

## **Modélisation Numérique du processus de remodelage osseux par optimisation topologique : application à la prothèse de hanche**

Jean-Marie Rossi

École Centrale Marseille,

38 rue Joliot Curie, 13451 Marseille cedex 20, France;

Institut des Sciences du Mouvement, CNRS-UMR 6233, Université de la Méditerranée, CP 910, 13288  
Marseille cedex 9.

Sylvie Wendling-Mansuy

École Centrale Marseille,

38 rue Joliot Curie, 13451 Marseille cedex 20, France;

Institut des Sciences du Mouvement, CNRS-UMR 6233, Université de la Méditerranée, CP 910, 13288  
Marseille cedex 9.

### **Résumé**

Le processus d'adaptation osseuse peut être envisagé comme un problème d'optimisation de structures avec une fonction objectif particulière. Nous proposons une telle méthode d'optimisation, dite topologique, utilisant les techniques d'homogénéisation, afin de prédire l'adaptation géométrique et structurale du tissu osseux soumis à un environnement mécanique physiologique avant et après implantation d'une prothèse.

### **Abstract**

Bone adaptation process can be considered as a structural optimization problem with a specific objective function. In this work, we extend the material model for topology optimization of structures (see e.g. [2, 16]) using homogenization to structures made of porous materials for predicting the internal structural architecture of bone tissue under physiological loading conditions before and after prosthetic implantation.

### **1. INTRODUCTION**

Le tissu osseux est un matériau vivant hétérogène et multi-échelle dont la structure, le contenu minéral et les propriétés mécaniques changent significativement durant la croissance et au cours de la vie. En s'adaptant à l'environnement mécanique et physiologique, *l'os se remodèle* continuellement par des processus cellulaires de résorption et d'apposition de tissu osseux. A l'échelle du tissu, il a été observé que la formation osseuse est favorisée par une augmentation de contraintes (fréquences de sollicitations et/ou amplitudes de déformations) et inversement la perte de masse osseuse est favorisée par un régime de sous-contraintes. Les premières observations datent des années 1800 grâce aux travaux de Wolff [19] qui décrit l'organisation spatiale des fibres osseuses suivant des lignes isostatiques permettant à l'os de supporter des efforts très importants (supérieurs à 10 fois leur propre poids) ainsi que les travaux de Roux [18] qui décrit l'ostéoporose de non utilisation et suggéra que les changements physiques du tissu osseux résultent d'un processus continu et dynamique de

remodelage contrôlé localement à une échelle cellulaire. Cette complexité rhéologique du tissu osseux (auto-adaptation architecturale et propriétés mécaniques dynamiques, anisotropie, non linéarité) ainsi que les processus spécifiques de remodelage osseux sous jacents sont mis en évidence plus particulièrement dans les cas de pathologies, de vieillissement et d'arthroplastie.

La présence d'un implant, corps étranger de géométrie déterminée et surtout de rigidité différente du milieu environnant, perturbe fortement le remodelage osseux. En effet, Lors des sollicitations mécaniques physiologiques, l'implantation au sein de l'os d'une prothèse va conduire à une répartition modifiée des contraintes proportionnelle à la rigidité respective de chacune des structures. La diminution des contraintes supportées par l'os peut conduire à une ostéoporose régionale, véritable atrophie osseuse se traduisant par un amincissement de la corticale et une augmentation de sa porosité et aboutit à une perte de fonctionnalité de la prothèse implantée.

De nombreux modèles théoriques ont été développés pour simuler l'adaptation mécanique de l'os ou du remodelage osseux à l'échelle tissulaire (voir [14, 12]). Globalement, ces modèles ont été développés suivant deux approches.

Celle utilisée dans les premiers modèles de croissance, remodelage ou dégradation osseuse (voir par exemple [10, 15]), considère un critère local d'énergie de déformation qui permet de déterminer la variation de la densité osseuse en fonction de différents paramètres tels que les champs de contraintes et de déformations locales, les conditions de chargements simples ou multiples, les taux de résorption/apposition ainsi que l'état dit de référence du matériau osseux. La seconde, utilisée dans les modèles plus récents [8, 7], est basée sur la théorie de l'optimisation de structures et part du postulat que l'os s'auto-adapte suivant un processus d'optimisation prenant en compte à la fois sa rigidité structurelle et sa masse. Nous nous intéressons ici à la formulation d'un problème d'optimisation de topologie [2, 17] à partir d'une fonction coût particulière pour décrire l'adaptation du tissu osseux à l'environnement mécanique. Dans cette formulation, le tissu osseux est considéré comme un matériau composite poreux occupant un domaine fixe et caractérisé, en chaque point du domaine, par :

- une densité variable,
- une microstructure représentant l'arrangement microscopique entre deux phases (une « solide » et une « vide ») et déterminé par une loi de Hooke effective.

Le problème à résoudre consiste alors à trouver, pour un chargement donné, la structure qui fournit le meilleur compromis masse/rigidité en minimisant la somme pondérée de la masse de la structure et de sa compliance (i.e., le travail des efforts extérieurs).

Dans les modèles de remodelage osseux basés sur cette approche, des auteurs ont fait le choix d'une classe a priori de microstructures pour définir la microstructure osseuse [7, 8]. Dans tous les cas, ce choix s'avère restrictif et fournit des solutions sous-optimales. Nous proposons de préciser le comportement mécanique du tissu osseux et son organisation architecturale interne en utilisant une classe de microstructures qui est solution exacte du problème d'optimisation de topologie étudié. Cette approche est appliquée à un modèle en 2 dimensions d'une articulation de la hanche normale et d'une arthroplastie totale de hanche afin d'identifier les modifications structurales et mécaniques à l'interface entre le matériau artificiel (la prothèse) et le tissu vivant (l'os) et ses effets sur le remodelage osseux sous jacent.

## 2. LE MODELE D'OPTIMISATION

### 2.1. Position du problème

Dans sa forme la plus classique, le problème *type* d'optimisation topologique peut être vu comme le processus d'identification de régions solides ou vides à l'intérieur d'un domaine fixe afin d'obtenir la structure la plus rigide pour une quantité donnée de matériau. Il est maintenant bien connu, depuis les travaux pionniers de Murat [13, 11], que le problème discret (« *matériau* » ou « *vide* ») est en général mal posé et doit être relaxé afin d'assurer l'existence de solutions. La formulation relaxée peut être obtenue grâce à la théorie de l'homogénéisation en permettant l'existence de matériaux composites, mélanges fins de matériau solide (de loi de Hooke  $A$ ) et de vide obtenus par microperforation. De tels composites sont caractérisés par deux fonctions :  $\theta(x) \in [0,1]$  la fraction volumique de matériau et  $A^{Hom}(x)$  le tenseur d'élasticité homogénéisé caractérisant la microstructure sous-jacente. Par la suite, on considérera l'os comme un tel composite occupant un domaine fixe  $\Omega$  chargé en sa frontière  $\partial\Omega$  par des forces données  $F$ . Les équations résultantes du problème s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = A^{Hom} : \varepsilon(u), & \varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla^t u) , \\ \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \cdot n = F & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $u$  (resp.  $\sigma$ ) sont les champs de déplacement (resp. de contraintes) solutions. De plus, on choisit de mesurer la rigidité de la structure par sa compliance  $C(\theta, A^{Hom})$  (ou travail des efforts extérieurs) définie par :

$$C(\theta, A^{Hom}) = \int_{\partial\Omega} F \cdot u \, ds = \int_{\Omega} \varepsilon(u) : A^{Hom} : \varepsilon(u) \, dx = \int_{\Omega} \sigma : A^{Hom^{-1}} : \sigma \, dx \quad (2)$$

On considère alors le problème d'optimisation qui consiste à minimiser la somme pondérée de la compliance et du poids sur l'ensemble des composites  $(\theta, A^{Hom})$  :

$$\min_{\substack{\theta \in L^\infty(\Omega; [0,1]) \\ A^{Hom} \in G_\theta}} C(\theta, A^{Hom}) + \lambda \int_{\Omega} \theta \, dx . \quad (3)$$

où  $\lambda$  désigne un multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte massique sur la phase solide  $A$ . L'ensemble des formes admissibles est décrit par :

- $\theta \in L^\infty(\Omega, [0,1])$  est la densité locale de matériau,
- $A^{Hom}$  est la loi de Hooke homogénéisée caractérisant la microstructure,
- $G_\theta$  est l'ensemble de toutes les lois de Hooke que l'on peut obtenir en microperforant le matériau original  $A$  par des trous en proportion  $(1-\theta)$ .

On peut aisément montrer que la valeur de la compliance fournit le minimum de l'énergie complémentaire parmi tous les champs de contraintes statiquement admissibles :

$$C(\theta, A^{Hom}) = \min_{\substack{\text{div}\tau=0 \text{ dans } \Omega \\ \tau \cdot n = F \text{ sur } \partial\Omega}} \int_{\Omega} \tau : A^{Hom^{-1}} : \tau \, dx \quad (4)$$

En utilisant (4) et en permutant l'ordre de minimisation en  $\tau$  et en  $(\theta, A^{Hom})$ , on peut réécrire le problème (3) sous la forme du double problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\substack{\text{div}\tau=0 \text{ dans } \Omega \\ \tau \cdot n = F \text{ sur } \partial\Omega}} \int_{\Omega} \min_{\substack{\theta \in L^{\infty}(\Omega; [0,1]) \\ A^{Hom} \in G_{\theta}}} \tau : A^{Hom^{-1}} : \tau + \lambda \theta \, dx \quad (5)$$

Bien que l'ensemble  $G_{\theta}$  ne soit pas connu explicitement, la minimisation sur  $G_{\theta}$  à  $\tau$  fixé du potentiel élastique de contrainte  $\tau : A^{Hom^{-1}} : \tau$  est, en théorie de l'homogénéisation, un problème classique dit de bornes optimales d'énergies effectives de composites. Il est maintenant bien connu [3, 4, 9, 5] que ce minimum peut être atteint dans un sous-ensemble  $L_{\theta}$  de composites particuliers de  $G_{\theta}$ , appelés *laminés séquentiels de rang  $N$*  construits par  $N$  mises en couches successives de matériau et de vide caractérisés par :

- des directions de laminations  $(n_i)_{1 \leq i \leq N}$ ,
- des proportions de lamination pour chacune des directions  $(m_i)_{1 \leq i \leq N}$  vérifiant  $m_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^N m_i = 1$ .

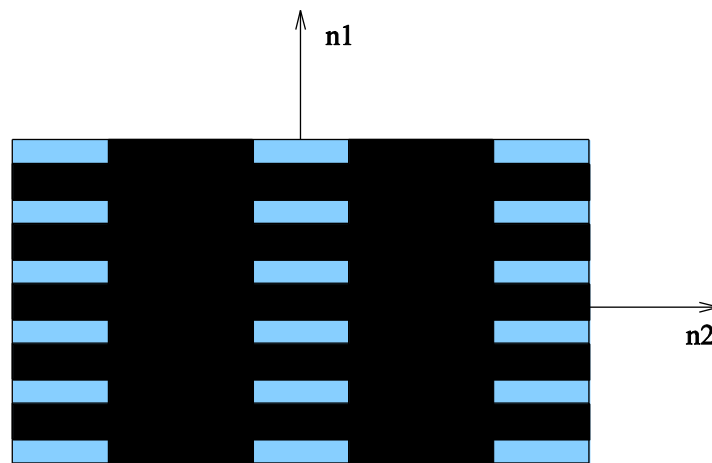


Figure. 1. microstructure laminée de rang 2.

La loi de Hooke optimale associée  $A_{opt}^{Hom}$  décrit donc un laminé séquentiel de rang  $N$  avec comme directions de lamination les directions principales de  $\tau$ . En 2-D, la borne optimale sur l'énergie complémentaire est donnée par

$$\theta : A_{opt}^{Hom^{-1}} : \tau = \tau : A^{-1} : \tau + \frac{k + \mu}{4k\mu} \frac{1 - \theta}{\theta} (|\tau_1| + |\tau_2|)^2 \quad (6)$$

où :

- $\tau_1, \tau_2$  sont les valeurs propres de  $\tau$ ,
- $A$  la loi de Hooke du matériau solide linéaire isotrope de coefficients de compressibilité et de cisaillement  $k$  et  $\mu$

Les proportions optimales de laminations sont également données par :

$$m_1 = \frac{|\tau_2|}{|\tau_1| + |\tau_2|}; \quad m_2 = 1 - m_1 \quad (7)$$

La densité optimale est alors explicite :

$$\theta_{opt} = \min \left( \sqrt{\frac{k + \mu}{4k\mu\lambda}} (|\tau_1| + |\tau_2|), 1 \right). \quad (8)$$

## 2.2. Extension au multi-chargement

L'optimisation de structures réelles dans le cas d'un mono-chargement est généralement peu réaliste puisqu'elles sont le plus souvent soumises à différentes configurations de forces. Sur le modèle de [1] nous étendons les résultats obtenus pour l'optimisation en simple chargement au problème du multi-chargement. On suppose le domaine  $\Omega$  soumis successivement à  $p$  chargements surfaciques  $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$  et on cherche alors à minimiser la somme pondérée des compliances et de la masse, problème que l'on formule sous la forme :

$$\min_{\substack{\text{div} \tau_i = 0 \text{ dans } \Omega \\ \tau_i \cdot n = F \text{ sur } \partial\Omega}} \int_{\Omega} \min_{\theta \in L^\infty(\Omega; [0,1]), A^{Hom} \in G_\theta} \left( \sum_{i=1}^p \tau_i : A^{Hom^{-1}} : \tau_i dx + \lambda \theta \right) dx \quad (9)$$

D'un point de vue théorique, tous les résultats obtenus dans le cas du mono-chargement restent valides dans le cas du multi-chargement et l'on sait [6] que le minimum de  $\sum_{i=1, \dots, p} \tau_i : C^{hom^{-1}} : \tau_i$  sur  $G_\theta$  est atteint en 2-D sur  $L_\theta$  pour un laminé de rang 3. Contrairement au cas précédent, les paramètres de lamination (directions et proportions) ne peuvent être calculés analytiquement pour cette microstructure optimale et doivent être déterminés numériquement. Dans ce but, nous utilisons la méthode dite des *directions orthogonales* développée par Allaire et al dans [1].

### 3. L'ALGORITHME NUMERIQUE

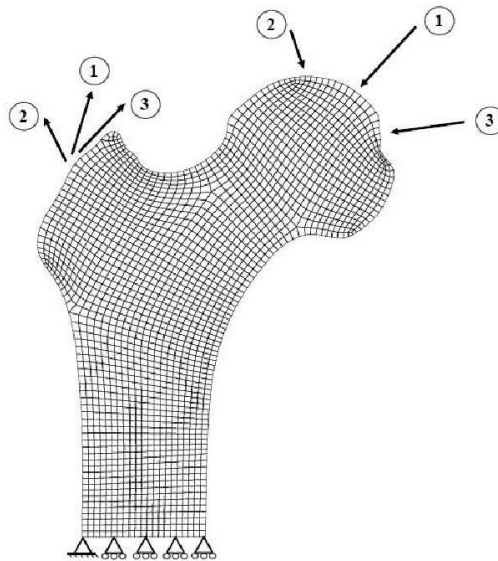
Nous présentons ici l'algorithme utilisé dans le cas du mono-chargement. Il s'agit d'un algorithme de type *directions alternées* décrit en détail dans [2, 16] qui consiste à minimiser successivement et de manière séparée en chacune des variables. La minimisation en  $\tau$ , champ de contraintes statiquement admissible, revient à résoudre un problème classique d'élasticité linéaire. La minimisation sur le couple de variables de forme  $(\theta, A^{Hom})$  à tenseur de contraintes fixé devient explicite grâce aux formules (7) et (8). Ces deux étapes donnent l'algorithme suivant :

1. Initialisation des variables de design  $(\theta_0, A_0^{Hom})$ .
2. Itération jusqu'à la convergence :
  - a. Pour  $(\theta_k, A_k^{Hom})$  variables de forme fixées, détermination de  $\tau_{k+1}$  solution du problème d'équilibre en élasticité linéaire avec une loi de Hooke  $A_k^{Hom}$ .
  - b. Réactualisation des variables de design  $(A_{k+1}^{Hom}, \theta_{k+1})$  à  $\tau_{k+1}$  fixé.

Afin d'obtenir une solution stable, l'optimisation en  $\tau$  est effectuée en utilisant une formulation par éléments finis de type déplacement avec des éléments quadrilatères à 8 noeuds tandis que les variables de forme  $(\theta, A^{Hom})$  sont déterminées au centre de chaque élément.

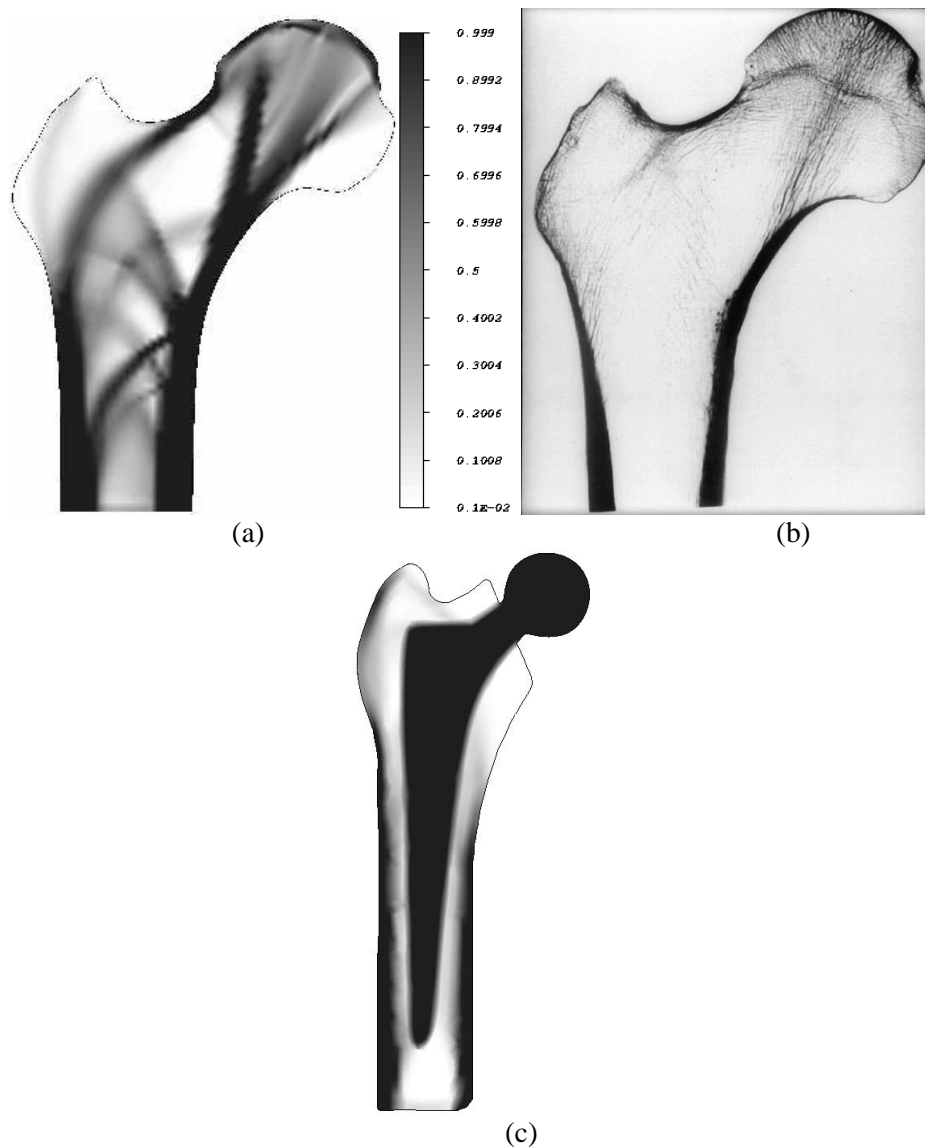
### 4. RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSIONS

Les résultats obtenus à partir du présent modèle d'optimisation de topologie montrent la distribution de densité osseuse dans la partie proximale du fémur dans le cas sain et dans le cas prothésé sous des chargements statiques caractéristiques de l'appui monopodal.



**Figure. 2.** Modèle par éléments finis, conditions aux limites et chargements.

La figure 2 montre une distribution de la densité osseuse mettant en évidence le tissu cortical le long de la diaphyse avec une forte densité osseuse ainsi que le tissu trabéculaire avec des travées relativement denses orientées au sein de l'épiphyse en analogie avec les observations biologiques (Fig. 2). De même, les directions principales prédites par le modèle correspondent à l'architecture interne du tissu trabéculaire au sein du fémur (résultats non montrés voir [17]). En présence de l'implant fémoral, il apparaît des modifications de la distribution de la densité osseuse autour du col de l'implant fémoral et en dessous de la tête fémorale (Fig. 2). Ces résultats confirment l'adaptation du tissu osseux aux contraintes mécaniques et l'importance des transferts de charges au sein de l'organe osseux. Il apparaît des modifications significatives de ces transferts de contraintes au sein de l'articulation prothésée qui confirment le processus dit de « *stress-shielding* » observé cliniquement. Dans ce cas, il s'agit de résorption osseuse de non utilisation (sous contraintes) dans la partie proximale du fémur et une formation d'un bourrelet (ou cale) osseux à la queue de l'implant (sur contraintes).



**Figure 3.** Distribution de densité osseuse (a) obtenue par le modèle en multi-charge (b) observée sur une radio d'une coupe proximale de fémur humain (c) en présence de l'implant fémoral.

## 5. CONCLUSIONS

Les premiers résultats obtenus par le modèle d'optimisation de topologie en 2D sont encourageants pour décrire l'adaptation du tissu osseux aux contraintes mécaniques mais ils sont insuffisants pour décrire la réorganisation et le renouvellement du tissu osseux dans un volume et au cours du temps. Il est notamment envisagé de poursuivre ces travaux en développant un modèle 3D évolutif (en temps) pour, d'une part, se rapprocher de la géométrie réelle du fémur et considérer des chargements en torsion et flexion hors plan et, d'autre part, prendre en compte l'historique du chargement et sa variation moyenne au cours du temps.

Cependant, le présent modèle d'optimisation topologique d'adaptation du tissu osseux se démarque des modèles d'optimisation développés à ce jour par de nombreux auteurs par l'utilisation d'une microstructure optimale qui est la solution exacte du problème d'optimisation à résoudre. Il part des mêmes hypothèses que ceux des auteurs précédents, à savoir que l'os est un matériau vivant qui optimise simultanément son architecture, sa structure et ses propriétés mécaniques en réponse aux sollicitations mécaniques auxquelles il est soumis et que cette optimisation suit un critère global de rigidité. Les études menées jusqu'à présent ont permis de montrer la cohérence de ce modèle d'un point de vue qualitatif par rapport aux modèles développés ainsi qu'aux observations biologiques ([17]). Ce modèle pourra évoluer vers un modèle multi-échelle intégrant des critères locaux autres que la rigidité, qui prendra en compte des informations macroscopiques (chargements extérieurs, géométrie) et microscopiques (transfert fluide, activité cellulaire, microfissure, propriétés géométrique et mécanique locales) simultanément au cours du temps. In fine, ce modèle basé sur la méthode d'optimisation de topologie pourra contribuer significativement à la compréhension des modifications du remodelage osseux dans les cas pathologiques comme l'ostéoporose et le comportement à long terme des prothèses articulaires.

## 6. REFERENCES

- 1 Allaire, G. and Belhachmi, Z. and Jouve, F. The homogenization method for topology and shape optimization - single and multiple loads case. *Revue Européenne des éléments finis*, 5:649-672, (1996).
- 2 Allaire, G. and Francfort, G. A numerical method for topology and shape optimization. In Bendsøe, M.P. and Mota Soares, C.A., editors, *Topology Design of Structures*, pages 239-248, Dordrecht, (1993). Kluwer.
- 3 Allaire, G. and Kohn, R. Explicit bounds on the elastic energy of a two-phase composite in two space dimensions. *Quarterly of Applied Mathematics*, 51:675-699, (1993).
- 4 Allaire, G. and Kohn, R. Optimal bounds on the elastic energy of a the effective behaviour of a mixture of two well-ordered elastic materials. *Quarterly of Applied Mathematics*, 51:643-674, (1993).
- 5 Avellaneda, M. Optimal bounds and microgeometries for elastic two-phase composites. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 47:1216-1228, (1987).
- 6 Avellaneda, M. and Milton, G. Bounds on the effective elasticity tensor of composite based on two point correlations. In D. Hui et al. eds., editors, *ASME Energy Technology Conference and Exposition*, ASME Press. Houston, (1989).
- 7 Bagge, M. A model of bone adaptation as an optimization process. *Journal of Biomechanics*, 33:1349-1357, (2000).



- 8 Fernandes, P. and Rodrigues, H. and Jacobs, C. A model of bone adaptation using a global optimisation criterion based on the trajectorial theory of Wolff. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 2:125-138, (1999).
- 9 Francfort, G. and Murat, F. Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 94:307-334, (1986).
- 10 Huiskes, R. and Ruimerman, R. and Lenthe, G. H. V. and Janssen, J. D. Effects of mechanical forces on maintenance and adaptation of form in trabecular bone. *Nature*, 405:704-706, (2000).
- 11 Kohn, R. and Strang, G. Optimal design and relaxation of variational problems I-III. *Communication of Pure Applied Mathematics*, 39:113-137,139-182,353-377, (1986).
- 12 Kuhl, E. and Menzel, P. Computational modeling of growth. *Computational Mechanics*, (2003).
- 13 Murat, F. and Tartar, L. Calcul des variations et homogénéisation. *Les Méthodes de l'Homogénéisation: Théorie et Applications en Physique*, pages 319-369. Collection de la Direction des Etudes et Recherches EDF, (1985).
- 14 Pettermann, H.E. and Reiter, T.J. and Rammerstorfer F.G. Computational Simulation of Internal Bone Remodeling. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 4(4):295-323, (1997).
- 15 Prendergast, P. J. Finite element models in tissue mechanics and orthopaedic implant design. *Clinical Biomechanics*, 12(6):343-366, (1997).
- 16 Rossi, J.M. Application de méthodes d'homogénéisation à l'étude numérique de problèmes d'optimisation de structures. PhD thesis, Université de Provence, Aix-Marseille I, (1996).
- 17 Rossi, J.M. and Wendling-Mansuy, S. A topology optimization based model of bone adaptation. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, (2007).
- 18 Roux, W. *Der züchtende Kampf der Teile, oder die Teilauslese im Organismus. Theorie des functionellen Anpassung.* Leipzig, (1881).
- 19 Wolff, J. The law of bone remodelling (Das Gesetz der Transformation der Knochen, Hirschwald, 1892). Translated by Maquet P. and Furlong R. Springer, Berlin. Springer, (1986).