

Prédiction numérique d'un écoulement turbulent dans une conduite de section carrée.

A. Rechia

Faculté des Sciences et Techniques de Tanger
B.P 416 Tanger Maroc

H. Naji

Laboratoire de Mécanique de Lille (LML) – UMR 8107
Polytech-Lille/USTL - 59655 Villeneuve d'Ascq France

G. Mompean

Laboratoire de Mécanique de Lille (LML) – UMR 8107
Polytech-Lille/USTL - 59655 Villeneuve d'Ascq France

A. El Marjani

Laboratoire de Turbomachine - Ecole Mohammadia d'Ingénieurs
Avenue Ibn Sina B.P 765 – Agdal - Rabat Maroc

Résumé

La prédiction numérique des écoulements turbulents tridimensionnels est de plus en plus utilisée en mécanique des fluides et dans les applications industrielles.

Ce travail a pour objectif principal la mise en œuvre d'une méthode de prédiction numérique d'écoulements turbulents anisotropes de fluide incompressible dans une conduite de section carrée.

Le modèle classique de turbulence $k - \varepsilon$ largement répandu est utilisé pour la simulation numérique de cet écoulement. A fin de mieux prédire le comportement de ce modèle dans les régions de proche paroi de la conduite, on a introduit des fonctions correctrices f_{μ} . Les grandeurs moyennes primitives de l'écoulement, champs de vitesses et de pression, sont calculées en résolvant les équations de Reynolds moyennées (RANS). Ensuite, ces grandeurs sont comparées à une base de données obtenue par simulation numérique directe (DNS).

Abstract:

the numerical prediction of the three-dimensional turbulent flows is used more and more in fluid mechanics and in the industrial applications.

The main objective of this work is to implement a numerical method for the prediction of an anisotropic turbulent flows for the incompressible fluid in the square duct.

The widely widespread classical $k - \varepsilon$ model turbulence is chosen for the numerical simulation of this flow. A damping function f_{μ} is introduced to better predict the behaviour of this model near a right-angled corner. The primitive average parameters of the flow, as velocity and pressure fields are computed by solving the average Reynolds equations (RANS). Then, these parameters are compared with a data base obtained by direct numerical simulation (DNS).

1. INTRODUCTION

Les équations de Navier-Stokes auxquelles on adjoint une loi de comportement constituent le modèle mathématique le plus complet pour la simulation numérique des écoulements en régime turbulent. Pour résoudre les problèmes physiques mathématiques, des méthodes numériques ont été développées et le calcul en dynamique des fluides a contribué à ce développement. De ce fait, la mécanique des fluides numériques est devenue un outil de mise au point aussi important que les essais expérimentaux. Dans la pratique, peu d'écoulements de fluides sont laminaires mais ceux-ci deviennent rapidement turbulents avec toutes les conséquences que cela comporte tant sur le plan structurel que celui des mécanismes de transport. L'étude de la turbulence est devenue de ce fait un sujet de première importance [1,2,3].

La modélisation de la turbulence est validée par la résolution de problèmes tests. La solution de ces problèmes est souvent comparée à une solution de référence. Celle-ci peut provenir soit de l'expérience soit de la simulation numérique directe (DNS). Cependant cette dernière voie est souvent limitée à des configurations géométriques simples. L'écoulement dans une conduite de section carrée constitue un problème test pour la simulation de la turbulence. Cet écoulement présente une anisotropie entre les contraintes normales turbulentes et un écoulement secondaire dans le plan perpendiculaire à la direction principale, induit par les coins de la conduite. La simulation numérique directe de cet écoulement a été menée à bien par Gavrilakis [4] et Huser & Biringen [5].

Dans cette étude, nous envisageons la simulation numérique de cet écoulement en s'appuyant sur le modèle de turbulence $k - \varepsilon$. Afin de mieux prédire le comportement de ce modèle dans les régions de proche paroi, on introduit des fonctions correctrices f_p . Ce choix est motivé par le fait que ces dernières donnent des résultats proches de ceux de la simulation directe (DNS) obtenue par [4]. La méthode des volumes finis est employée ici pour approcher les équations intégrales gouvernant un tel écoulement. Le principe de maillage décalé pour la discrétisation spatiale est ici adopté. Les équations sont discrétisées en temps sous forme semi-implicite.

2. MODELE DE TURBULENCE A VISCOSITE TURBULENTE

Devant la complexité des écoulements turbulents, nous employons l'approche statistique qui consiste à décomposer toute grandeur instantanée ϕ en une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$\phi = \bar{\phi} + \varphi \quad (1)$$

où $\bar{\phi}$ est la valeur moyenne et φ la composante fluctuante.

En utilisant l'expression (1), les équations régissant la vitesse moyenne \bar{U}_i et la pression moyenne \bar{P} sont obtenues à partir des équations de Reynolds pour un écoulement incompressible :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{U}_i \bar{U}_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (3)$$

où ρ est la densité volumique du fluide, ν sa viscosité cinématique et $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j}$ est le tenseur des contraintes de Reynolds qui représente l'influence des fluctuations de vitesse sur le mouvement moyen.

Il est bien connu que l'approche statistique, appliquée à un processus non linéaire, conduit toujours à un accroissement des inconnues, ce qui pose le problème de fermeture. Ainsi, le terme $\overline{u_i u_j}$ représente donc une inconnue à part entière, qu'il est nécessaire de modéliser avant de songer à résoudre le système d'équations moyennées ci-dessus. Il existe une grande variété de modèles linéaires ou non [6,7,8]. La modélisation la plus simple encore très largement utilisée dans les applications pratiques consiste à exprimer τ_{ij} par l'approche basée sur la viscosité turbulente, exprimée par la relation :

$$\tau_{ij} = \frac{2k}{3} \delta_{ij} - \nu_t \bar{S}_{ij} \quad (4)$$

avec $\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)$ est le tenseur de taux de déformation, k l'énergie cinétique de turbulence

et ν_t la viscosité turbulente.

Le problème de fermeture de l'équation (3) s'est alors déplacé vers la détermination de la viscosité turbulente ν_t . Cette dernière est exprimée dans cette étude par l'expression :

$$\nu_t = \frac{C_\mu}{\varepsilon} k^2 \quad (5)$$

où ε est le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence et C_μ est une constante du modèle. L'énergie cinétique de la turbulence k ainsi que son taux de dissipation ε sont calculés à partir de la résolution des deux équations de transport:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = D_k + P_{k-\varepsilon} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_1 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (7)$$

où $D_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$ est le terme de la diffusion visqueuse et $P_k = \nu_t 2\bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$ est le terme de la

production turbulente. Les constantes C_μ , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, σ_k et σ_ε contenues dans les équations ci-dessus sont habituellement utilisées dans la littérature :

$$C_\mu = 0.09 ; C_{\varepsilon 1} = 1.44 ; C_{\varepsilon 2} = 1.92 ; \sigma_k = 1.0 ; \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Il faut noter que le modèle $k - \varepsilon$ ici adopté est le plus employé. Cependant, ce modèle ne permet pas l'obtention d'un comportement correct près des parois lorsque le nombre de Reynolds est élevé. Afin

d'améliorer ce comportement, l'expression (5) de v_t est modifiée en y introduisant des fonctions correctrices f_μ de type Van Driest. Celle-ci devient :

$$v_t = \frac{C_\mu}{\varepsilon} f_\mu k^2 \quad (8)$$

$$\text{avec } f_\mu = (1 - a \exp(-bz^+))(1 - a \exp(-by^+)) \quad (9)$$

où 'a' et 'b' sont des constantes, qui peuvent prendre différentes valeurs pour chaque élément du tenseur des contraintes de Reynolds τ_{ij} [9,10,11]. Les variables $y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$ et $z^+ = \frac{u_\tau z}{\nu}$ sont les coordonnées en unité de paroi basées sur la vitesse de frottement $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ et la viscosité cinématique ν .

3. SIMULATION NUMERIQUE

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de décrire la résolution numérique du système d'équations de Reynolds fermées (2), (3), (6), (7) et (8), à l'aide de la méthode des volumes finis.

3.1 Discrétisation spatiale

Pour localiser les différentes variables, on utilise le concept du maillage décalé (cf. figure 1) classique où la pression, l'énergie cinétique turbulente, la dissipation, les contraintes normales de Reynolds sont traitées au centre des volumes de contrôle, les vitesses sont évaluées au centre des faces et les tensions de cisaillement sont localisées aux coins [12]. L'ensemble de ces équations peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{U}_j \phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_\phi}{\partial t} = S_\phi \quad (10)$$

L'intégration de l'équation générale (10) sur un volume de contrôle Ω_k de frontière γ permet d'obtenir une équation de bilan de la grandeur ϕ . Cette équation qui constitue la base de la discrétisation spatiale de la méthode des volumes finis peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_k} \phi d\Omega + \int_\gamma J_\phi \vec{U} \cdot n d\gamma + \int_\gamma J_\phi n d\gamma = \int_{\Omega_k} S_\phi d\Omega \quad (11)$$

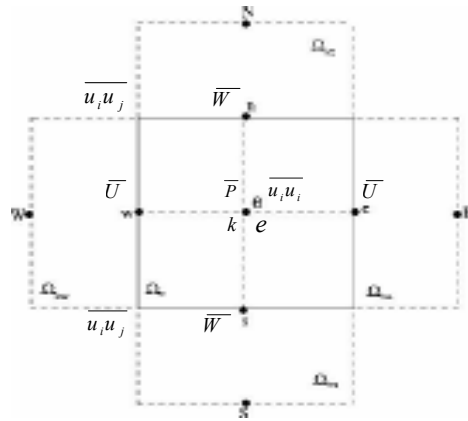


Figure 1 : Cellule de bilan

En adoptant une résolution eulérienne et utilisant le théorème de la moyenne, les deux intégrales de volume de l'équation (11) s'écrivent respectivement:

$$\text{Terme temporel} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi d\Omega \approx \Omega \frac{\partial \phi_{\theta}}{\partial t},$$

$$\text{Terme source} \quad \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega \approx \Omega S_{\theta\phi}$$

où ϕ_{θ} et $S_{\theta\phi}$ sont les valeurs respectives de ϕ et S_{ϕ} au centre du volume de contrôle θ .

Appliquant un traitement similaire aux intégrales de surface portant sur le contour γ du volume de contrôle, on obtient :

$$\text{Echange par diffusion} \quad \int_{\gamma} \vec{J}_{\phi} \cdot \vec{n} d\gamma \approx \sum_{i=1}^4 af_i \left(\vec{J}_{\phi} \cdot \vec{n} \right)_i, \quad i = e, n, w, s$$

$$\text{Echange par convection} \quad \int_{\gamma} \phi \vec{U} \cdot \vec{n} d\gamma \approx \sum_{i=1}^4 af_i \phi_i \left(\vec{U} \cdot \vec{n} \right)_i, \quad i = e, n, w, s$$

af_i étant la longueur de parcours de la frontière γ et l'indice 'i' indique la face du volume de contrôle.

3.2 Discrétisation temporelle

Nous notons n l'indice du temps t et $(n+1)$ l'indice du temps suivant $(t + \Delta t)$. Pour un schéma au premier ordre en temps, le système (2) et (3) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{U}_i^{n+1}}{\partial x_j} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{U}_i \bar{U}_j \right)^n = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_i^{n+1}}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \right]^n \tag{13}$$

La discrétisation temporelle est implicite en terme de pression et explicite pour les autres termes. Le terme convectif est évalué en utilisant le schéma UPWIND. Dans cette étude, nous utilisons la procédure de Harlow et al [13]. Cette méthode consiste à exprimer la vitesse \bar{U}_i^{n+1} à l'instant $(n+1)$ en fonction de \bar{P}_i^{n+1} à partir des équations de conservation. On obtient ensuite un système linéaire à résoudre pour la pression \bar{P}_i^{n+1} de la forme :

$$[\text{MP}] * \left[\bar{P}^{n+1} \right] = [\text{SM}] \quad (13)$$

La matrice de pression $[\text{MP}]$, dont les éléments ne dépendent que des grandeurs géométriques, étant symétrique définie positive. Elle est donc décomposée selon le procédé de Cholesky. Quant à la matrice seconde membre $[\text{SM}]$, elle est composée des contributions des tenseurs des contraintes à l'instant n .

La résolution du système (13) permet d'accéder au champ de pression \bar{P}_i^{n+1} et par combinaison avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient un nouveau champ de vitesse à l'instant $(n+1)$ satisfaisant l'équation de conservation de la masse.

3.3 Domaine de calcul et conditions aux limites

La configuration géométrique de la conduite de section carrée est montrée sur la figure 2. Cette configuration ayant une symétrie, notre étude s'est limitée au quart de la conduite (cf. figure 3).

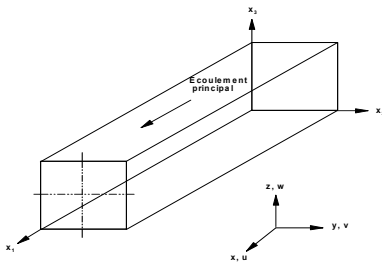


Figure 2 : Géométrie de la conduite

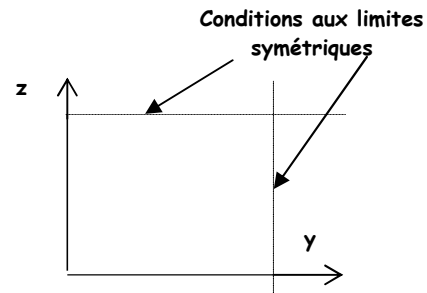


Figure 3 : 1/4 de la conduite.

Le type des conditions aux limites choisi pour résoudre le système d'équations discrétisées, est :

- A l'entrée de la conduite, on se donne une condition de débit en imposant un champ de vitesse.
- A la sortie de la conduite, on impose une pression statique, en faisant l'hypothèse de Neumann

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \vec{n} \text{ étant la normale à la frontière.}$$

Les calculs ont été effectués en utilisant un maillage 41×41 dans le plan normal, non uniforme très fin au voisinage des parois. Un autre calcul a été réalisé avec un maillage 21×21 afin de vérifier l'indépendance du maillage vis à vis des valeurs obtenues. Aucune différence significative n'a été observée et l'erreur maximum est de 2% pour les composantes secondaires de la vitesse à $\frac{z}{h} = 0.16$

4. RESULTATS NUMERIQUES ET COMPARAISON

L'exemple choisi ici est celui d'un écoulement turbulent tridimensionnel dans une conduite de section carrée (cf. figure 2-3). Cette configuration a fait l'objet de nombreuses investigations tant expérimentales que numériques [5, 11, 14, 15]. En particulier, elle a été étudiée par Gavrilakis [4] au moyen d'une simulation numérique directe (DNS) et a donné lieu à une base de données qui est largement utilisée dans les confrontations calculs/expériences.

Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne \bar{U}_m de l'écoulement et sur la hauteur de la conduite $2h$, $R_e = \frac{2h}{\nu} \bar{U}_m$, est égale à 4800. Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement u_τ , $R_e^+ = \frac{2h}{\nu} u_\tau$, vaut dans ce cas 320.

Dans la relation (8), la fonction correctrice f_μ est utilisée ici pour modifier la valeur de C_μ au niveau des coins au voisinage de la paroi, où l'effet de la diffusion de la viscosité moléculaire est très fort.

4.1 Champ de pression et des vitesses moyennes

La figure 4a montre la répartition du champ de pression tridimensionnel dans la conduite et les figures 4b-c montrent l'évolution de la pression le long de la conduite dans les plans (x, z) et (x, y) respectivement et ce pour la section $\frac{y}{h} = 1.0$.

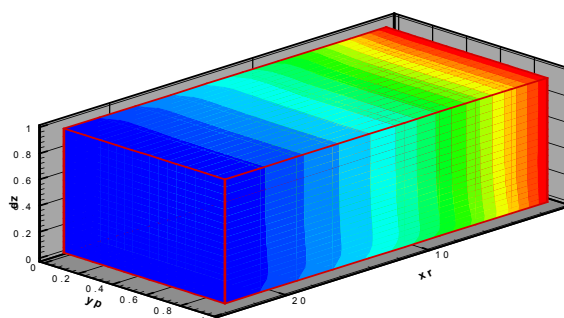


Figure 4a : Champ de pression dans la conduite.



Figure 4b : Iso-bars le long de la conduite dans le plan (x, y) .

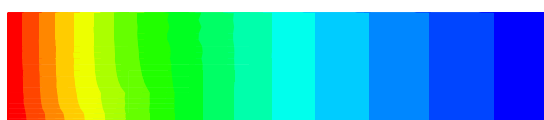


Figure 4c : Iso-bars le long de la conduite dans le plan (x, z) .

Nous constatons que le champ de pression obtenu correspond à celui d'un canal plan décroissant depuis l'entrée de la conduite jusqu'à la sortie (cf. figure 4a-c).

La figure 5a montre le développement de l'écoulement tridimensionnel et les figures 5b-c montrent le champ de vitesses dans les plans (x, z) et (x, y) respectivement et ce pour la section $y/h = 1.0$.

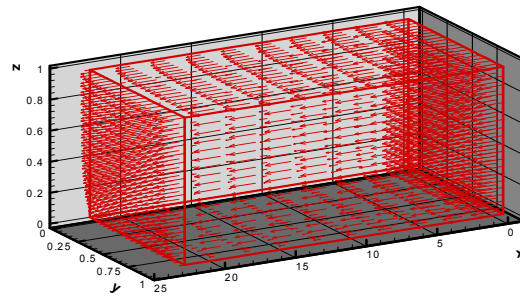


Figure 5a : Champ de vitesse tridimensionnel.

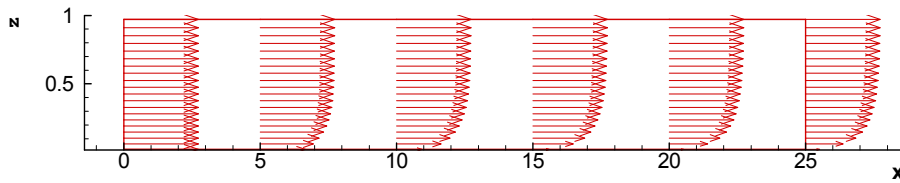


Figure 5b : Champ de vitesse dans le plan (x, z) à $y/h=1.0$.

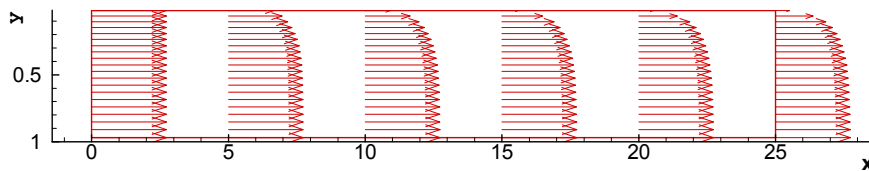


Figure 5c : Champ de vitesse dans le plan (x, y) à $y/h=1.0$.

Nous constatons que le champ de vitesse obtenu le long de la conduite est très proche de celui de Couette (cf. figure 5a-c).

Les figures 6a-b présentent les contours des iso-valeurs du champ de vitesse, dans le quart du domaine dans un plan perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement, obtenus par simulation directe et par le modèle $k - \varepsilon$.

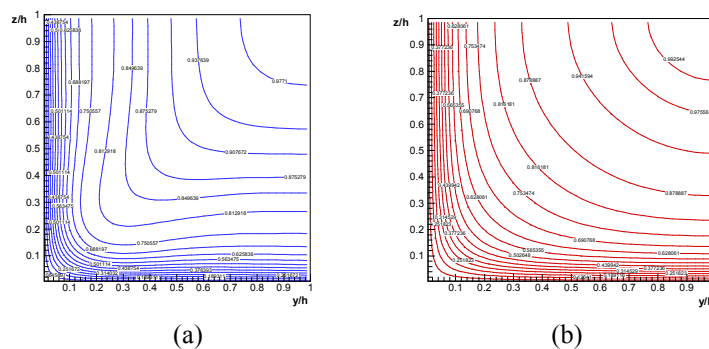


Figure 6 : Iso-valeurs \bar{U}/\bar{U}_0 , (a) DNS, (b) $k - \varepsilon$

Les contours des iso-valeurs du champ des vitesses obtenus par le modèle $k-\varepsilon$ (voir figure 6a-b) montrent bien la symétrie de l'écoulement par rapport à la diagonale. L'accord entre nos calculs et la DNS est très satisfaisant. Néanmoins, l'effet de vortex créé par l'écoulement secondaire sur les contours demeure absent. Les profils de la vitesse moyenne adimensionnée \bar{U}/\bar{U}_0 (U_0 étant la vitesse maximum au centre de la conduite) pour différentes sections sont présentés sur les figures 7a-c respectivement pour $y/h = 0.1, 0.5$ et 1.0 .

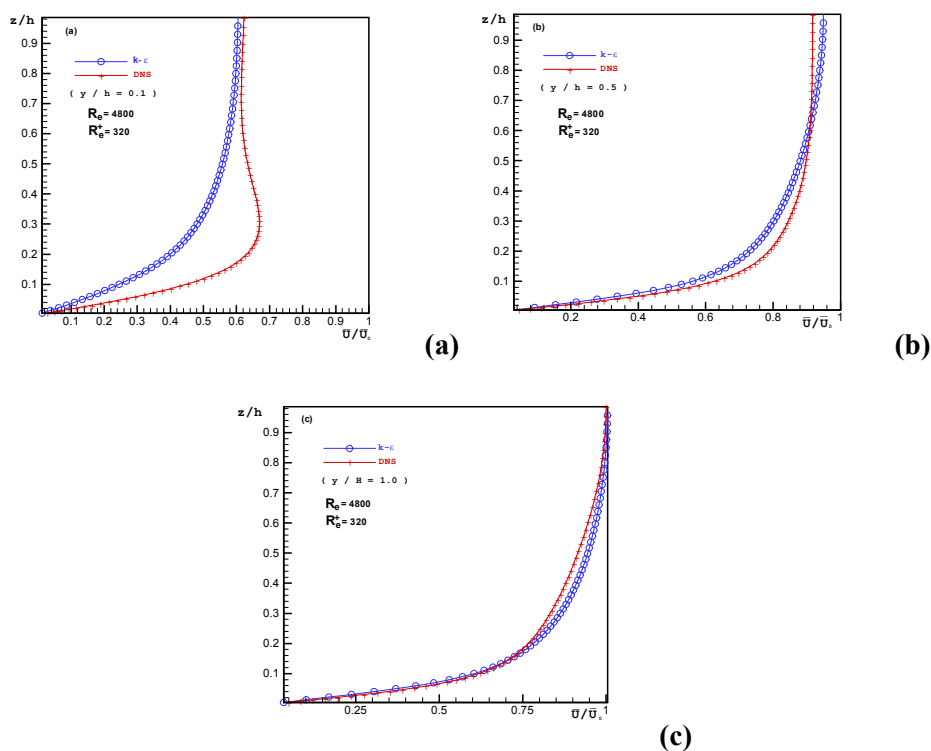


Figure 7 : Profils de vitesse adimensionnelle \bar{U}/\bar{U}_0 pour différentes sections (a) $y/h=0.1$, (b) $y/h=0.5$, (c) $y/h=1.0$

Les courbes des figures 7a-c montrent l'évolution de la vitesse le long de l'axe z pour différentes sections obtenues par le modèle $k-\varepsilon$ et sont comparées à celles obtenues par la simulation numérique directe (DNS). Sur la figure 7a (près de la paroi, $y/h=0.1$), le profil de vitesse donné par la DNS montre une forte déformation induite par l'écoulement secondaire. On constate que le modèle $k-\varepsilon$ prédit moins bien une telle quantité dans cette région. Par contre, pour $y/h=0.5$, les profils sont en très bon accord et pour $y/h=1.0$ (centre de la section), la comparaison entre les profils obtenus par $k-\varepsilon$ et la DNS est excellente.

4.2 Profils des tensions de Reynolds

Comme cela a été dit dans la section 2, nous avons introduit des fonctions correctrices f_{μ} (9) pour mieux prendre en compte les effets de paroi et mieux reproduire les contraintes de Reynolds. Selon nos simulations, les meilleures valeurs des constantes 'a' et 'b' qui permettent la reproduction des contraintes de Reynolds \overline{uu}^+ , \overline{vv}^+ , \overline{ww}^+ et $-\overline{uw}^+$ sont données dans le tableau 1.

	\overline{uu}^+	\overline{vv}^+	\overline{ww}^+	$-\overline{uw}^+$
a	-4.16	1.	0.5	-0.5
b	0.06	0.05	0.001	0.047

Tableau 1 : Constantes a et b utilisées dans f_μ .

Les courbes des figures 8a-d présentent l'évolution des tensions normales adimensionnelles $\overline{u_i u_i}^+ = \overline{u_i u_i} / u_\tau^2$, ($1 \leq i \leq 3$) et de cisaillement turbulent $-\overline{uw}^+ = -\overline{uw} / u_\tau^2$ en fonction de la distance en unités de paroi $z^+ = u_\tau z / \nu$ pour la section $y/h = 1.0$.

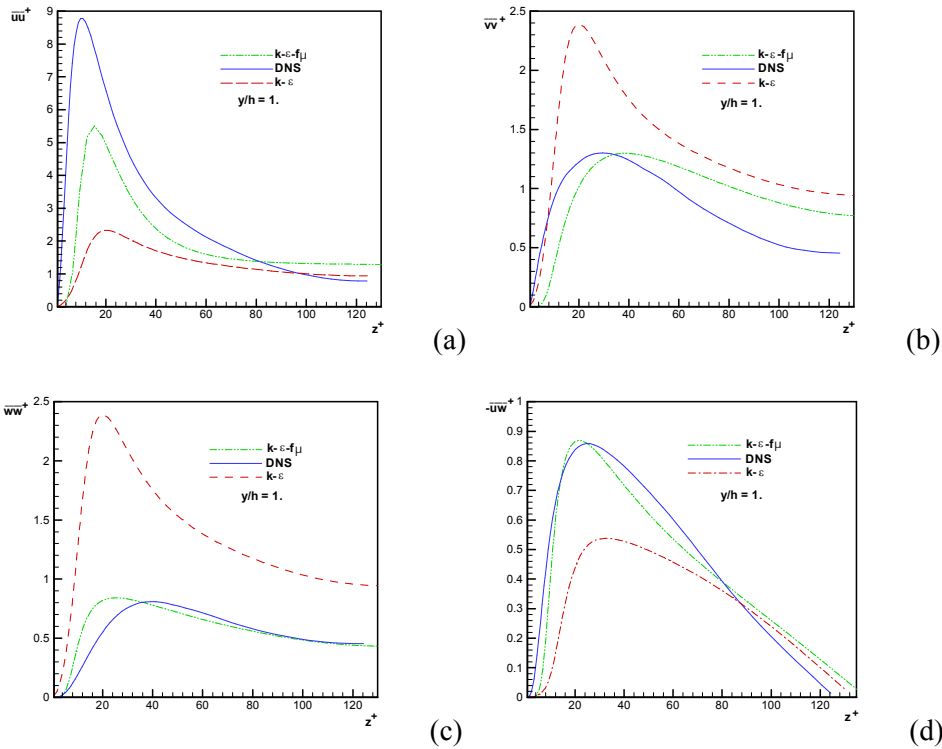


Figure 8 : Profils des contraintes de Reynolds, comparaison $k - \varepsilon$, $k - \varepsilon - f_\mu$ avec la DNS : \overline{uu}^+ (a), \overline{vv}^+ (b), \overline{ww}^+ (c), $-\overline{uw}^+$ (d) ($y/h=1.0$).

En examinant la figure 8a, on remarque que la contrainte normale \overline{uu}^+ obtenue à l'aide du modèle $k - \varepsilon - f_\mu$ est en bon accord avec la DNS. Cet accord semble meilleur pour $z^+ \geq 50$. Cependant, le maximum de cette quantité est sous-estimé par rapport à celui obtenu par la DNS.

On note également que le maximum des autres contraintes normales \overline{vv}^+ , \overline{ww}^+ (voir figures 8b-c) est en très bon accord avec celui obtenu par simulation numérique directe.

Sur la figure 8d, on présente les profils de la contrainte tangentielle $-\overline{uw}^+$ obtenus par le modèle $k - \varepsilon - f_\mu$ et par la simulation directe. On constate que les résultats numériques obtenus se comparent favorablement avec ceux de la DNS.

Il est clair que le modèle $k-\varepsilon$ sans fonctions correctrices ne peut reproduire correctement les contraintes de Reynolds. En effet, on constate bien que le caractère de la turbulence est isotrope $\overline{uu^+} \approx \overline{vv^+} \approx \overline{ww^+}$ (voir figures 8a-c). mais la modification du modèle $k-\varepsilon$ par l'adjonction de fonctions correctrices, nous a permis de prédire correctement l'anisotropie de l'écoulement ici considéré. Sur les figures 9a-b, on présente la distribution de l'énergie cinétique k , obtenues respectivement par la DNS et le modèle $k-\varepsilon-f_\mu$ (cf.). Un examen de ces figures permet de constater le bon accord entre les deux profils.

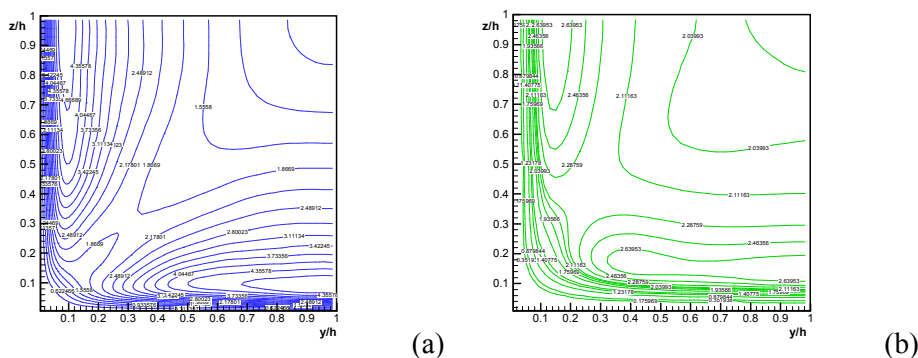


Figure 9 : Distribution de l'énergie turbulente k

(a) DNS, (b) $k-\varepsilon-f_\mu$

Cependant, nous notons que les valeurs de l'énergie cinétique k prédites sont proches de ceux issus de la DNS et ce loin de la paroi mais un désaccord subsiste près des parois.

5. CONCLUSION

L'objectif de ce travail est la simulation numérique d'un écoulement turbulent anisotrope tridimensionnel pour un fluide incompressible dans une conduite à section carrée. Les équations de Reynolds moyennées qui gouvernent cet écoulement sont discrétisées spatialement à l'aide de la technique classique des volumes finis.

Le modèle de turbulence utilisé dans cette étude est le modèle classique $k-\varepsilon$ à deux équations de transport. Pour un nombre de $Re = 4800$, plusieurs tests ont été réalisés. La présente configuration a été retenue comme test car l'écoulement présente à la fois une anisotropie importante entre les composantes normales du tenseur de Reynolds et un écoulement secondaire dans le plan transverse.

Pour mener à bien cette simulation, nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par la simulation directe (DNS) de Gavrilakis. Loin des parois, le champ des vitesses obtenu avec le modèle $k-\varepsilon$ est en bon accord avec la DNS. Dans ce travail, nous avons mis en évidence que le caractère anisotrope de l'écoulement ne peut être prédit avec le modèle classique $k-\varepsilon$.

Afin de corriger ce défaut, nous avons introduit des fonctions correctrices adaptées à chacune des composantes turbulentes. De ce fait, le modèle $k-\varepsilon-f_\mu$, dont la mise en œuvre demeure aisée, a permis de prédire correctement cette anisotropie.

7. REFERENCES

1. Pope S.B., A more general effective-viscosity hypothesis, *J. Fluid Mech.*, 72, 331-340, 1975.
2. Ha Minh H., Physique et modélisation de la turbulence en écoulement de fluides, Séminaire école de printemps de mécanique des fluides Numériques, Aussois 1991.
3. Speziale C.S., Sarkar S. and Gatski T.B., Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: A dynamical system approach, *J. Fluid Mech.*, 227, 245-272, 1991.
4. Gavrilakis S., Numerical simulation of low-Reynolds-Number turbulent flow through a straight square duct, *J. Fluid Mech.*, 244, 101-129, 1992.
5. Huser A. And Biringen S., Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct, *J. Fluid Mech.*, 257, 65-95, 1993.
6. Gatski T.B. , Rumsey C.L., Linear and non-linear eddy viscosity models, Cambridge University Press, 9-46, 2001.
7. Belhoucine L., Deville M. , Elazehari A.R., Bensalah M.O. Explicit algebraic Reynolds stress model of incompressible turbulent flow in rotating square duct, *Computers & Fluids*, 33, 179-199, 2004.
8. Wallin S. and Johansson A., An explicit algebraic Reynolds stress model of incompressible and compressible turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, 403, 89-132, 2000.
9. Chien K.Y., Prediction of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model , *AIAA J.*, 20, 1982.
10. Lam C.K.G. and Bremhorst K., A modified form of the $k - \epsilon$ model predicting wall turbulence, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng. J. Fluid. Eg.*, 103, 456, 1981.
11. Nisizima S., Numerical study of turbulent square-duct flow using an anisotropic $k - \epsilon$ model, *Theo. Comput. Fluid Dyn.*, 2, 61-71, 1990.
12. Mompean G., Gavrilakis S., Machiels L. and Deville M., On predicting the turbulence-induced secondary flows using non-linear $k - \epsilon$ models, *Physics of Fluids*, 8,1856-1868, 1996.
13. Harlow F.H. and Welch J.E., Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow or fluid with free surface, *Phys. Fluids*, 8,2182-2189, 1965.
14. Mompean G., Numerical simulation of turbulent flow near a right-angled corner using the Speziale non-linear model with RNG $K-\epsilon$ equation, *Comp. & Fluid*, 27, 847-859, 1998.
15. Naji H., Mompean G., El Yahyaoui O., Evaluation of explicit algebraic stress models using direct numerical simulations, *Journal of Turbulence*, 5,38, 2004.