \phi_0 \cos \alpha x_1 - \tilde{Y}\phi_0 \cos \alpha x_1
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

2.3.3 Résultats

Le modèle élément fini est réalisé avec le logiciel ABAQUS V6.2. Les éléments utilisés (dans le cas d'une poutre 2D) sont de type CPS8. Les différents résultats concernent les déplacements et les contraintes obtenus par des méthodes analytiques (résolution du modèle développé dans le cadre de cette étude) et des solutions obtenues par éléments finis.

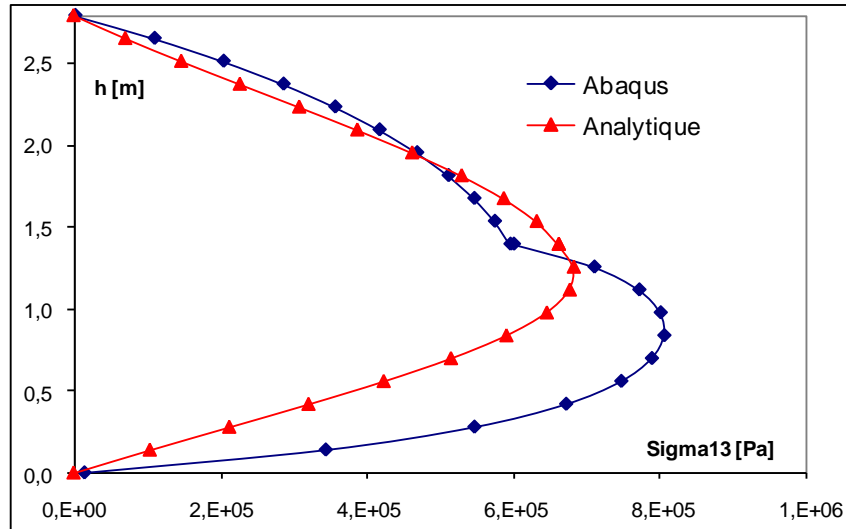


Figure 2: Variations de σ_{13} ($x_1 = 3a/4, x_3$)

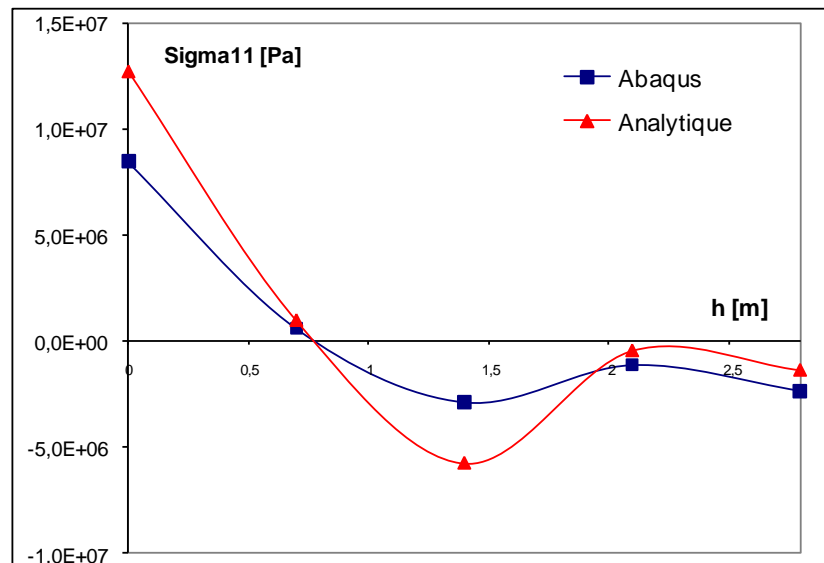


Figure 3: Variations de σ_{11} ($x_1 = a/2, x_3$)

3. Plaque

3.1- Les plaques multicouches non symétriques

L'équation (1) est utilisée pour décrire le comportement de la plaque (voir paragraphe 1), Les fonctions $h(x_3)$, $f(x_3)$ et $g(x_3)$ sont les mêmes que pour la poutre.

3.2- Les équations d'équilibre avec continuité aux interfaces

Pour les équations d'équilibre et les conditions aux limites avec continuité aux interfaces on utilise le principe des puissances virtuelles :

Les équations d'équilibre:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(u_1)} &= N_{11,1} + N_{12,2} + \bar{n}_1 \\
 \Gamma^{(u_2)} &= N_{22,2} + N_{12,1} + \bar{n}_2 \\
 \Gamma^{(w)} &= M_{11,11} + M_{22,22} + M_{12,12} + M_{12,21} + (\bar{n}_3 + \bar{m}_{1,1} + \bar{m}_{2,2}) \\
 \Gamma^{(\phi_1)} &= P_{11,1}^1 + P_{12,2}^1 - R_{13} + \bar{p}_1 \\
 \Gamma^{(\phi_2)} &= P_{22,2}^2 + P_{12,1}^2 - R_{23} + \bar{p}_2
 \end{aligned} \tag{14}$$

Les conditions aux limites naturelles:

$$\begin{aligned}
 0 &= -N_{11} - N_{12} + \bar{N}_1 \\
 0 &= -N_{22} - N_{12} + \bar{N}_2 \\
 \bar{\Gamma}^{(w)} &= -M_{11,1} - M_{22,2} + M_{12,12} - M_{12,2} + (\bar{N}_3 - \bar{m}_1 - \bar{m}_2) \\
 0 &= -P_{11}^1 - P_{12}^1 + \bar{P}_1 \\
 0 &= P_{22}^2 + P_{12}^2 + \bar{P}_1 \\
 0 &= M_{11} + M_{12} - \bar{M}_1 \\
 0 &= M_{22} + M_{12} - \bar{M}_2
 \end{aligned} \tag{15}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \bar{n}_i &= \int_{-h/2}^{h/2} f_i dx_3, & \bar{N}_i &= \int_{-h/2}^{h/2} F_i dx_3 \\
 \bar{m}_i &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 f_i dx_3, & \bar{M}_i &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 F_i dx_3 \\
 \bar{p}_i &= \int_{-h/2}^{h/2} h_1(x_3) f_i dx_3, & \bar{P}_i &= \int_{-h/2}^{h/2} h_1(x_3) F_i dx_3
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{ij} \\ M_{ij} \\ P_{ij}^\alpha \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ x_3 \\ h_\alpha(x_3) \end{array} \right\} dx_3$$

$$P_{ij}^{\alpha} = \sum_{k=1}^n \int_{x_3^{k-1}}^{x_3^k} h_{\alpha}(x_3) \sigma_{ij} dx_3$$

$$R_{i3} = \int_{x_3^{k-1}}^{x_3^k} h_{\alpha,3}(x_3) \sigma_{i3} dx_3$$

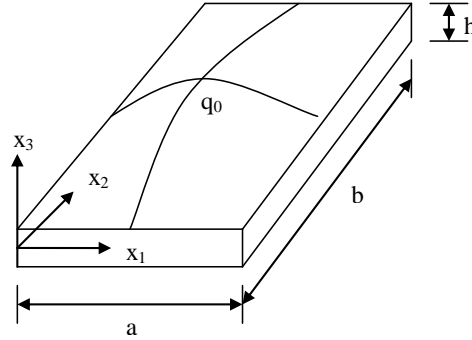


Figure 4: Plaque multicouche sous chargement doublement sinusoïdale.

3.3- Cas d'une plaque non symétrique avec 2 couches [0°/90°]

On traite ici le cas d'une plaque rectangulaire (figure 4) à deux couches d'épaisseurs égales et orientées [0°/90°]. Elle est soumise à une pression doublement sinusoïdale suivant sa longueur (x_1) et sa largeur (x_2), d'amplitude q_0 . La plaque est simplement appuyée sur ses bords. Le matériau est identique pour les deux couches, la couche 0° ayant comme propriétés mécaniques celles de Pagano [5] : $E_L/E_T=25$, $G_{LT}/E_T=0.5$, $G_{TT}/E_T=0.2, 0.25$, $E_T=6.895$ [GPa], 1600 kg/m³, $a = 4$, $b=3a$, $h=1$ $q = q_0 \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b)$, $q_0=1$ MPa

Pour le calcul des coefficients de continuité se référer à l'annexe.

3.3.1- Solution de Navier

En utilisant les solutions de Navier le système d'équilibre dans le cas statique devient:

$$u_1(x_1, x_2) = U \cos\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right)$$

$$u_2(x_1, x_2) = V \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right)$$

$$w(x_1, x_2) = W \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right)$$

$$\phi_1(x_1, x_2) = X_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right)$$

$$\phi_2(x_1, x_2) = Y_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x_2}{b}\right)$$
(17)

où, a et b sont les dimensions du multicouche, suivant les axes x_1 , respectivement x_2 . En notant

$\alpha = \left(\frac{\pi}{a}\right)$ et $\beta = \left(\frac{\pi}{b}\right)$, les équations d'équilibre deviennent:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{21} & G_{31} & G_{41} & G_{51} \\ G_{12} & G_{22} & G_{32} & G_{42} & G_{52} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} & G_{43} & G_{53} \\ G_{14} & G_{24} & G_{34} & G_{44} & G_{54} \\ G_{15} & G_{25} & G_{35} & G_{45} & G_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

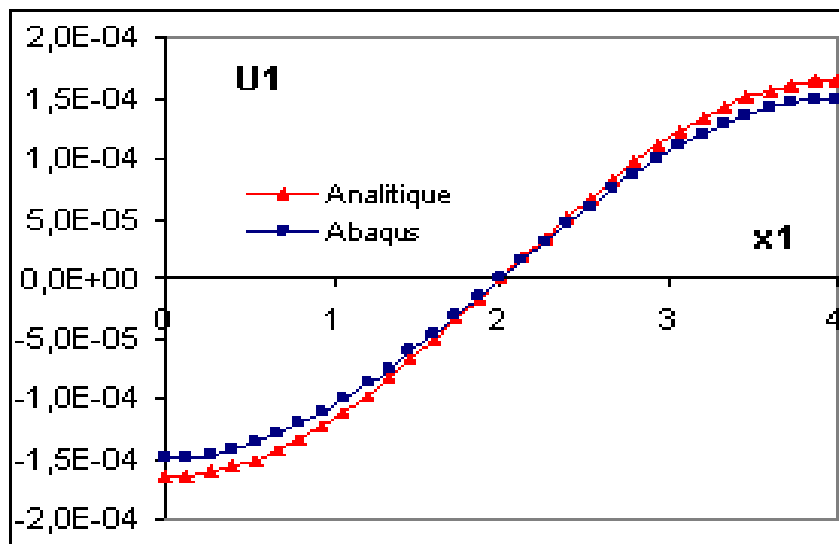


Figure 5: Variations de $u_1(x_1, x_2 = b/4, x_3 = -h/2)$ en fonction de x_1 .

3.3.2 Résultats

Les différents résultats concernent les déplacements et les contraintes obtenues par des méthodes analytiques (résolution du modèle développé dans le cadre de cette étude, voir détail de calcul à l'annexe) et des solutions obtenues par éléments finis (Figures 5 à 7).

3. CONCLUSIONS

Pour le modèle analytique de la poutre à deux couches on constate une bonne concordance des résultats pour les déplacements et les contraintes, cependant quelques écarts sont à signaler. La continuité à l'interface des deux couches est réalisée. La contrainte de cisaillement est mieux approximée par rapport au modèle numérique, l'erreur est de 9.3 %. L'erreur sur les déplacements est de 5.5 %. Le modèle numérique est pris comme référence. Pour le modèle analytique d'une plaque à deux couches on observe qu'on a une bonne approximation pour la contrainte. Pour les contraintes de cisaillement on trouve des valeurs très approchées par rapport au modèle numérique. Pour les déplacements on a une bonne corrélation sauf pour le déplacement U_2 .

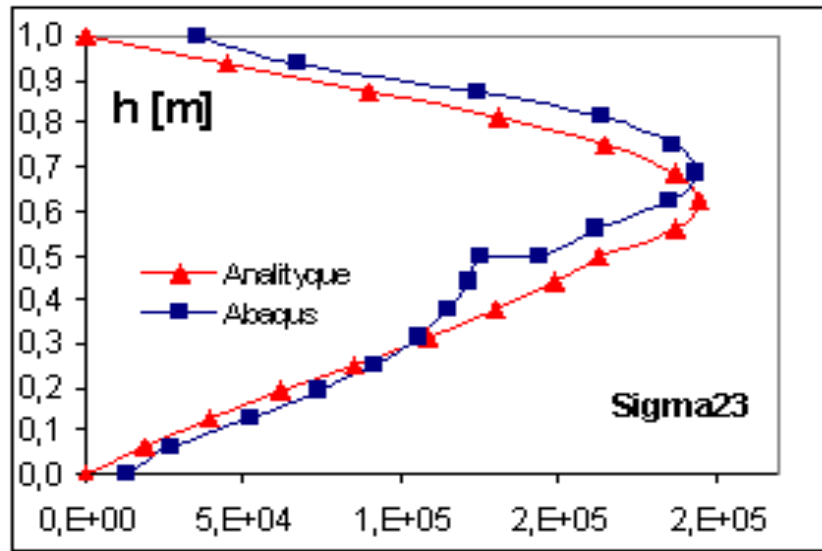


Figure 6: Variations de $\sigma_{23}(x_1 = a/2, x_2 = b/2, x_3)$ suivant la direction x_3 .

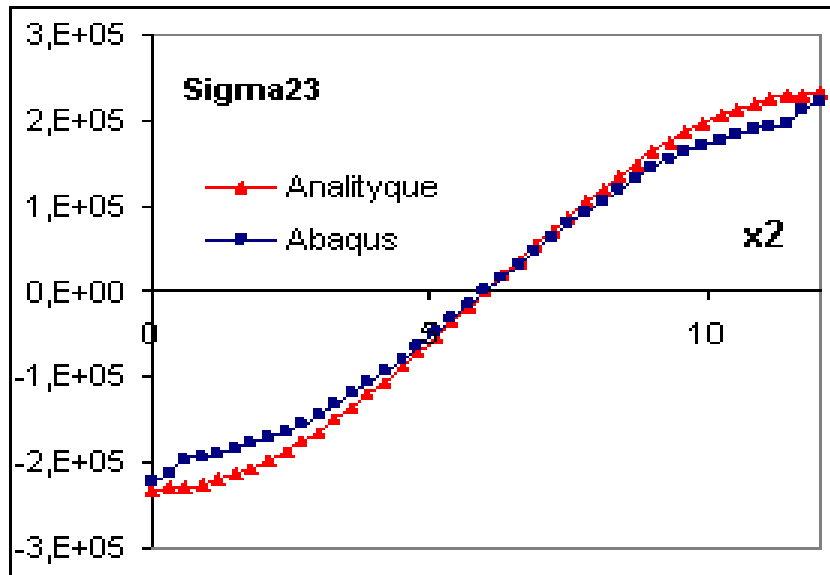


Figure 7: Variation de $\sigma_{23}(x_1 = a/2, x_2, x_3 = 0)$ suivant la direction x_2 .

4. REFERENCES

1. Di Sciuva M. A refined of the transverse shear deformation theory for multilayered orthotropic plates. L'Aerotecnica Missili e Spazio, 63/2 (1984) 84-91.

2. He L H. A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces. *Int. J. Solids Structure*, 31/5 (1994) 613-627.
3. Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int. J. Engg. Science*, 29/8 (1991) 901-916.
4. Afaq K. Développement d'un nouveau modèle composite pour les structures composites « multicouches et sandwiches » avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier (2003).
5. Pagano N. J., 1969. "Exact solutions for composite laminate in cylindrical bending", *J Compo. mater*, v. 3, pp. 398- 411.

5. ANNEXE

Les coefficients de continuité

$$\lambda_1^{(1)} = -0,857143$$

$$\lambda_2^{(1)} = 0,857143$$

Les déformations

$$\varepsilon_{11} = U_{1,1} = u_{1,1}^{0*} - x_3 w_{,11} + h_1 \phi_{1,1}$$

$$\varepsilon_{22} = U_{2,2} = u_{2,2}^{0*} - x_3 w_{,22} + h_2 \phi_{2,2}$$

$$2\varepsilon_{23} = h_{2,3} \phi_2$$

$$2\varepsilon_{13} = h_{1,3} \phi_1$$

$$\varepsilon_{12} = U_{1,2} + U_{2,1} = u_{1,2}^{0*} - x_3 w_{,12} + h_1 \phi_{1,2} + u_{2,1}^{0*} - x_3 w_{,21} + h_2 \phi_{2,1}$$

Les contraintes

$$\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \left(C_{11}^1 (-\alpha u_1 - x_3 (-\alpha^2) w + h_{1,3} (-\alpha) \phi_1) \right. \\ \left. + C_{12}^1 (-\beta u_2 - x_3 (-\beta^2) w + h_{1,3} (-\beta) \phi_2) \right) \sin(\alpha x_1) \sin(\beta x_2)$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2, x_3) = \left(C_{12}^1 (-\alpha u_1 - x_3 (-\alpha^2) w + h_{1,3} (-\alpha) \phi_1) \right. \\ \left. + C_{22}^1 (-\beta u_2 - x_3 (-\beta^2) w + h_{1,3} (-\beta) \phi_2) \right) \sin(\alpha x_1) \sin(\beta x_2)$$

$$\sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) = C_{44} h_{2,3} \phi_2 \sin(\alpha x_1) \cos(\beta x_2)$$

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) = C_{55} h_{1,3} \phi_1 \cos(\alpha x_1) \sin(\beta x_2)$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) = C_{66} (\beta u_1 - x_3 \alpha \beta w + h_{1,3} \beta \phi_1 + \alpha u_2 - x_3 \alpha \beta w + h_{2,3} \alpha \phi_2) \\ \cos(\alpha x_1) \cos(\beta x_2)$$

$$\sigma_{33} = - \int_{x_3} \sigma_{23,2} \partial x_3 - \int_{x_3} \sigma_{13,1} \partial x_3$$