

Mise en œuvre d'une loi non associée de contact avec frottement sec de Coulomb par l'approche du bipotentiel et application à la simulation numérique des procédés de mise en forme des métaux élastoplastiques à écrouissage isotrope

H. Fihri Fassi

Laboratoire de mécanique, Faculté des Sciences et Techniques, Settat, Maroc

E-mail hicham-fihri@yahoo.fr, hfihrifassi@fsts.ac.ma, fax 023400969

L. Bousshine

Lab. LMSM, ENSEM, Casablanca, B.P 8118, Maroc,

G. de Saxcé

Laboratoire de Mécanique LML, Université de Technologie de Lille I, France

G. Guerlement

Faculté Polytechnique de Mons, Belgique

A.El Harif

Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences, Agdal Rabat, Maroc

Résumé

Le problème du contact entre pièce et outillage est analysé dans le contexte de la simulation par éléments finis des procédés de mise en forme des métaux. On considère que le matériau est élastoplastique à écrouissage isotrope, et que le comportement de l'interface outil/pièce est régi par la loi classique de Coulomb. Une méthode de résolution, basée sur une formulation incrémentale, du problème d'évolution élastoplastique tenant compte de la présence du contact avec frottement est présentée. L'outil théorique du bipotentiel est utilisé pour modéliser la loi non associée de contact avec frottement de Coulomb. Les difficultés mathématiques dues à la non différentiabilité du bipotentiel de contact sont palliées par une procédure de pénalisation classique. Enfin, des applications de mise en forme des métaux sont présentées.

Mots clés : Méthode des éléments finis, bipotentiel, loi de Coulomb, Régularisation, schéma implicite

Abstract

This work is devoted to the analysis, by numerical simulation, of the elastoplastic behavior of materials and the unilateral contact with Coulomb's dry friction in metal forming process. Isotropic hardening is taking into account. With this objective, we present a solution algorithm for elastoplastic evolution problem, taking into account the unilateral contact with Coulomb's dry friction. This method consists in an incremental formulation from temporal elastoplastic and unilateral contact laws. The latter is described by means of the bipotential theory. This allows us to use a variational formulation based on one minimum principle. To avoid the non differentiability of the contact bipotential, the penalization procedure is used. Some metal forming examples are presented.

Key words : Finite element method, Bipotential, Coulomb's Friction, Regularization, implicit scheme

1. INTRODUCTION

Le problème du contact unilatéral en mise en forme des métaux est crucial pour simuler numériquement les procédés de façon réaliste. L'approche classique, basées sur la loi de normalité, consiste à résoudre séparément le contact et le frottement. Autrement dit, cette méthode considère que le contact, peut se produire sans frottement et le frottement sans contact, ce qui est, évidemment, loin de la réalité.

Le modèle des Matériaux Standards Implicites (MSI) proposé en premier par de Saxcé et al. [4] est une classe de matériaux qui permet l'extension de la notion de la loi de normalité aux comportements dissipatifs non associés, comme pour le cas du phénomène de frottement dans les interfaces.

L'approche classique est basée sur deux principes de minimum, un pour le contact et un autre pour le frottement, et sur deux inégalités variationnelles [6]. En pratique, cette méthode conduit à un algorithme de résolution alternatif de deux problèmes de minimisation avec contraintes jusqu'à la convergence. En utilisant le modèle des MSI, un seul principe de minimum suffit. Le contact et le frottement sont couplés dans une seule fonction, appelée bipotentiel, déterminée à partir de la loi de contact avec frottement.

Le comportement plastique et celui du contact avec frottement sont des phénomènes dissipatifs régis par des lois constitutives multivoques dont la résolution nécessite l'utilisation d'un schéma d'intégration adapté. Le schéma implicite introduit par Moreau [7,8] et connu sous le nom de l'algorithme de rattrapage a montré sa bonne adaptation à ce type de problème [2,3]. Les lois temporelles sont remplacées par des lois incrémentales indépendantes du temps.

La loi de frottement de Coulomb est similaire à la loi du matériau rigide plastique et présente des difficultés numériques causées par la non différentiabilité du bipotentiel de contact en certains points. Pour remédier à ce problème nous présentons une méthode de régularisation du bipotentiel de contact par une procédure de pénalisation classique [1]. Dans la suite, nous considérons que le comportement du matériau est élastoplastique obéissant au critère de von-Mises. L'originalité de ce travail par rapport à nos précédents [1,2,3] réside essentiellement dans la prise en compte de l'écroutissage isotrope. Comme exemples industriels, nous présentons à la fin de ce travail des résultats intéressants concernant la coupe des métaux et la compression d'un anneau axisymétrique.

2. LOIS DE CONTACT ET DE FROTTEMENT

2.1 Loi de contact unilatéral sans frottement

Considérons une structure Ω (figure.1) composée de deux solides Ω_A et Ω_B séparés par une interface S_2 . Le système Ω est supposé soumis à des forces de surface \bar{t} sur S_1 et à des vitesses \bar{u} sur S_0 .

Soit n un vecteur unitaire normal en un point M appartenant à S_2 , dirigé de Ω_A vers Ω_B . Habituellement, on se sert de l'hypothèse considérant que la surface de contact S_2 est approchée au point M par le plan tangent commun à Ω_A et Ω_B , noté Γ , orthogonal à n .

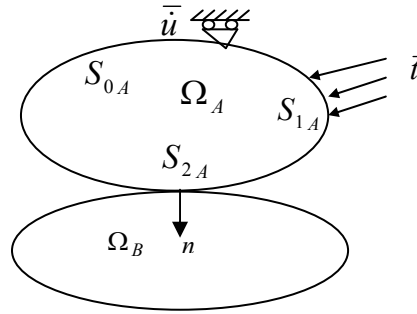


Figure 1. Structure en contact

Les vecteurs vitesse relative \dot{u} et force de contact t peuvent être décomposés de manière unique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{u}_t + \dot{u}_n n, \quad \dot{u}_t \in \Gamma \text{ et } \dot{u}_n \in \mathfrak{R} \\ t &= t_t + t_n n, \quad t_t \in \Gamma \text{ et } t_n \in \mathfrak{R} \end{aligned} \tag{1}$$

où \mathfrak{R} est l'ensemble des nombres réels. Les indices t et n désignent respectivement les composantes tangentielles et normales des vecteurs t et \dot{u} .

Les conditions de contact unilatéral, appelées aussi conditions de Signorini [1,2,3], sont données par :

$$\dot{u}_n \geq 0, \quad t_n \geq 0 \text{ et } \dot{u}_n \cdot t_n = 0. \tag{2}$$

Dans le plan $(-\dot{u}_n, t_n)$, cette loi est représentée graphiquement par la figure 2.

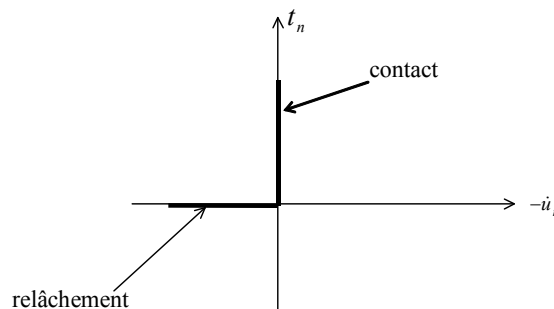


Figure 2. Représentation graphique de la loi de contact de Signorini

La loi de contact unilatéral est multivoque, on peut donc introduire comme potentiel, la fonction indicatrice de l'ensemble des nombres réels négatifs \mathfrak{R}_- :

$$\varphi_n(-\dot{u}_n) = \psi_{\mathfrak{R}_-}(-\dot{u}_n) \begin{cases} 0 & \text{si } -\dot{u}_n \in \mathfrak{R}_- \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3}$$

La loi de contact unilatéral et son inverse s'écrivent sous la forme sous- différentielle suivante :

$$t_n \in \partial_{-\dot{u}_n} \varphi_n(-\dot{u}_n), \quad -\dot{u}_n \in \partial_{t_n} \chi_n(t_n) \tag{4}$$

où χ_n est le potentiel complémentaire de φ_n , défini comme étant la fonction indicatrice de l'ensemble des réels positifs \mathfrak{R}_+ :

$$\chi_n(t_n) = \psi_{\mathfrak{R}_+}(t_n). \tag{5}$$

2.2 Loi de frottement sec de Coulomb

La loi de frottement de Coulomb est similaire à la loi de comportement rigide parfaitement plastique, dans ce sens que le critère de Coulomb pour le frottement est analogue à celui de plasticité et la loi de glissement à la règle d'écoulement plastique. Le concept du surpotentiel de dissipation introduit par J-J Moreau [7,8] appliqué dans le cas de la plasticité reste valable pour le frottement.

La loi de frottement sec de Coulomb s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \text{si } \|t_t\| < \mu t_n \text{ alors } \dot{u}_t = 0 \\ (2) \quad & \text{si } \|t_t\| = \mu t_n \text{ alors } \dot{u}_t \neq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

(1) correspond à l'adhérence et (2) correspond au glissement.

Dans le cas bidimensionnel, où le vecteur force tangentielle et celui de glissement sont définis, chacun, par une seule composante, cette loi peut être représentée graphiquement par la figure 3.

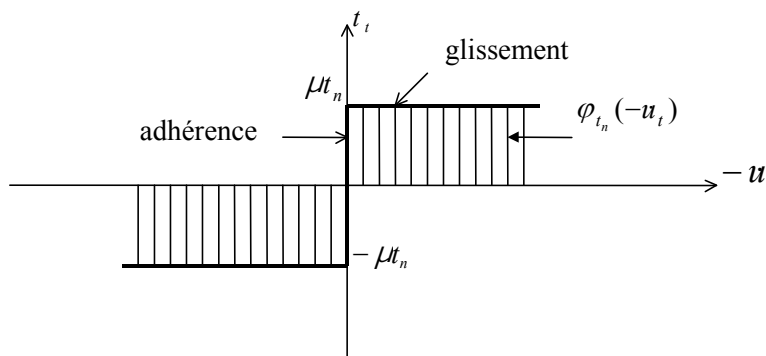


Figure 3 Les lois d'adhérence et de glissement

Rappelons que le surpotentiel de dissipation est déterminé par la valeur de la puissance dissipée et s'exprime alors par :

$$\varphi_{t_n}(-\dot{u}_t) = \int_0^{-\dot{u}_t} t_t \, d\dot{u}_t = \mu t_n \|-\dot{u}_t\| \tag{7}$$

On montre que le potentiel dual de φ_{t_n} au sens de Fenchel peut être représenté par la fonction suivante [2,3] :

$$\chi_{t_n}(t_t) = \psi_{t_n}(t_t), \quad (8)$$

où I_{t_n} est l'intervalle des nombres réels défini par $I_{t_n} = [-\mu t_n, \mu t_n]$.

La loi de frottement et son inverse peuvent s'écrire sous forme des inclusions différentielles suivantes :

$$t_t \in \partial_{-\dot{u}_t} \varphi_{t_n}(-\dot{u}_t), \quad -\dot{u}_t \in \partial_{t_t} \chi_{t_n}(t_t) \quad (9)$$

Pour établir les lois 4 et 9, les problèmes de contact et de frottement sont traités séparément. Cette approche peut conduire à des erreurs graves, plus précisément à un certain instant on suppose que le contact peut se produire sans frottement et le frottement sans contact, ce qui est absurde. Le nouveau concept des matériaux standards implicites (MSI), introduit en premier par de Saxcé [4], permet, en partant des résultats précédents, de grouper le contact et le frottement dans une seule fonction appelée : bipotentiel.

3. THÉORIE DU BIPOTENTIEL

En mécanique des solides, une large classe de comportements de matériaux peut être représentée par une relation explicite :

$$\sigma = f(\varepsilon), \quad (10)$$

Si f est inversible, la loi inverse de (10) s'écrit :

$$\varepsilon = g(\sigma), \quad (11)$$

où ε et σ peuvent désigner respectivement les vecteurs de déformations et de contraintes généralisés.

Une classe plus restreinte de matériaux, dits standards, obéit à ce type de lois. On suppose l'existence de deux potentiels, duaux l'un par rapport à l'autre, au sens de Legendre. Autrement dit, il existe des couples (ε, σ) de déformation et de contrainte, tels que :

$$V(\varepsilon) + W(\sigma) = \varepsilon \cdot \sigma. \quad (12)$$

ε et σ sont alors liés par la loi du matériau et forment un couple dit *extrémal*. Cette relation scalaire définit donc la loi énergétique du matériau. Le potentiel V représente l'énergie de déformation et W l'énergie complémentaire. Si V et W sont différentiables, la loi du matériau s'écrit sous forme vectorielle :

$$\sigma = \frac{\partial V(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\partial W(\sigma)}{\partial \sigma}. \quad (13)$$

Ces deux dernières équations sont des cas particuliers de (10) et (11). Pour les comportements dissipatifs tels que plasticité, viscoplasticité, et contact, le concept de pseudopotential ou surpotential au sens de Moreau peut être introduit. $V(\varepsilon)$ et $W(\sigma)$ sont supposés convexes. L'inégalité de Fenchel s'écrit :

$$\forall \varepsilon', \sigma' \quad V(\varepsilon') + W(\sigma') \geq \varepsilon' \cdot \sigma' \quad (14)$$

L'égalité est vérifiée quand ε' et σ' sont liés par la loi du matériau. Tenant compte de (13) et (14), la propriété de convexité de V et W peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon' \quad V(\varepsilon') - V(\varepsilon) &\geq \sigma \cdot (\varepsilon' - \varepsilon), \\ \forall \sigma' \quad W(\sigma') - W(\sigma) &\geq \varepsilon \cdot (\sigma' - \sigma). \end{aligned} \quad (15)$$

Autrement dit, ε et σ sont reliés par une loi sous différentielle :

$$\sigma \in \partial V(\varepsilon) \quad , \quad \varepsilon \in \partial W(\sigma) . \quad (16)$$

On rencontre néanmoins, en mécanique des solides, de nombreux comportements qui échappent à cette classe fort utile de matériaux standards comme le cas des sols et celui de contact avec frottement. Ces comportements sont dits «non-standards».

Pour cela, une nouvelle classe de matériaux, dits Matériaux Standards Implicites (*MSI*) a été introduite par de Saxcé et al. [4].

La classe des (*MSI*) inclut les matériaux standards et non-standards, et suppose l'existence d'une fonction $b(\varepsilon, \sigma)$, dite bipotentiel, telle que la loi du matériau s'écrive :

$$b(\varepsilon, \sigma) = \varepsilon \cdot \sigma . \quad (17)$$

Si la fonction b est différentiable, la forme vectorielle de la loi du matériau est donnée par dérivation de l'égalité précédente :

$$\sigma = \frac{\partial b(\varepsilon, \sigma)}{\partial \varepsilon} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\partial b(\varepsilon, \sigma)}{\partial \sigma} . \quad (18)$$

La dépendance de σ par rapport à ε est à présent implicite. Le couple (ε, σ) vérifiant la relation (18) est extrémal. On peut noter que les matériaux standards correspondent à un cas particulier de (17) pour lequel le bipotentiel est séparable :

$$b(\varepsilon, \sigma) = V(\varepsilon) + W(\sigma) . \quad (19)$$

D'une manière générale, on suppose que le bipotentiel est convexe par rapport à ε , quand σ reste constant, et convexe par rapport à σ quand ε reste constant. La fonction b à deux variables est dite bipotentiel si elle satisfait l'inéquation fondamentale suivante :

$$\forall \varepsilon', \sigma' \quad b(\varepsilon', \sigma') \geq \varepsilon' \cdot \sigma' , \quad (20)$$

où l'égalité est vérifiée quand ε' et σ' sont liés par la loi du matériau. La condition (20) est une simple généralisation de l'inégalité de Fenchel (14). En retranchant l'égalité (15) de l'inégalité (20) membre à membre, nous obtenons une généralisation de (17) en terme du bipotentiel :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon' & \quad b(\varepsilon', \sigma) - b(\varepsilon, \sigma) \geq \sigma(\varepsilon' - \varepsilon) \\ \forall \sigma' & \quad b(\varepsilon, \sigma') - b(\varepsilon, \sigma) \geq \varepsilon(\sigma' - \sigma) \end{aligned} \quad (21)$$

σ et ε sont reliés par une loi de la forme sous différentielle implicite :

$$\sigma \in \partial_{\varepsilon} b(\varepsilon, \sigma) \quad , \quad \varepsilon \in \partial_{\sigma} b(\varepsilon, \sigma) . \quad (22)$$

4. BIPOTENTIEL DE CONTACT AVEC FROTTEMENT

En combinant la loi de contact unilatéral et de frottement sec de Coulomb, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} 1) & \text{ si } t_n = 0 \quad \text{alors } -\dot{u}_n \leq 0 \\ 2) & \text{ si } t_n > 0 \text{ et } \|t_t\| < \mu t_n \text{ alors } \dot{u}_n = 0, \dot{u}_t = 0 \\ 3) & \text{ si } t_n > 0 \text{ et } \|t_t\| = \mu t_n \text{ alors } \dot{u}_n = 0, \text{ et } \exists \dot{\lambda} \geq 0 \text{ tel que } -\dot{u}_t = \dot{\lambda} \frac{t_t}{\|t_t\|} \end{aligned} \quad (23)$$

Nous venons de définir les trois statuts du contact unilatéral et de frottement de manière dépendante :

- 1) relâchement
- 2) adhérence
- 3) glissement

On peut définir le cône de frottement de Coulomb, dit encore critère de frottement de Coulomb, par l'ensemble suivant :

$$K_{\mu} = \left\{ (t_n, t_t) \text{ tels que } f(t_n, t_t) = \|t_t\| - \mu t_n \leq 0 \right\}, \quad (24)$$

et la surface de glissement ∂K_{μ} dans l'espace des tractions (t_n, t_t) par la frontière de l'ensemble K_{μ} .

Pour un point régulier sur la surface de glissement représentée par la surface latérale du cône de frottement de Coulomb, la vitesse normale \dot{u}_n est nulle. Par conséquent, la vitesse relative instantanée \dot{u} est identique à sa composante tangentielle. Cette vitesse n'est pas normale à la surface de glissement ∂K_{μ} et, par conséquent, la loi de normalité classique ne peut pas s'appliquer. Compte tenu de ce qui précède, la loi de contact unilatéral avec frottement sec de Coulomb appartient aux comportements qualifiés de non-standards ou non associés. Ceci justifie l'utilisation du modèle des (MSI) dans ce travail.

Le calcul du bipotentiel de contact suit la même procédure utilisée pour déterminer le potentiel (7).

Rappelons que la puissance dissipée dans le contact avec frottement est exprimée par :

$$D = t \cdot (-\dot{u}) = -(t_n \cdot \dot{u}_n + t_t \cdot \dot{u}_t) \geq 0 \quad (25)$$

Introduisons la fonction à deux variables suivante :

$$b_c(-\dot{u}, t) = \mu t_n \|\dot{u}_t\|, \quad (26)$$

et montrons qu'elle représente un bipotentiel pour le contact et le frottement.

$b_c(-\dot{u}, t)$ est convexe car les fonctions qui la composent le sont. Il reste alors à prouver que :

$$\forall t \in K_\mu \text{ et } \forall \dot{u} \text{ tel que } -\dot{u}_n \leq 0 \text{ on a : } \mu t_n \|\dot{u}_t\| \geq -(t_n \dot{u}_n + t_t \dot{u}_t) \geq \quad (27)$$

En tenant compte de $t \in K_\mu$ et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\mu t_n \|\dot{u}_t\| \geq \|t_t\| \|\dot{u}_t\| \geq -t_t \dot{u}_t. \quad (28)$$

D'autre part, $-\dot{u}_n \leq 0$ et $t_n \geq 0$ (toujours parce que $t \in K_\mu$). D'où : $-t_n \dot{u}_n \leq 0$ donc on peut écrire :

$$\mu t_n \|\dot{u}_t\| \geq \|t_t\| \|\dot{u}_t\| \geq -t_t \dot{u}_t \geq -(t_t \dot{u}_t + t_n \dot{u}_n), \quad (29)$$

ce qui achève la démonstration.

La loi de contact complète et sa loi inverse peuvent s'écrire respectivement sous forme de lois de sous normalité implicite :

$$-\dot{u} \in \partial_t b_c(-\dot{u}, t), \quad t \in \partial_{-\dot{u}} b_c(-\dot{u}, t) \quad (30)$$

5. PROBLEMES D'EVOLUTION

5.1 Surpotentiel élastoplastique incrémental

Le comportement plastique des métaux est régi par des lois temporelles multivoques. La résolution des équations relatives à ces lois nécessite l'utilisation d'un schéma d'intégration adapté.

Dans le présent travail, la loi d'écoulement plastique est utilisée pour traiter un problème quasi statique. Le facteur temps y joue le rôle d'un simple paramètre d'évolution. La formulation incrémentale [2,3], basée sur la méthode des différences finies, permet l'élimination de la variable temps en étudiant le problème dans un pas de temps constant.

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon^p &= \varepsilon_1^p - \varepsilon_0^p, & \Delta \varepsilon^e &= \varepsilon_1^e - \varepsilon_0^e \\ \Delta \sigma &= \sigma_1 - \sigma_0, & \Delta \varepsilon &= \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (31)$$

où $\Delta \varepsilon^p$ et $\Delta \varepsilon^e$ désignent respectivement les incréments de déformation plastique et de déformation élastique.

L'indice 0 (resp.1) est relatif au début (resp. la fin) du pas.

Les lois incrémentales peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon^p &= (\varepsilon_1^p - \varepsilon_0^p) \in \partial_{\sigma} W_p(\sigma_0 + \Delta \sigma) - \varepsilon_0^p \\ \Delta \sigma &= (\sigma_1 - \sigma_0) \in \partial_{\varepsilon^p} V_p(\varepsilon_0^p + \Delta \varepsilon^p) - \sigma_0\end{aligned}\quad (32)$$

Le potentiel incrémental ΔV et son dual ΔW se calculent, dans le cas uniaxial, en utilisant les lois constitutives (32), par intégration des équations suivantes :

$$\partial_{\Delta \varepsilon} \Delta V = \partial_{\varepsilon} V(\varepsilon_0 + \Delta \varepsilon) - \sigma_0, \quad (33)$$

et
$$\partial_{\Delta \sigma} \Delta W = \partial_{\sigma} W(\sigma_0 + \Delta \sigma) - \varepsilon_0 \quad (34)$$

On peut écrire alors :

$$\Delta V(\Delta \varepsilon) = V(\varepsilon_0 + \Delta \varepsilon) - \sigma_0 \Delta \varepsilon - V(\varepsilon_0), \quad (35)$$

et
$$\Delta W(\Delta \sigma) = W(\sigma_0 + \Delta \sigma) - \varepsilon_0 \Delta \sigma - W(\sigma_0). \quad (36)$$

Le problème numérique sera résolu par la méthode des éléments finis en déplacement. De ce fait, nous ne nous intéressons dans la suite que de l'énergie de déformation élastoplastique incrémentale $\Delta V(\Delta \varepsilon)$.

Dans le cas multiaxial nous utilisons la décomposition des tenseurs de déformation et de contraintes en partie sphérique et déviatorique et une déformation plastique incompressible (pour les métaux), on adopte comme variables d'état, variables internes et variables associées :

$$\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} e_m \\ e \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^p \equiv \begin{pmatrix} e_m^p \\ e^p \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ e^e \end{pmatrix}, \quad \sigma \equiv (s_m, s). \quad (37)$$

Les éléments e_m et e sont les composantes respectives des déviateurs de déformation et de contrainte et e_m et s_m sont les traces des tenseurs de déformation et de contrainte.

Le surpotentiel élastique ΔV_e est déterminé par la loi élastique comme étant l'énergie de déformation élémentaire incrémentale définie par :

$$\Delta V_e(\Delta \varepsilon^e) = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon^e \cdot \Delta \sigma = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon^e \cdot S \cdot \Delta \varepsilon^e. \quad (38)$$

En terme des composantes Δe_m^e et Δe^e du tenseur de déformation, cette énergie prend la forme suivante [2,3] :

$$\Delta V_e(\Delta \varepsilon^e) = \frac{1}{2} K_c (\Delta e_m^e)^2 + G \|\Delta e^e\|^2, \quad (39)$$

où K_c est le facteur de compressibilité, et G le module de cisaillement de Coulomb. En fonction du module d'Young E et du facteur de Poisson ν

$$K_c = \frac{E}{3(1-2\nu)} \text{ et } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Rappelons que le surpotentiel de dissipation du modèle de von-Mises, est de la forme [2,3] :

$$V_p(\dot{\epsilon}^p) = \sigma_y \dot{p}(\dot{\epsilon}^p), \tag{40}$$

où :

$$\dot{p}(\dot{\epsilon}^p) = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p}$$

Le surpotentiel plastique ΔV_p sera déterminé par la dissipation plastique élémentaire sous forme incrémentale comme suit :

$$\Delta V_p(\Delta \epsilon^p) = \sigma_y p(\Delta \epsilon^p) - s_0 \cdot \Delta \epsilon^p \tag{41}$$

En utilisant le concept de l'inf-convolution, on construit le surpotentiel incrémental $\Delta V(\Delta \epsilon)$ comme suit [2,3]:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \inf_{\Delta \epsilon^p} [\Delta V_e(\Delta \epsilon^e) + \Delta V_p(\Delta \epsilon^p)] \\ &= \frac{1}{2} K_c (\Delta \epsilon_m)^2 + \inf_{\Delta \epsilon^p} [G \cdot (\text{tr}(\Delta \epsilon - \Delta \epsilon^p))^2 + \sigma_y p(\Delta \epsilon^p) - s_0 \cdot \Delta \epsilon^p], \end{aligned} \tag{42}$$

Hormis le cas purement élastique qui est trivial, la fonction à minimiser est différentiable.

Enfin, les lois constitutives du comportement plastique s'écrivent :

$$\Delta \epsilon = \frac{\partial \Delta W(\Delta \sigma)}{\partial \Delta \sigma}, \quad \Delta \sigma = \frac{\partial \Delta V(\Delta \epsilon)}{\partial \Delta \epsilon}. \tag{43}$$

où ΔW est le dual du surpotentiel ΔV .

5.2 Bipotential incrémental de contact

L'objectif de cette section est la formulation de la loi incrémentale du problème de contact unilatéral avec frottement sec de Coulomb. Pour cela, le schéma d'intégration implicite est utilisé. Notons par 0 et 1 le début et la fin du pas, le schéma d'intégration consiste à évaluer l'incrément de déplacement à la fin du pas et conduit à :

$$\Delta u = u_1 - u_0 = \Delta \tau \dot{u}_1, \quad \Delta t = t_1 - t_0, \tag{44}$$

où $\Delta \tau$ est le pas de temps choisi toujours supérieur à zéro.

Les lois incrémentales s'écrivent :

$$-\Delta u \in \Delta \tau \partial_t b_c \left(-\frac{\Delta u}{\Delta \tau}, t_0 + \Delta t \right), \quad \Delta t \in \Delta \tau \partial_{-\Delta u} b_c \left(-\frac{\Delta u}{\Delta \tau}, t_0 + \Delta t \right) - t_0 \quad (45)$$

Rappelons que le bipotentiel b_c est convexe et homogène d'ordre 1. Cette dernière propriété permet l'élimination du pas de temps $\Delta \tau$.

Le bipotentiel incrémental se calcule par intégration de l'équation (45) s'exprime par [2,3,5] :

$$\begin{aligned} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t) &= b_c(-\Delta u, t_0 + \Delta t) - (-t_0 \Delta u) \\ &= + t_{n0} \Delta u_n + t_{t0} \Delta u_t + \mu(t_{n0} + \Delta t_n) \|\Delta u_t\| \end{aligned} \quad (46)$$

Pour montrer que Δb_c est un bipotentiel, il suffit de suivre la même démarche suivie pour b_c .

La loi de contact et son inverse deviennent :

$$-\Delta u \in \partial_{\Delta t} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t), \quad \Delta t \in \partial_{-\Delta u} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t) \quad (47)$$

Comparé au schéma d'intégration explicite, évaluant les variables incrémentales au début du pas, le schéma implicite est caractérisé par une bonne stabilité de la convergence numérique. Le schéma explicite peut conduire à des erreurs graves. En effet si, le critère de frottement est vérifié au début du pas, rien ne le garantit à la fin du pas. De même pour le critère de plasticité.

6. REGULARISATION DU BIPOTENTIEL DE CONTACT

Le bipotentiel Δb_c calculé au paragraphe précédent est non différentiable et par suite pose des difficultés mathématiques pour le calcul des réactions en certains points de l'interface. Pour remédier à ce problème on procède à une régularisation de la loi de Coulomb. Le bipotentiel régularisé est différentiable, donc on peut déduire les réactions de contact par simple dérivation.

La loi de frottement de Coulomb est analogue à la loi rigide plastique. Le potentiel plastique est régularisé par nature par le potentiel élastique. Dans le cas du contact avec frottement nous introduisons la fonction différentiable suivante [2,3] :

$$\Delta b' = \frac{k_t}{2} (-\Delta u_t + \Delta u_t^f)^2 + \frac{k_n}{2} (-\Delta u_n + \Delta u_n^f)^2, \quad (48)$$

où k_n et k_t sont des facteurs de pénalisation, Δu_t et Δu_n sont la composante tangentielle et normale de l'incrément de déplacement total analogue au vecteur déformation totale, et Δu_n^f et Δu_t^f la composante normale et tangentielle de l'incrément de déplacement irréversible analogue à la partie plastique.

On montre que la convergence vers la solution exacte est atteinte quand les facteurs k_n et k_t prennent des valeurs très grandes.

En effet, la quantité $-\Delta u^e = -\Delta u + \Delta u^f$ correspondant à la partie élastique fictive du déplacement aux interfaces, introduite pour régulariser le bipotentiel de contact, s'exprime par :

$$\Delta u^e = \frac{t}{k}$$

La solution exacte du problème est obtenue quand Δu^e devient nulle, autrement dit quand le facteur de pénalisation k , tend vers l'infini. Pratiquement, les valeurs des facteurs de pénalisation sont choisies dans un intervalle bien déterminé (voir § 8.1) afin d'assurer la convergence et éviter, en même temps, tout risque de mauvais conditionnement numérique du problème.

En utilisant le concept de l'inf-convolution, le bipotentiel incrémental $\Delta b_c(\Delta u, \Delta t)$ peut s'écrire comme suit [2,3] :

$$\begin{aligned} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t) = \text{Inf}_{-\Delta u^f} [& t_{n_0} \Delta u_n + t_{t_0} \Delta u_t + \mu(t_{n_0} + \Delta t_n) \|\Delta u_t\| \\ & + \frac{k_t}{2} (-\Delta u_t + \Delta u_t^f)^2 + \frac{k_n}{2} (-\Delta u_n + \Delta u_n^f)^2] \end{aligned} \quad (49)$$

7. PRINCIPES VARIATIONNELS

On considère une structure Ω (figure 4) de frontière S , soumise à des incréments de tractions $\Delta \bar{t}$ sur S_1 , et à des incréments de déplacement imposés $\Delta \bar{u}$ sur S_0 . La partie $S_2 = S - S_0 \cup S_1$ est une zone candidate au contact.

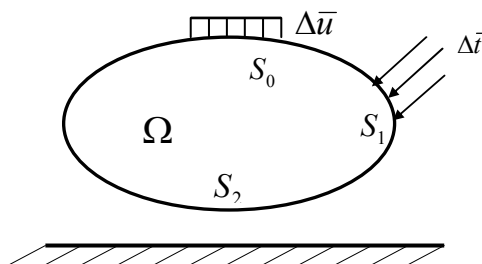


Figure 4. Structure avec contact

Un champ des incréments de déplacement est cinématiquement admissible (C.A), si les équations de compatibilité suivantes sont satisfaites :

$$\Delta \varepsilon(\Delta u^c) = \nabla_s \Delta u^c \text{ dans } \Omega, \Delta u^c = \Delta \bar{u} \text{ sur } S_0 \quad (50)$$

Un champ des incréments de contrainte est dit statiquement admissible (S.A) si les équations d'équilibre suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \text{div}(\Delta \sigma^s) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \Delta t(\Delta \sigma^s) &= \Delta \sigma^s \cdot n = \Delta \bar{t} \text{ sur } S_1 \end{aligned} \quad (51)$$

La formulation variationnelle conduit à la bifonctionnelle suivante :

$$\Delta\beta(\Delta u, \Delta\sigma) = \int_{\Omega} \Delta V(\Delta\varepsilon(u))d\Omega - \int_{S_1} \Delta\bar{t}.\Delta u dS + \int_{\Omega} [\Delta W(\Delta\sigma)]d\Omega - \int_{S_0} \Delta t(\Delta\sigma).\Delta\bar{u}dS + \int_{S_2} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t)dS \quad (52)$$

La solution exacte du problème aux limites, est simultanément solution des principes variationnels suivants [1,2] :

$$\begin{aligned} \text{Inf}_{\Delta u \in C.A} \Delta\beta(\Delta u^c, \Delta\sigma) \quad \text{et} \quad \text{Inf}_{\Delta\sigma \in S.A} \Delta\beta(\Delta u, \Delta\sigma) \end{aligned} \quad (53)$$

Nous avons choisi la formulation en déplacements, donc la fonction qui sera utilisée dans les calculs numériques se réduit à :

$$\Delta\Phi(\Delta u) = \int_{\Omega} \Delta V(\Delta\varepsilon(u))d\Omega - \int_{S_1} \Delta\bar{t}.\Delta u dS + \int_{S_2} \Delta b_c(-\Delta u, \Delta t)dS \quad (54)$$

Le problème à résoudre se réduit à :

$$\begin{aligned} \text{Inf}_{\Delta u \in C.A} \Delta\Phi(\Delta u^c) \end{aligned} \quad (55)$$

Les problèmes de minimisation sont résolus par le code de programmation mathématique Minos [9]. Ce lui ci fourni les déplacements minimisant la fonctionnelle (54), les contraintes correspondant sont calculées en utilisant la méthode du point fixe de Ladeveze [1,2,3].

8. APPLICATIONS

Les exemples numériques sont réalisés par le code de calcul **SOLCONT** [3].

8.1 Poinçonnement

Dans cette section, nous traitons un exemple simple afin de montrer l'effet de la valeur des facteurs de pénalisation sur la convergence numérique. On considère un bloc métallique élastique, soumis à l'action d'un poinçon rigide comme illustré dans la figure 5. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont :

- Module d'Young $E = 210000 \text{ MPa}$
- limite élastique $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$
- coefficient de Poisson $\nu = 0.3$
- facteur de frottement $\mu = 0.1$

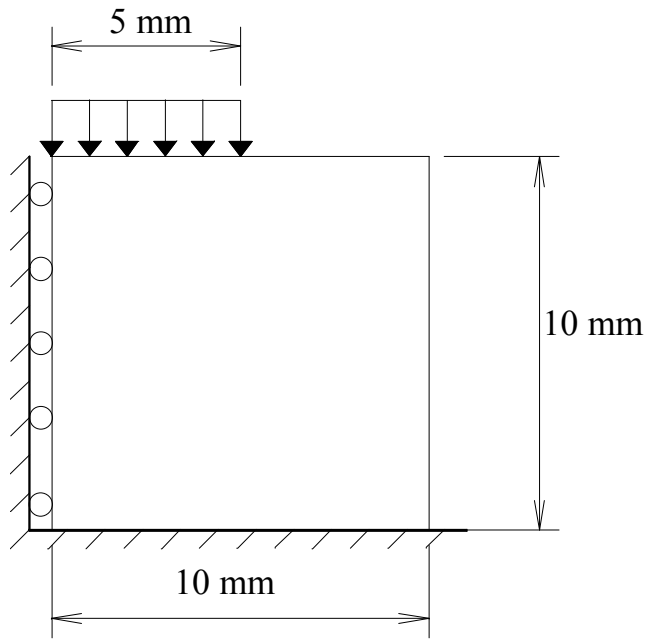


Figure 5: Géométrie et condition aux limites

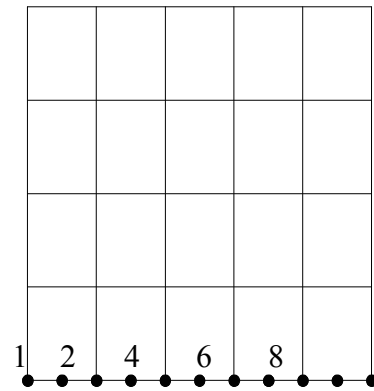


Figure.6 Maillage 20 éléments rectangulaires à 8 noeuds

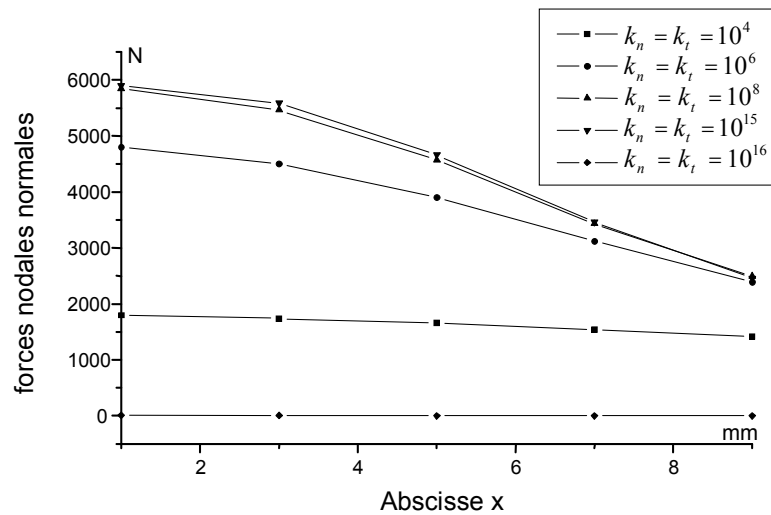


Figure.7: Courbes des forces normales nodales (maillage de 20 éléments)

La convergence est atteinte pour les valeurs des facteurs de pénalisation comprises entre 10^8 et 10^{15} . Pour des valeurs du facteur de pénalisation trop petites ($\leq 10^4$) ou trop grandes ($> 10^{15}$) on obtient des résultats erronés. Ce qui est évident car d'une part, de point de vue théorique la convergence vers la solution exacte n'est atteinte que lorsque les facteurs de pénalisation tendent vers l'infinie, ce qui justifie les résultats obtenus pour les valeurs trop petites de la pénalisation, et d'autre part la capacité du compilateur limite une certaine valeur numérique maximale des nombres traités, ce qui exige un bon conditionnement numérique du problème et de rester à l'intérieur de l'intervalle du compilateur. Ceci peut interpréter les résultats insignifiants obtenus dans le cas des grandes valeurs de la

pénalisation. En générale la convergence numérique est atteinte, pour chaque problème, quand les valeurs de pénalisation appartiennent à un certain intervalle à déterminer par l'expérience.

8.2 Coupe orthogonale

Le processus de coupe des métaux est l'un des procédés classiques les plus courants en fabrication mécanique. Le contact avec frottement est crucial dans ce domaine, vu son influence sur l'usure des outils, le rendement des machines et la qualité du produit fini. Nous nous intéressons, dans un premier temps à la modélisation numérique du contact outil/ pièce afin de déterminer l'intensité des efforts développés pendant le processus de coupe.

En cours d'usinage, l'outil exerce sur la pièce un effort appelé «effort de coupe». Dans la pratique, on considère que cet effort se répartit suivant les deux directions principales définies par la direction de coupe et la direction d'avance, et une troisième direction définie par le produit vectoriel des deux premières [1,3].

Afin de simplifier l'étude de la coupe, on se ramène à un plan en employant la coupe dite orthogonale. Ce plan d'étude est défini par la direction de coupe et la direction perpendiculaire à celle d'avance et de coupe. Le planage en rabotage constitue un exemple concret de la coupe orthogonale.

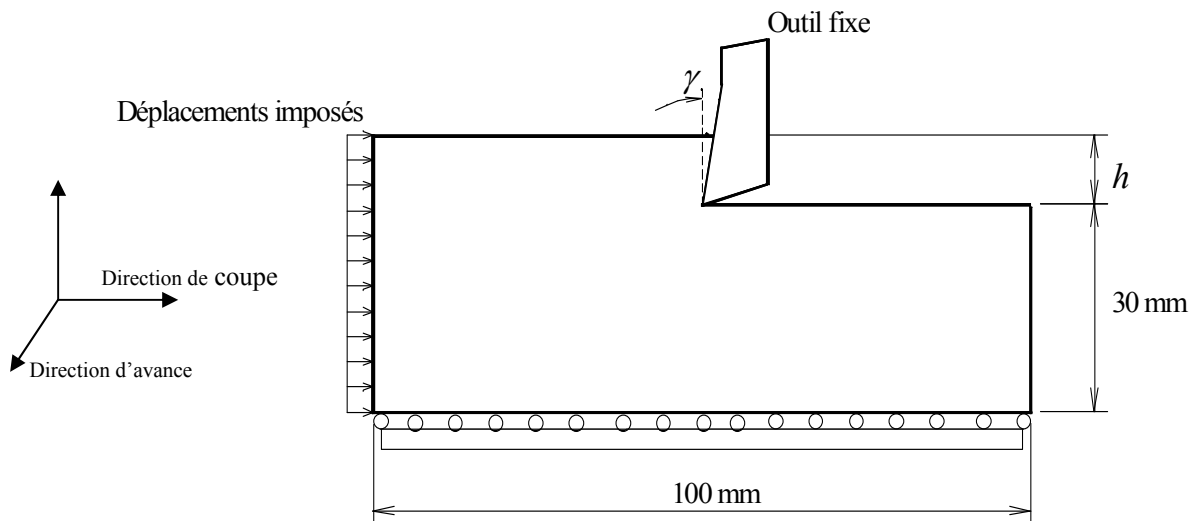


Figure 8: Procédé de coupe : géométrie et conditions aux limites

8.2.1 Comparaison des résultats

Dans cette section nous cherchons à comparer nos résultats à ceux obtenus par d'autres approches. Nous avons considérés l'exemple traité par Zorev [11] avec les mêmes caractéristiques mécaniques et les mêmes conditions de coupe. Le maillage est constitué en Cinquante éléments rectangulaires à 8 nœuds et quatre éléments de contact à six nœuds aux interfaces.

Les caractéristiques du matériau sont :

- Module d'Young : $E = 210000 \text{ MPa}$
- Coefficient de poisson : $\nu = 0.3$
- Limite d'élasticité : $\sigma_y = 500 \text{ MPa}$

Les conditions de coupes sont choisies telles que :

- Angle de coupe $\gamma = 0^\circ$
- facteur de frottement $\mu = 0.1$
- Profondeur de passe $h = 0.1 \text{ mm}$

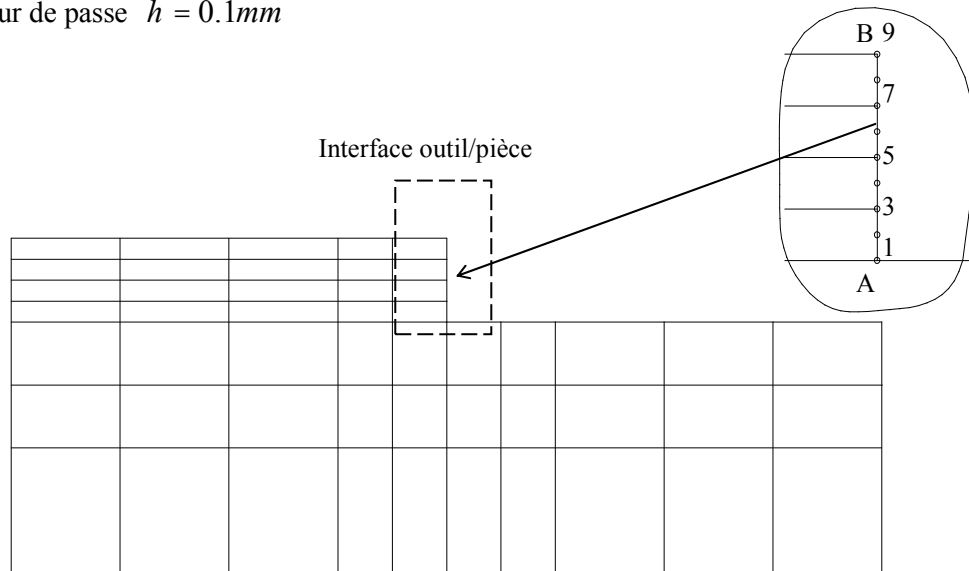


Figure 9 : Maillage : 50 éléments rectangulaires à 8 noeuds

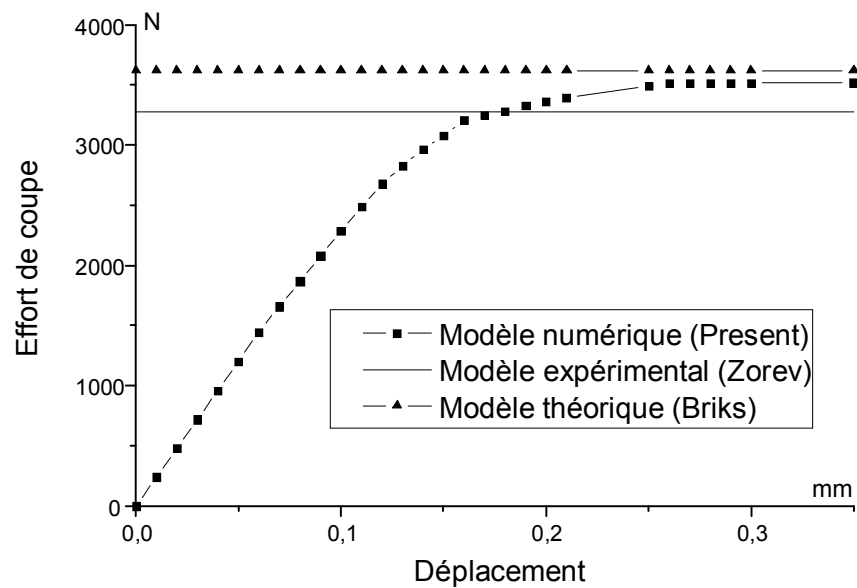


Figure 10 : Courbes de comparaison des valeurs de l'effort de coupe

On constate une bonne concordance entre les résultats du modèle numérique et ceux du modèle théorique proposé par Bricks et expérimental [11].

8.2.3 Effet de l'érouissage

Les caractéristiques du matériau sont :

- Module d'Young : $E = 210000 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$
- Limite d'élasticité : $\sigma_y = 800 \text{ MPa}$

Les conditions de coupes sont choisies telles que :

- Angle de coupe $\gamma = 0^\circ$
- facteur de frottement $\mu = 0.1$
- Profondeur de passe $h = 10 \text{ mm}$

La loi d'érouissage utilisée s'exprime par :

$$\sigma = \sigma_0 (1 + M\varepsilon^n)^n$$

où σ_0 est la contrainte d'écoulement initiale, σ la contrainte actuelle et M et n sont les paramètres d'érouissage. Pour ce exemple on prend $M=1/0.0039$ et $n=0.1$.

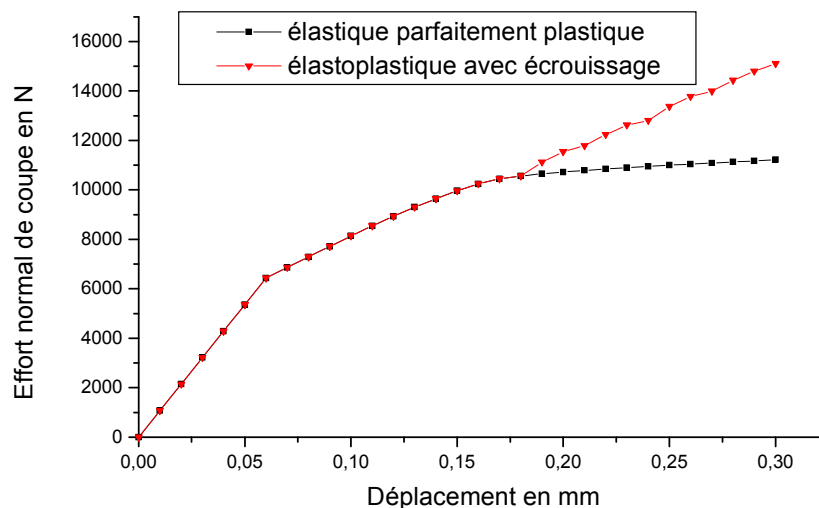


Figure 11 : Courbes charge-déplacement : effet de l'érouissage

Les courbes de la figure montrent que l'effort de coupe pour un modèle avec érouissage est nettement supérieur à celui obtenu dans le cas du modèle élastique parfaitement plastique. Ce résultat permet de connaître l'erreur qui peut être commise en négligeant l'effet de l'érouissage du matériau pendant le processus de coupe.

8.2.3 Effet des frottements

Dans cette section nous présentons l'effet de la valeur du facteur de frottement sur la distribution des forces de contact le long de l'interface outil/pièce. Nous conservons les mêmes propriétés du matériau de la section précédente (§ 8.2.2) avec un frottement variable.

Pour des raisons de clarté, nous présentons les résultats obtenus sur les nœuds sommet seules (1,3,5,7,9), puis pour ceux de milieu seuls des éléments de contact (2,4,6,8).

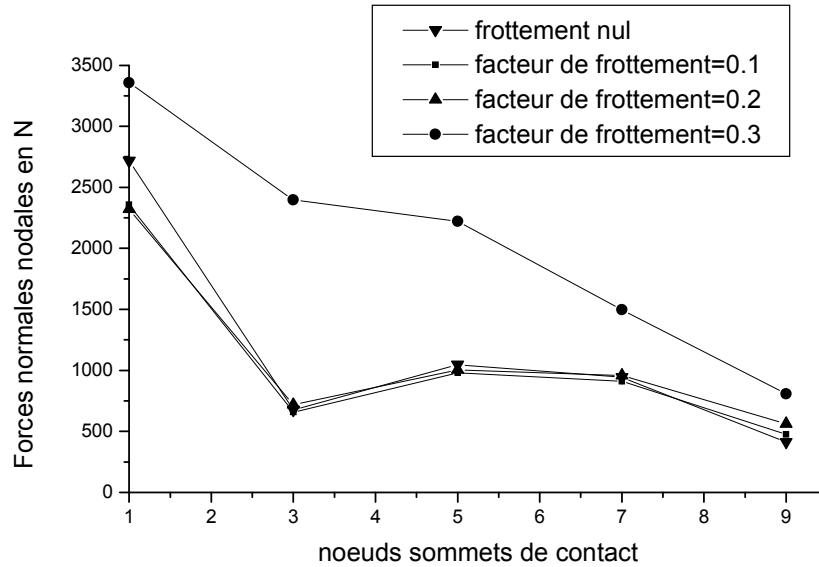


Figure 12. Distribution des forces nodales normales le long de l'interface (nœuds sommets)

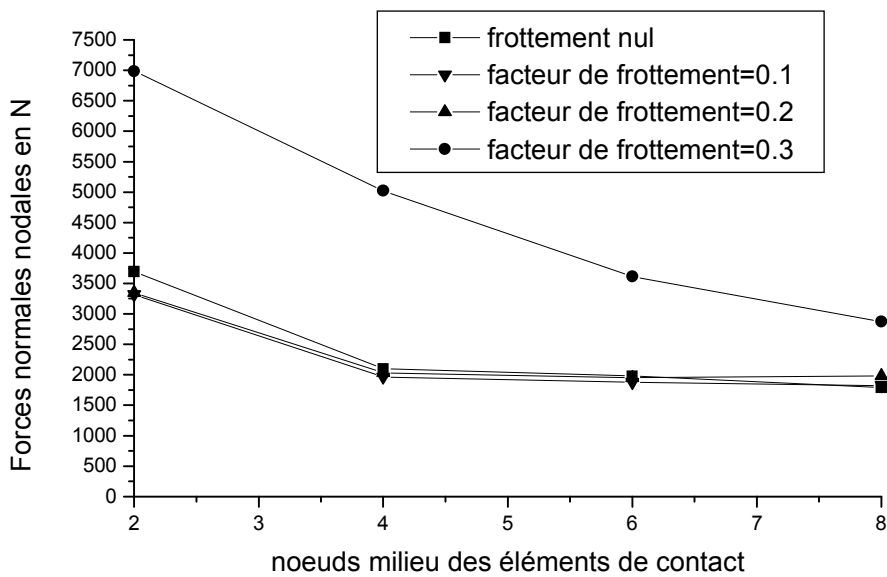


Figure 13 : Distribution des forces nodales normales le long de l'interface (nœuds milieux)

Les courbes des figures 12 et 13 montrent que d'une part, l'effort de coupe est maximal au bec de l'outil et diminue progressivement en s'éloignant de ce point, et d'autre part que lorsque le frottement

devient important les efforts développés pendant le processus de coupe augmentent de façon remarquable. Pratiquement, ceci se traduit par une augmentation de l'usure des outils et une diminution de la qualité de produit, d'où la nécessité de maîtriser les conditions de frottement pendant le processus de coupe.

8.3 Effet des frottements sur l'état de déformation d'un anneau axisymétrique

Les propriétés mécaniques des matériaux telles que la limite élastique et le module d'Young peuvent être déterminées par l'essai classique de traction. Mais la détermination des conditions de frottement, en particulier la valeur du coefficient de frottement aux interfaces de contact pendant les processus de mise en forme des métaux, reste de nos jours l'un des problèmes les plus délicats à cerner.

Des formules théoriques et des essais expérimentaux [10] ont montré que si on soumet un anneau à une compression axiale entre deux plateaux rigides, il se produit un écoulement de la matière, conséquence de la réduction de l'épaisseur de l'anneau, qui modifie les rayons intérieur et extérieur de l'anneau. Leur valeur finale et leur forme (possibilité d'avoir «borelling», c'est à dire déformation en 'tonneau' des faces latérales) dépendent du frottement à l'interface anneau-plateau.

Dans l'hypothèse d'un frottement nul, l'anneau se déformerait de la même façon qu'un cylindre plein, chaque élément s'écoulant vers l'extérieur d'une quantité proportionnelle à sa distance de l'axe, en particulier les éléments du cercle intérieur de l'anneau.

Lorsqu'il est modéré, les rayons intérieur et extérieur n'augmentent plus proportionnellement. Le frottement freine l'écoulement vers l'extérieur.

Lorsqu'il est important, l'écoulement peut se diviser en deux flux, l'un orienté vers l'extérieur (le rayon extérieur augmente donc plus lentement que pour un frottement nul), l'autre vers l'intérieur de l'anneau (le rayon intérieur diminue).

Il apparaît donc que le rayon intérieur d'un anneau soumis à un essai de compression est très sensible au frottement à l'interface.

Nous traitons ici, par la simulation numérique, l'effet de la valeur du coefficient de frottement sur l'état de déformation d'un anneau axisymétrique.

8.3.1 Interprétation théorique

Nous considérons un anneau soumis à la compression entre deux plateaux rigides. On suppose le plateau inférieur fixe et le plateau supérieur animé d'une vitesse constante V_z [10].

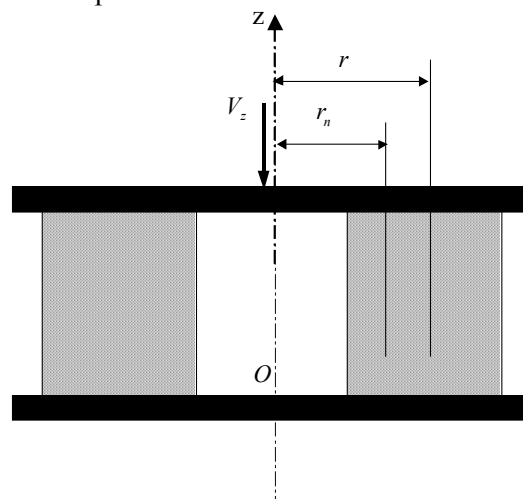


Figure 14 : Géométrie et conditions aux limites

Concernant l'étude théorique nous reprenons celle présentée par Oudin [10] reposant sur un modèle rigide plastique. Dans ce cas, l'incompressibilité du matériau est exprimée dans le système de coordonnées cylindriques par :

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = 0, \quad (56)$$

où $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\epsilon}_z$ désignent les composantes du vecteur des vitesses de déformations selon les directions r, θ, z

Utilisant les relations suivantes [10]:

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial V_z}{\partial z}, \dot{\epsilon}_\theta = \frac{V_r}{r}, \dot{\epsilon}_r = \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad (57)$$

où V_r est la vitesse de glissement radiale.

L'équation (56) devient :

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_r}{\partial r} = 0 \quad (58)$$

Si la variation de la vitesse est linéaire dans l'anneau on peut écrire la relation suivante :

$$V_z = az + b \quad (59)$$

Les constantes a et b sont calculées en utilisant les conditions aux limites suivantes :

$V_z = 0$ pour $z = 0$ (le plateau inférieur est supposé fixe)

Posons $V_z = -1$ pour $z = l$ (le plateau supérieur est animé d'une vitesse unitaire).

On aboutit finalement aux relations suivantes :

$$V_z = -\frac{z}{l} \quad (0 \leq z \leq l) \quad (60)$$

et

$$\dot{\epsilon}_z = -\frac{1}{l} \quad (61)$$

En utilisant l'équation d'incompressibilité du matériau (57) et la relation (61) nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = \frac{1}{l} \quad (62)$$

Après intégration par variation de la constante, il vient :

$$V_r = \frac{r^2 - c^2}{2lr} \quad (63)$$

c étant une constante dépendant des conditions aux limites.

Lorsque le frottement est nul, $V_r = 0$ pour $r = 0$ (analogie avec la compression de cylindre), soit $c=0$ et, le champ des vitesses est linéairement croissant.

La vitesse est freinée par le frottement et sa distribution n'est plus linéaire. Et on a les trois cas suivant :

- Ecoulement vers l'extérieur si :

$$r^2 > c^2$$

- Secteur fixe si

$$r^2 = c^2$$

On peut constater que c représente le rayon de la partie fixe appelé aussi le rayon neutre (r_n).

- Ecoulement vers l'intérieur si :

$$r^2 < c^2$$

8.3.2 Résultats numériques

Le modèle numérique qui sera présenté dans cette section permet de mettre en évidence le résultat de l'interprétation théorique. Par raison de symétrie on ne considérera que le quart de la structure.

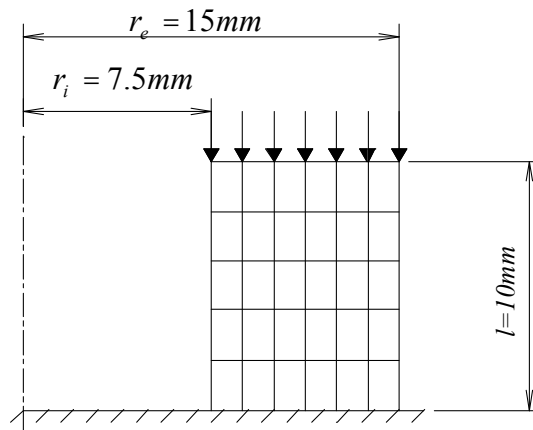


Figure 15 : Géométrie et maillage

8.3.2.1 Champs de déplacement

A partir d'un coefficient de frottement de 0.15, nous remarquons une séparation du champ de déplacement en deux flux ; un dirigé vers l'intérieur et un autre vers l'extérieur. Cet exemple a été utilisé pour déterminer le coefficient de frottement dans les procédés de formage des métaux par déformation plastique [10].

A partir d'un coefficient de frottement de 0.15, nous remarquons une séparation du champ de déplacement en deux flux ; un dirigé vers l'intérieur et un autre vers l'extérieur.

La figure 16 montre qu'à partir d'un coefficient de frottement supérieur à 0.15, nous constatons l'existence d'un écoulement vers l'intérieur et un autre vers l'extérieur. On remarque également que le rayon neutre augmente progressivement avec l'accroissement du frottement (figure. 17).

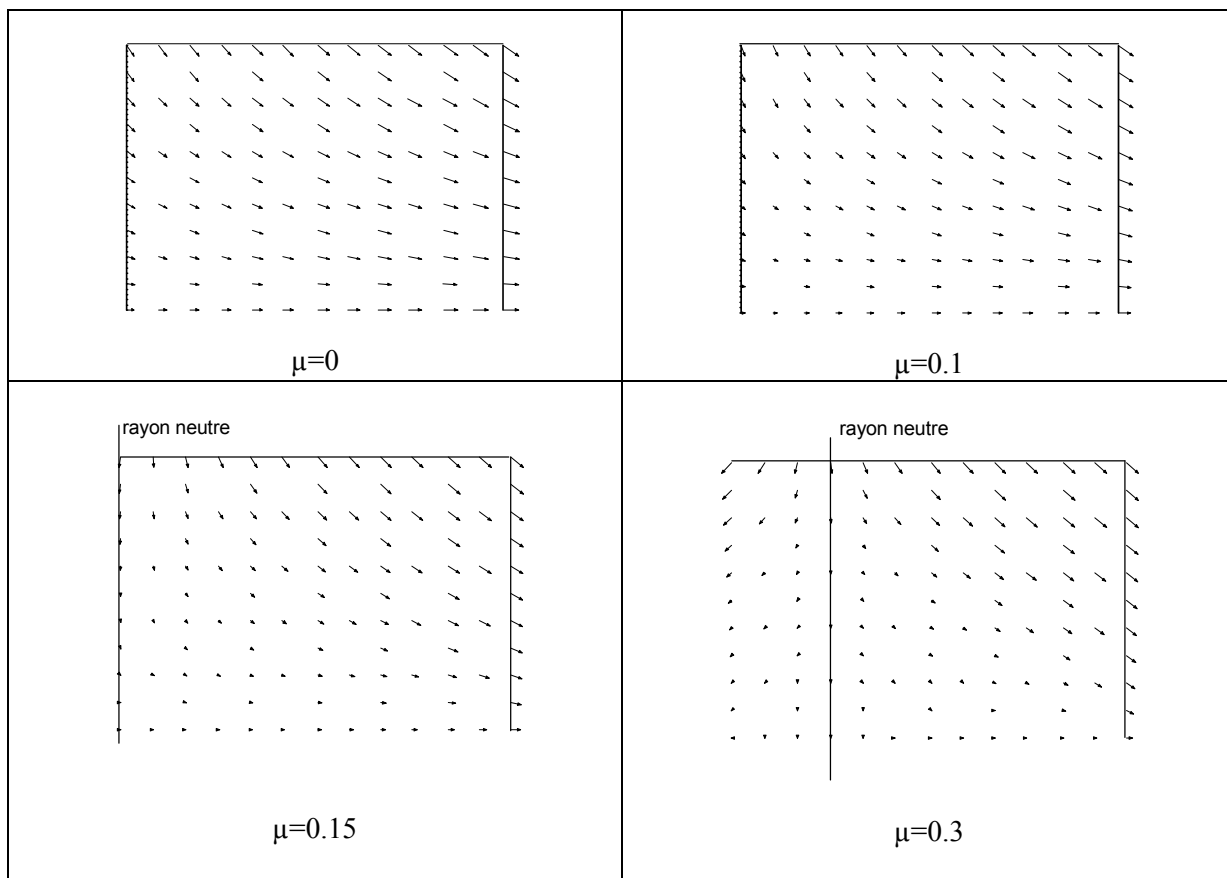


Figure 16 : Champs de déplacement pour différentes valeurs du coefficient de frottement

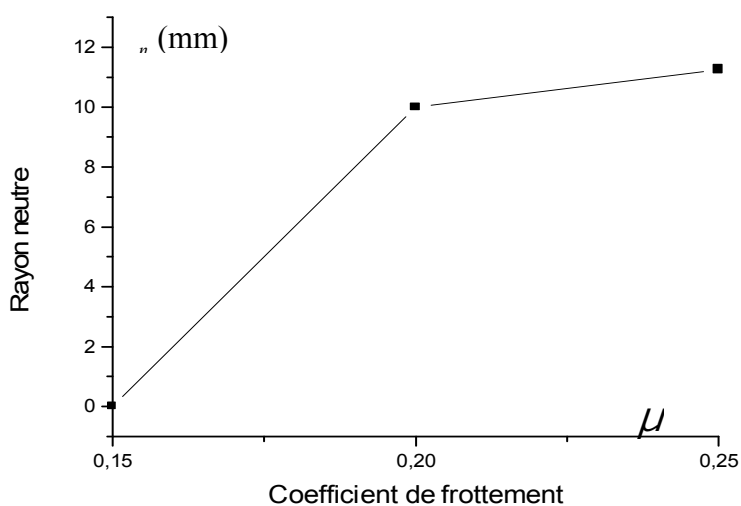


Figure 17 : Courbe de variation du rayon neutre

8.3.2.2 Courbes de variation du rayon intérieur en fonction de la réduction de la hauteur de l'anneau

De ce qui précède, on conclut que l'état de déformation d'un anneau axisymétrique est très sensible à la valeur du coefficient de frottement. Cet exemple peut être exploité pour déterminer la valeur du coefficient de frottement dans des essais expérimentaux de compression d'anneau avec des conditions de frottements inconnues.

Ce fait est réalisé en utilisant les courbes de la figure 18. Pratiquement on choisit un matériau dont les propriétés mécaniques sont connues et on trace les courbes de variation du rayon intérieur en fonction de la réduction de sa hauteur pour différentes valeurs du coefficient de frottement.

Après on peut faire des essais expérimentaux de compression d'anneau de même géométrie dans des conditions de frottement différentes. On mesure dans chaque essai la variation du rayon intérieur, on trace la courbe expérimentale et on cherche la courbe numérique la plus proche de cette dernière. On aura ainsi une approximation du coefficient de frottement réel.

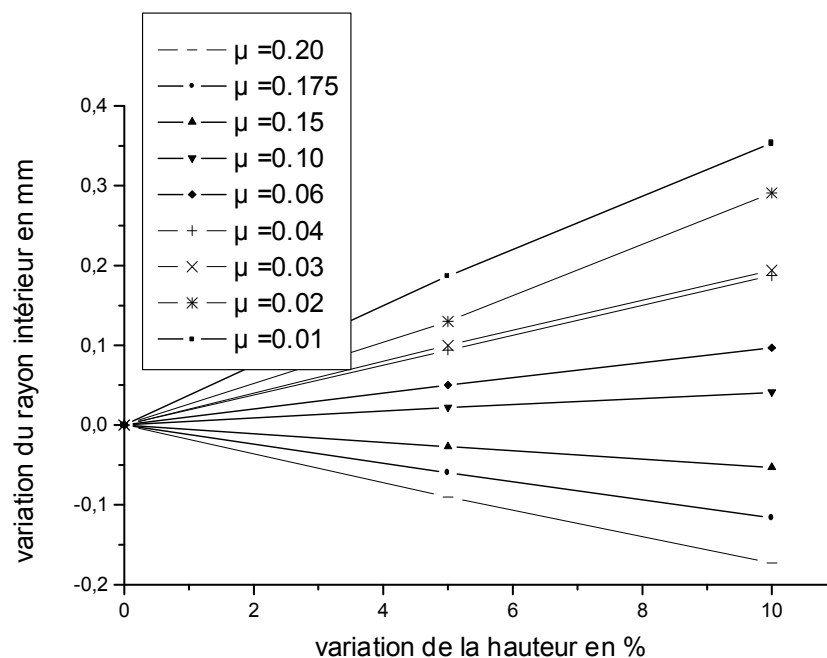


Figure 18a : Courbes numériques

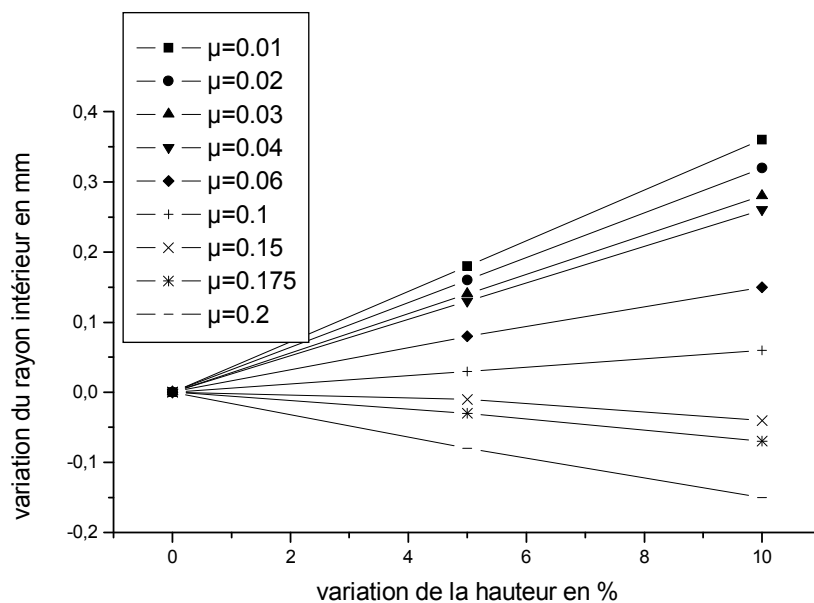


Figure 18b : Courbes théoriques selon Oudin [10]

En comparant les courbes numériques avec les courbes théoriques, nous constatons un très bon accord entre les allures des deux types de courbes.

Malgré les hypothèses simplificatrices sur lesquelles est basé le modèle théorique, ce dernier donne des résultats très intéressants servant de référence pour la comparaison des résultats du modèle numérique.

Il est à noter que le modèle numérique ne néglige pas la déformation de l'anneau en tonneau. De ce fait nous pouvons conclure que les courbes numériques caractérisent avec plus de précision les conditions de frottement dans un processus de mise en forme des métaux.

9. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Un algorithme de résolution du problème d'évolution élastoplastique en présence de la loi non associée de contact avec frottement sec de Coulomb est présenté.

La modélisation du comportement non standard des interfaces de contact est faite par l'outil théorique du bipotentiel. Le schéma d'intégration implicite est utilisé pour transformer les lois temporelles de plasticité et de contact en des lois incrémentales indépendantes du temps. La régularisation du bipotentiel a permis de surmonter les difficultés mathématiques du à la non différentiabilité de la loi de contact avec frottement de coulomb.

Des applications de la présente méthode sur des exemples industriels comme la coupe et la compression d'anneau axisymétrique ont été réalisés avec succès.

Les résultats obtenus montrent la faisabilité de la méthode et la fiabilité du programme informatique élaboré.

En perspective des travaux sont en cours pour améliorer le présent programme et consistent essentiellement à introduire une modélisation tridimensionnelle et une procédure de remaillage adaptatif pour nous permettre de traiter des applications plus complexes et de façon plus approfondie sur les procédés de formage des métaux.

10. REFERENCES

1. FIIHRI FASSI H., BOUSSHINE L., CHAABA A., ELHARIF A., Numerical simulation of orthogonal cutting problem by incremental elastoplastic analysis and finite element method, *Journal Of Materials Processing Technology* (2003)
2. FIIHRI FASSI H., BOUSSHINE, KOUAM M., A., ELHARIF A., DE SAXCE G., Analyse du problème d'évolution élastoplastique en présence d'une loi non associée de contact avec frottement , *Revue européenne des éléments finis*, Hermès, Vol 12, n°5 octobre 2003.
3. FIIHRI FASSI H., Simulation numérique des procédés de formage à froid des métaux en présence d'une loi non-associée de contact avec frottement, thèse de Doctorat , Décembre 2002, Faculté des Sciences Rabat.
4. De Saxcé, G. and Feng, Z. Q. New inequality and fonctionnal for contact with friction : the implicit standard matériel approach. *Mech. Struct. Match.*, vol 19, 3, 301-325, (1991).
5. DE SAXCÉ, G. and FENG, Z. Q., The bipotential Method : A constructive Approach to design the complete Contact Law with Friction and Improved Numerical Algorithms. *Mathl. Comput. Modelling* Vol. 28, No. 4-8, pp. 225-245, (1998)
6. JEAN M. ET TOUZOT G., Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformation problems, *Journal of theoritical and applied mechanics*, Special issue, supplement n°1 to vol 7, (1988).
7. Moreau, J. J., Proximité et dualité dans un espace Hilbertien. *Bull. Soc. Math., France*, 93, pp. 273-299, (1965).
8. MOREAU, J.-J., la notion de surpotentiel et les liaisons unilatérales en élastoplasticité, *C. R.Acad. Sc. Paris*, t. 267. 16 Décembre 1968.
9. MURTAGH, B.A. and SAUNDERS, M.A Minos 5.1 User's guide. Technical rapport sol83
10. OUDIN J., Contributions divers à l'étude de la déformation des métaux par la théorie de la plasticité, (1979).
11. ZOREV N.N., *Metal cutting mechanics*, Pergamon Press (1966).