

Effets d'une modulation de température à la frontière sur l'instabilité convective d'une couche liquide viscoélastique

B. Oukada

Faculté de Sciences Aïn Chock, UFR de Mécanique, P.B. 5366 Maârif, Casablanca, Maroc

M. T. Ouazzani

Faculté de Sciences Aïn Chock, UFR de Mécanique, P.B. 5366 Maârif, Casablanca, Maroc

S. Aniss

Faculté de Sciences Aïn Chock, UFR de Mécanique, P.B. 5366 Maârif, Casablanca, Maroc

Résumé

Ce travail porte sur l'étude des effets d'une modulation des conditions aux limites relatives à la température sur le seuil convectif d'une couche liquide horizontale et d'extension infinie. Dans ce cadre nous supposons d'une part que le comportement du liquide est régi par une loi de type Maxwell linéaire et d'autre part que le gradient de température imposé à la couche liquide possède une composante stationnaire et une autre variable au cours du temps. La théorie de Floquet combinée avec une méthode numérique transformant le problème aux valeurs propres, obtenu à partir d'une étude de stabilité linéaire, en un problème aux conditions initiales, nous permettent de mettre en évidence, l'influence de cette modulation sur le seuil critique de convection.

Abstract

In this work we study the effects of the temperature modulation, applied at the horizontal boundaries, on the onset of convection of a horizontal liquid layer. We suppose that the fluid satisfies the Maxwellian model and the gradient of the temperature have a steady component and a time dependent component. To analyse the effect of the temperature modulation, we restrict our study to a linear stability analysis. Thus the Floquet theory and a technique of converting a boundary value problem to an initial value problem are used to solve the system of equations corresponding to the onset of convection. The obtained results allow us to characterize the influence of modulation effects and that of the viscoelastic nature of liquid on the critical Rayleigh number.

1. INTRODUCTION

En convection naturelle, l'étude des effets de la modulation gravitationnelle et de ceux résultant de la modulation des conditions aux limites relatives à la température sur le seuil critique de convection a déjà fait l'objet de plusieurs investigations [1-7]. La modulation gravitationnelle se réalise en faisant osciller verticalement une couche liquide soumise à un gradient de température vertical et uniforme alors que celle portant sur les conditions aux limites est obtenue dans le cas où une excitation, par une température variant périodiquement dans le temps, est imposée sur les frontières de cette couche liquide. Pour ces deux types de modulation le temps apparaît de façon explicite dans les équations régissant le mouvement de convection ce qui permet de retarder ou d'accélérer le seuil critique correspondant [1-7]. Pour le deuxième type de modulation, tous les travaux antérieurs ont examiné le cas d'une couche newtonienne. Dans ce cadre, Venezian [1] s'est intéressé au cas où le gradient de

température imposé possède une composante stationnaire et une autre fluctuant de façon sinusoïdale avec une faible amplitude. Il a alors montré, à partir d'une méthode de perturbations et pour le cas libre- libre, que cette modulation de la température à la frontière peut avoir un effet déstabilisant ou stabilisant suivant qu'il s'agisse d'une modulation en phase ou en opposition de phase. Par la suite ce même problème a été abordé par Rosenblat et Herbert [3] dans le cas où les fréquences des excitations de température sont supposées faibles et leurs amplitudes quelconques, ils ont alors obtenu une solution asymptotique par le moyen de la méthode de perturbation WKB. Dans le cas où l'amplitude et la fréquence de cette modulation sont arbitraires, Yih et Li [4] ont montré, en utilisant une méthode de Galerkin, que le seuil critique de convection correspond soit à des solutions harmoniques soit à des solutions sous harmoniques. Il est à noter que ces travaux ont toujours considéré soit une modulation périodique de température sur le plan horizontal inférieur soit une modulation harmonique en phase ou avec déphasage des températures imposées sur les plans horizontaux inférieur et supérieur de cette couche liquide. Dans un travail plus récent et en utilisant la méthode de Galerkin, Bhadauria et Bhatia [7] ont étudié l'effet d'une modulation en phase et en opposition de phase pour différents profils de température imposés aux frontières d'une couche liquide. Pour ce qui concerne le cas d'un liquide viscoélastique, le seul travail qu'on peut citer dans ce cadre est celui présenté par Yang [8] qui a considéré le cas d'une couche liquide horizontale soumise à un gradient de température vertical et uniforme en présence d'oscillations verticales. Dans ce problème, où le liquide obéit à un comportement de type Maxwell, l'influence du nombre de Deborah sur le seuil critique de convection a été mise en évidence. En effet et pour le cas des fréquences intermédiaires, ce seuil critique peut être accéléré ou retardé suivant qu'il s'agisse de faibles ou de grandes valeurs du nombre de Deborah. Il est à signaler que la résolution du système d'équations aux perturbations, dégagées à partir d'une étude de stabilité linéaire de ce problème, a été effectuée à partir de l'utilisation de la méthode spectrale de collocation. En nous inscrivant dans le cadre de cette même problématique [8] nous effectuons dans ce travail une analyse de stabilité linéaire pour le cas d'une modulation des températures imposées aux frontières d'une couche liquide viscoélastique horizontale et d'extension infinie. Le liquide considéré est de type Maxwell linéaire et le gradient de température imposé est vertical et comporte une partie stationnaire et une autre variable au cours du temps. Pour la détermination des solutions harmoniques correspondant aux cas libre-libre et rigide-rigide, nous nous sommes inspirés des travaux de Aouidef et al. [9]. En effet la théorie de Floquet est ici combinée avec une méthode numérique qui consiste à transformer le problème aux valeurs propres, que l'on obtient à partir d'une analyse de stabilité linéaire, en un problème aux conditions initiales. Les résultats obtenus dans ce cadre, nous permettent alors de caractériser l'influence des effets de cette modulation et celle due à la nature viscoélastique du liquide sur le nombre de Rayleigh critique.

2. FORMULATION ET STABILITE

Dans le système des coordonnées cartésiennes (x^*, y^*, z^*) , on considère une couche liquide comprise entre deux plans parallèles et infinis d'équations respectives $z^* = 0$ et $z^* = L$. Le plan inférieur et supérieur sont maintenus respectivement aux températures dimensionnelles suivantes:

$$T^* = \begin{cases} T_2 + T_s \cos(\omega^* t^*) & \text{en } z^* = 0 \\ T_1 + \delta T_s \cos(\omega^* t^*) & \text{en } z^* = L \end{cases} \quad (1)$$

où T_2 est supérieur à T_1 . Les quantités T_s et ω^* désignent respectivement l'amplitude et la fréquence de la modulation. Le paramètre $\delta = \pm 1$ permet de distinguer le cas d'une modulation en phase de celui d'une modulation en opposition de phase. Par ailleurs, le liquide considéré est supposé de type Maxwell linéaire [10] dont le comportement est régi par l'équation suivante:

$$\tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} = \eta (\nabla V^* + \nabla^t V^*) \quad (2)$$

où λ est le temps de relaxation du liquide, η sa viscosité dynamique, τ^* le tenseur de contraintes, t^* le temps et V^* le vecteur vitesse.

Dans une approche analogue à celle utilisée par Yang [8], nous considérons que l'état de base est défini par un champ de vitesse nul ($V^* = 0$) et une contrainte nulle ($\tau^* = 0$). Dans ce cadre la température de base adimensionnelle $\bar{T} = \frac{(T^* - T_1)}{T_2 - T_1}$ est solution de l'équation de diffusion de la chaleur suivante:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \quad (3)$$

avec :

$$\bar{T}(z=1) = \delta a \cos(\Omega t) \quad (4)$$

$$\bar{T}(z=0) = 1 + a \cos(\Omega t) \quad (5)$$

où $t = t^* k / L^2$ (k étant la diffusivité thermique du liquide) et $z = z^* / L$. Les grandeurs $\Omega = \omega^* L^2 / k$ et $a = T_s / (T_2 - T_1)$ désignent respectivement les expressions adimensionnelles de la fréquence et de l'amplitude de la modulation considérée. La solution de l'équation (3) vérifiant les conditions (4) et (5) est donnée alors :

$$\bar{T} = 1 - z + a [T_1(z) \cos(\Omega t) + T_2(z) \sin(\Omega t)] \quad (6)$$

Avec:

Pour $\delta = 1$

$$T_1(z) = \frac{\cos(\sigma(1-z)) \cosh(\sigma z) + \cosh(\sigma(1-z)) \cos(\sigma z)}{\cosh(\sigma) + \cos(\sigma)},$$

$$T_2(z) = \frac{\sin(\sigma(1-z)) \sinh(\sigma z) + \sinh(\sigma(1-z)) \sin(\sigma z)}{\cosh(\sigma) + \cos(\sigma)}$$

Pour $\delta = -1$

$$T_1(z) = \frac{\cos h(\sigma(1-z)) \cos(\sigma z) - \cos(\sigma(1-z)) \cosh(\sigma z)}{\cosh(\sigma) - \cos(\sigma)},$$

$$T_2(z) = \frac{\sin h(\sigma(1-z)) \sin(\sigma z) - \sin(\sigma(1-z)) \sinh(\sigma z)}{\cosh(\sigma) - \cos(\sigma)}$$

où $\sigma = \sqrt{\Omega}/2$. Notons qu'à l'équilibre la température de base possède une composante stationnaire et une autre variable au cours du temps. Par ailleurs, il est à signaler que cette dernière a la même forme que celle déjà retenue par Aouided et al. [9] lors de l'étude de la stabilité de l'écoulement de base d'un liquide confiné entre deux cylindres coaxiaux oscillant avec la même fréquence autour de leur axe.

En introduisant les variables adimensionnelles

$$V = V^* L / k, \quad \tau = \tau^* (L^2 / \eta k), \quad p = p^* (L^2 / \eta k)$$

et en superposant à la solution de base définie ci-dessus des perturbations infinitésimales en pression, température, contrainte, densité et vitesse ($p', T', \tau, \rho', V(U, V, W)$), on obtient les équations de conservation adimensionnelles et linéarisées suivantes:

$$\nabla \cdot V = 0 \tag{7}$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial V}{\partial t} = -\nabla p' + Ra T' \bar{e}_z + \nabla \tau \tag{8}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + V \cdot \nabla \bar{T} = \Delta T' \tag{9}$$

$$\tau + \Gamma \frac{\partial \tau}{\partial t} = \nabla V + \nabla^t V \tag{10}$$

où $Pr = \nu/k$ est le nombre de Prandtl, $Ra = \chi g(T_2 - T_1)L^3 / \nu k$ le nombre de Rayleigh et $\Gamma = \lambda k / L^2$ le nombre de Deborah; on désigne par χ le coefficient de dilatation thermique.

Dans le système (7)-(10), la prise en compte de l'équation (10) dans l'équation (8) et l'élimination de la pression p' ainsi que des composantes U et V du vecteur vitesse, permettent d'obtenir le système suivant [8,14]:

$$(Pr^{-1}(1 + \Gamma \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial t} (\Delta W)) = Ra (1 + \Gamma \frac{\partial}{\partial t}) \Delta_2 T' + \Delta(\Delta W) \tag{11}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + W \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \Delta T' \tag{12}$$

avec : $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ et $\Delta_z = \Delta - \partial^2 / \partial z^2$. Le système (11)-(12) est associé aux conditions aux limites suivantes:

$$(a) \text{ Cas rigide-rigide: } T' = W = D W = 0 \quad \text{en} \quad z=0,1$$

$$(b) \text{ Cas libre-libre: } T' = W = D^2 W = 0 \quad \text{en} \quad z=0,1$$

L'analyse en modes normaux des équations (11)-(12) conduit à la détermination des solutions W et T' sous la forme :

$$W = \tilde{W}(z, t) \exp(iq_x x + iq_y y) , \quad T' = \tilde{T}(z, t) \exp(iq_x x + iq_y y)$$

où q_x et q_y désignent respectivement les nombres d'ondes suivant x et y . Dans le cadre de cette analyse, le système d'équations (11)-(12) est réduit au système suivant:

$$(\text{Pr}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - M)M\tilde{W} + \text{Pr}^{-1} \Gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} (M\tilde{W}) = -q^2 \text{Ra} \Gamma \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - q^2 \text{Ra} \tilde{T} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - M\tilde{T} = -\tilde{W} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \quad (14)$$

Avec : $D = \partial / \partial z$, $M = (D^2 - q^2)$ et $q^2 = q_x^2 + q_y^2$

Notre problème consiste alors à déterminer la solution de ce système d'équations vérifiant des conditions aux limites suivantes:

$$(a) \text{ Cas rigide-rigide: } \tilde{T} = \tilde{W} = D\tilde{W} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0,1$$

$$(b) \text{ Cas libre-libre: } \tilde{T} = \tilde{W} = D^2 \tilde{W} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0,1$$

Notons que lorsque $\Gamma = 0$, ces équations se ramènent au système d'équations relatif à la modulation des températures pour un liquide newtonien, cas déjà analysé par un ensemble d'auteurs [1,3,4].

3. RESOLUTION NUMERIQUE

Nous remarquons d'abord à partir du système (13)-(14) que l'équation (13) est une équation différentielle d'ordre deux. L'introduction de la variable $\tilde{\phi}$, permet de transformer le système d'équations (13)-(14) en un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1. Celui-ci s'écrit en effet sous la forme équivalente:

$$\tilde{\phi} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} \quad (15)$$

$$(\text{Pr}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - M)M\tilde{W} + \text{Pr}^{-1} \Gamma \frac{\partial}{\partial t} (M\tilde{\phi}) = -q^2 \text{Ra} \Gamma \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - q^2 \text{Ra} \tilde{T} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - M\tilde{T} = -\tilde{W} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \quad (17)$$

Il s'agit, par conséquent, d'un système de Floquet [11] qui s'écrit:

$$\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} = A(t) X(z, t) \quad (18)$$

où $X(z, t) = (\tilde{W}, \tilde{\phi}, \tilde{T})$ et $A(t)$ est une matrice périodique dans le temps. Ses solutions sont donc recherchées sous la forme:

$$(\tilde{W}, \tilde{\phi}, \tilde{T}) = \exp(\mu \Omega t) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \{W_n(z), \phi_n(z), T_n(z)\} \exp(in\Omega t) \quad (19)$$

où $\mu = \mu_r + i\mu_i$ est l'exposant de Floquet. Dans la suite de ce travail, nous limitons notre étude à la détermination des courbes de stabilité marginales $\mu_r = 0$ correspondant aux solutions harmoniques $\mu_i = 0$. Dans ce cadre, nous écrivons la température de base sous sa forme complexe suivante:

$$\bar{T}(z, t) = 1 - z + a[F(z) \exp(i\Omega t) + F^*(z) \exp(-i\Omega t)] \quad (20)$$

où $F(z) = (T_1(z) - iT_2(z))/2$ et $F^*(z)$ son conjugué. Nous introduisons par la suite les expressions (19) et (20) dans le système (15)-(17); ceci permet d'obtenir un système infini d'équations de la forme:

$$[in\Omega \text{Pr}^{-1} (1 + in\Gamma\Omega) - M]MW_n = -q^2 \text{Ra} (1 + in\Gamma\Omega)T_n \quad (21)$$

$$(M - in\Omega)T_n = -W_n + (DF W_{n-1} + DF^* W_{n+1}) \quad (22)$$

où $D=d/dz$ et les conditions aux limites associées aux équations (21)-(22) sont:

$$(a) \text{ Cas rigide-rigide: } T_n = W_n = DW_n = 0 \quad \text{en} \quad z = 0,1$$

$$(b) \text{ Cas libre-libre: } T_n = W_n = D^2 W_n = 0 \quad \text{en} \quad z = 0,1$$

La méthode de résolution numérique que nous utilisons par la suite consiste à:

- Tronquer le système d'équations (21)-(22) à l'ordre N avec $-N \leq n \leq N$
- Transformer le système différentiel du 6^{ème} ordre ainsi obtenu en un système d'équations différentielles du premier ordre dont les inconnues sont :

$$W_n, DW_n, (D^2 - q^2)W_n, D(D^2 - q^2)W_n, T_n \text{ et } DT_n$$

- Transformer le problème aux valeurs propres obtenu en un problème aux conditions initiales [12]. Pour ce faire, un ensemble de solutions indépendantes vérifiant les conditions aux limites en $z = 0$ sont construites à partir d'un schéma numérique de Runge Kutta du quatrième ordre; une combinaison linéaire de ces solutions satisfaisant les conditions aux limites en $z = 1$, mène alors à un système algébrique homogène dont les inconnus sont les coefficients d'une telle combinaison. Une condition nécessaire pour l'existence de solutions non nulles est que le déterminant de ce système homogène soit nul. Ceci mène à une équation de dispersion qui peut s'écrire formellement sous la forme: $L(\Omega, Pr, \Gamma, q, a, Ra) = 0$.

Il est à noter que cette démarche de résolution du système (21)-(22) est analogue à celle utilisée par Aouidef et al. [9] pour l'étude de la stabilité de l'écoulement de base d'un liquide confiné entre deux cylindres coaxiaux et oscillant en phase.

4. RESULTATS ET DISCUSSIONS

L'objectif principal de notre étude consiste à mettre en évidence et caractériser l'influence de la nature viscoélastique du liquide sur le nombre de Rayleigh critique pour ce problème de modulation. Nous nous limitons dans ce cadre à la recherche des courbes de stabilité marginale correspondants aux solutions harmoniques.

Γ	Nos résultats				Ref.[8]			Ref.[13]		
	Pr	q_c	Ra_c	μ_{ic}	q_c	Ra_c	μ_{ic}	q_c	Ra_c	μ_{ic}
0.1	0.1	3.116	1707.7499	0	3.116	1707.73	0	-	-	-
	1	4.915	870.53337	15.08130	4.915	870.48	15.08	4.917	877.8	15.07
	10	7.256	226.68274	76.69999	7.256	226.78	76.22	7.309	230.0	76.68
	100	11.59	127.85141	371.7770	11.59	127.89	371.78	11.96	130.1	385.8
1	0.1	3.484	476.39106	1.64704	3.484	476.39	1.647	3.483	478.9	1.647
	1	3.700	51.19260	6.0617	3.700	51.19	6.062	3.696	51.58	6.061
	10	4.719	7.418368	20.78350	4.719	7.418	20.78	4.724	7.496	20.77
	100	7.199	2.159816	82.66400	7.199	2.160	82.66	7.297	2.201	83.45

Table 1 : Cas d'un liquide viscoélastique non moulé : Comparaison du nombre de Rayleigh critique et du nombre d'onde critique avec ceux des références [8] et [13] (μ_{ic} est la partie imaginaire du taux d'amplification μ).

4.1 Validation de la méthode numérique

Pour la validation de notre méthode numérique, nous avons tenu compte du fait que le problème que nous considérons dans ce travail admet deux cas limites pour lesquels les résultats portant sur l'étude de stabilité linéaire de leur solution de base sont disponibles [4,8,13]; il s'agit notamment du:

- cas d'un liquide viscoélastique compris entre deux plans infinis et soumis à un gradient de température vertical et constant ($a=0$). Pour ce cas, l'étude de la stabilité de la solution de base a été traitée par Vest et Arpaci [13] à partir de la méthode variationnelle et par Yang [8] à partir de la méthode spectrale de collocation.

- cas d'une modulation thermique en opposition de phase d'une couche liquide newtonienne et d'extension infinie ($\Gamma = 0$). A partir de la méthode de Galerkin, Yih [4] a montré que le seuil critique de convection correspond à des solutions harmoniques ou sous harmoniques.

Pour ces deux cas limites, nous avons été en mesure de reproduire, à partir de notre méthode numérique les résultats correspondants avec une très bonne approximation (voir Table I pour le premier cas et la comparaison des figures 1 et 2 pour le deuxième cas).

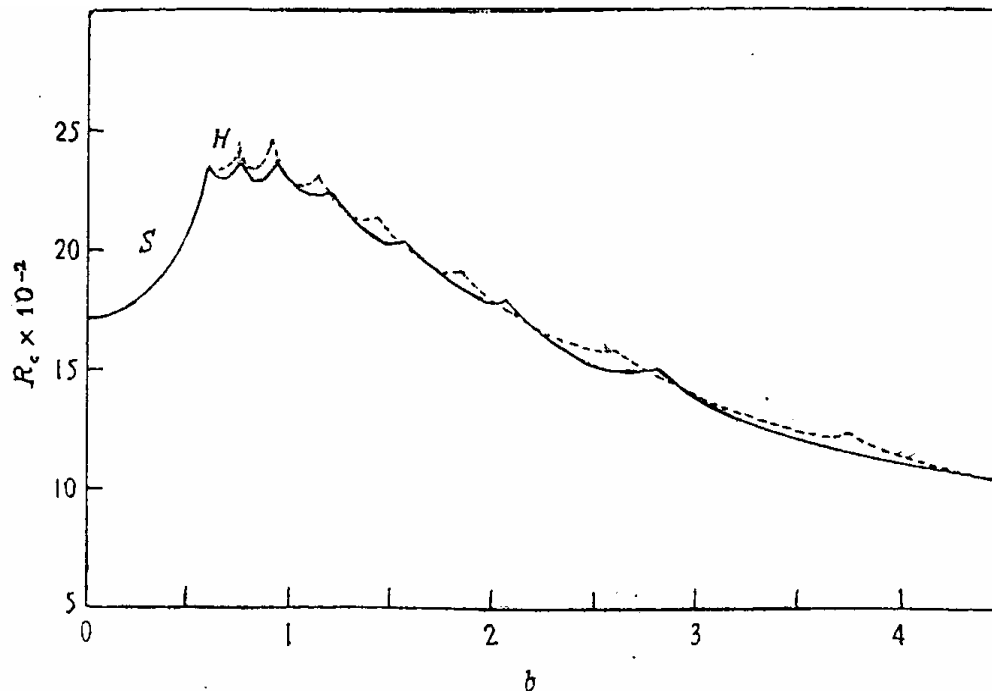


Figure 1 : évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude b pour $\Omega = 5$, $Pr=0.73$ et $\Gamma = 0$ (résultats de Yih [4])

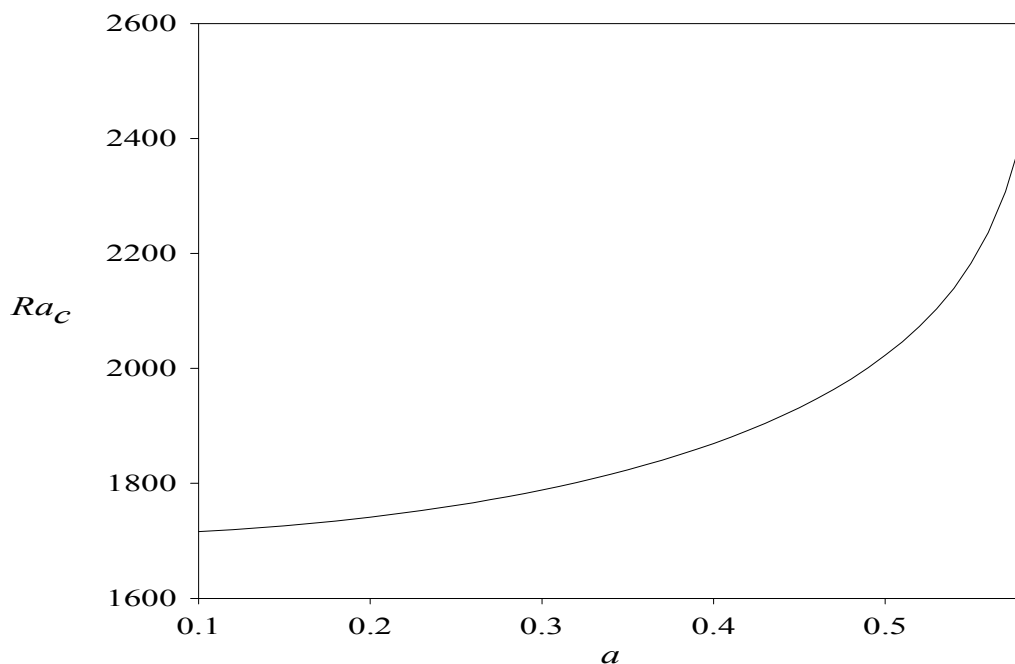


Figure 2 : Cas rigide-rigide: évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude a pour $\Omega = 5$, $Pr=0.73$ et $\Gamma = 0$ (nos résultats)

4.2 Cas d'un liquide newtonien

Nous présentons, dans cette section, les résultats relatifs au cas d'une couche liquide newtonienne ($\Gamma = 0$), et ce dans le but de montrer l'influence d'une modulation en phase ($\delta = 1$) sur le seuil critique de convection. Dans ce cas, nous déduisons, à partir des courbes de stabilité marginale, l'évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω , pour $a=0.1, 0.5, 1$ et $Pr=7$ et ce aussi bien pour le cas rigide- rigide (Figure 3) que pour le cas libre- libre (Figure 4).

Nous remarquons alors que la modulation considérée génère un effet déstabilisant. Cet effet est plus accentué pour des fréquences intermédiaires que pour les basses fréquences et il est prédominant autour de la fréquence $\Omega = 19$, ce qui est en accord avec les travaux de Venezian [1] et Bhaduria et Bhatia [7]. Pour les hautes fréquences, cette modulation ne génère aucun effet supplémentaire par rapport au résultat relatif à la convection naturelle de Rayleigh Bénard. En effet, dans cette situation, nous retrouvons la configuration instable du cas non modulé où le nombre de Rayleigh critique tend vers $Ra_c = 27\pi^4 / 4$ pour le cas libre-libre et $Ra_c = 1707.7$ pour le cas rigide-rigide. Ces résultats ont d'ailleurs déjà été mis en évidence par Venezian [1] à partir d'une méthode basée sur une technique de perturbation mais uniquement pour les faibles amplitudes. Notre méthode numérique permet, quand à elle, de considérer des amplitudes assez grandes. Sur les figures 5 et 6 où l'amplitude a varie de 0.1 à 6, nous observons en particulier que l'effet déstabilisant généré par cette modulation devient de plus en plus accentué lorsque l'amplitude augmente.

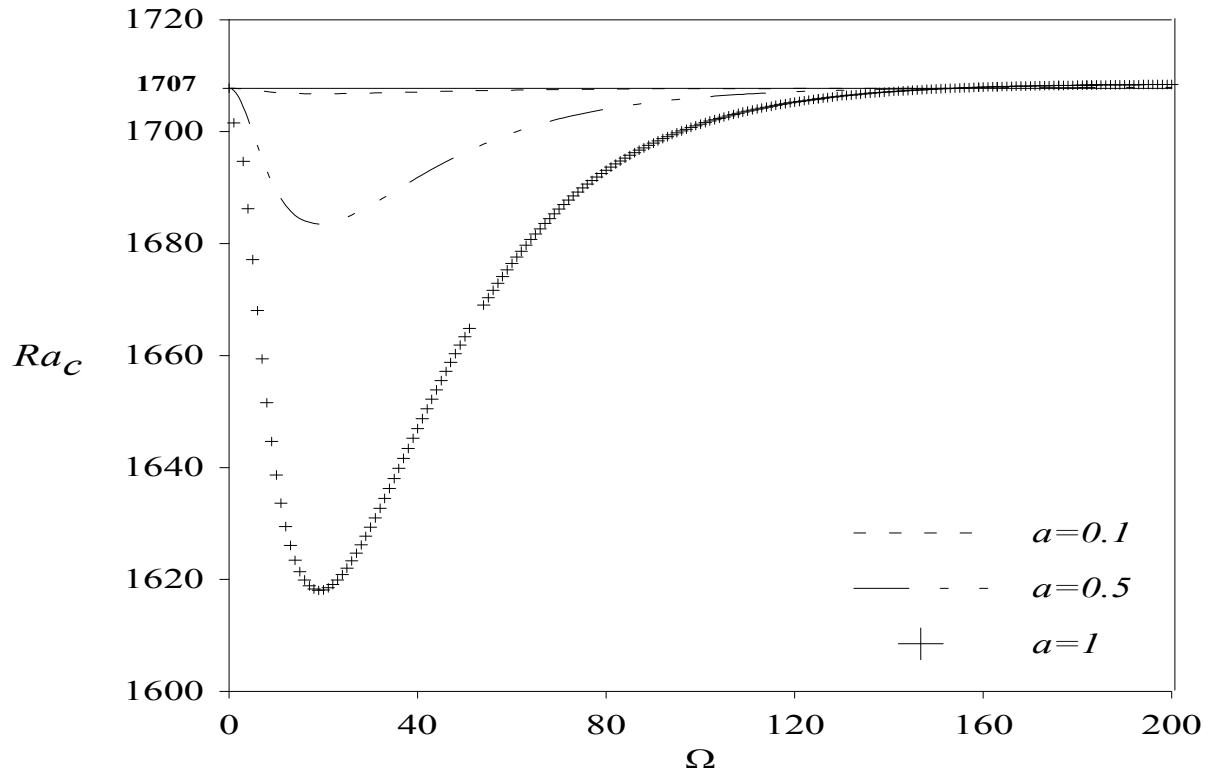


Figure 3 : Cas rigide-rigide, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω pour $\delta = 1$ et $\Gamma = 0$

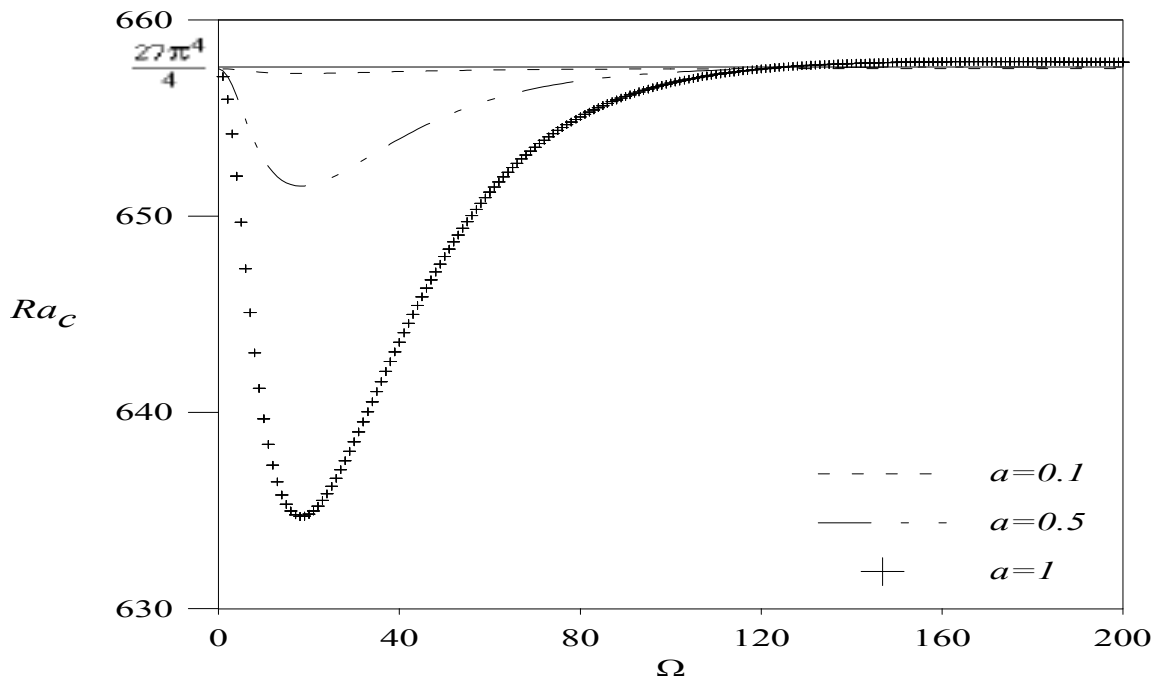


Figure 4 : Cas libre-libre, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω pour $\delta = 1$ et $\Gamma = 0$

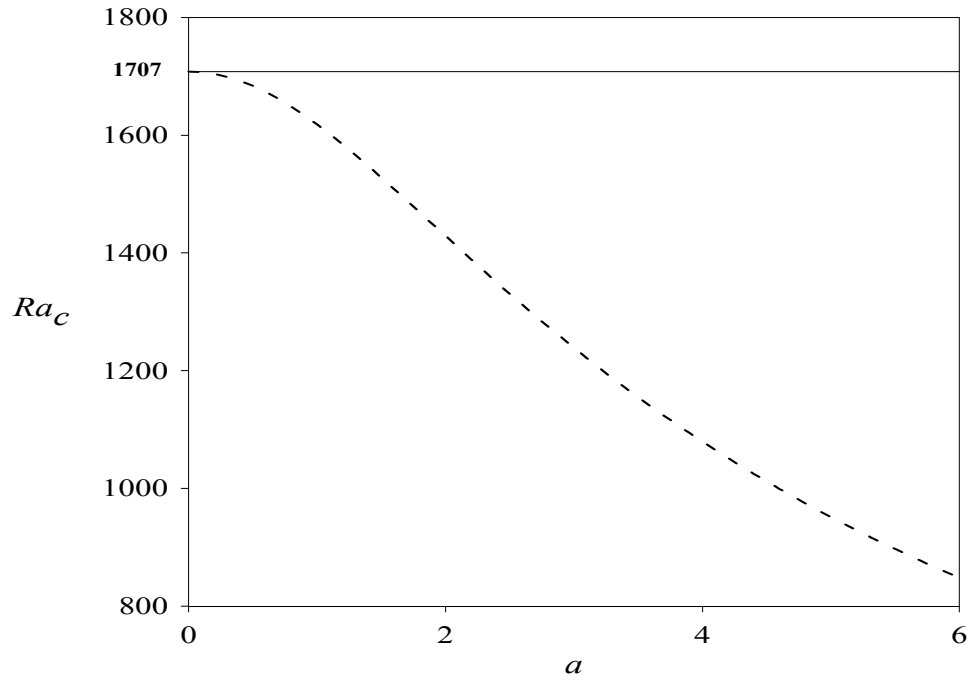


Figure 5 : Cas rigide-rigide, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude a pour $\Omega=20$, $\delta=1$ et $\Gamma=0$.

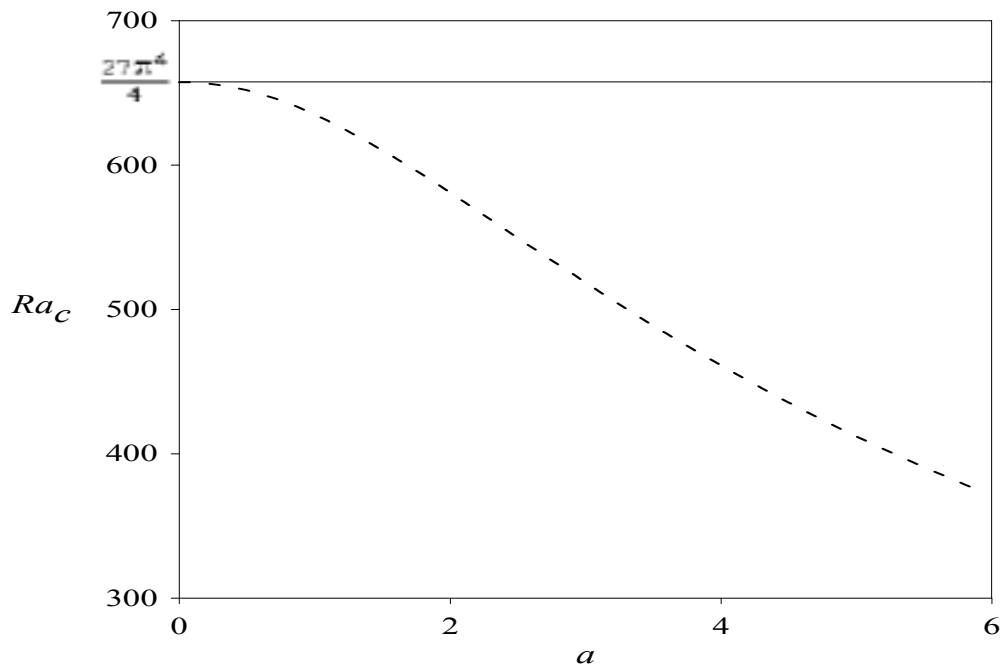


Figure 6 : Cas libre-libre, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude a pour $\Omega=20$, $\delta=1$ et $\Gamma=0$.

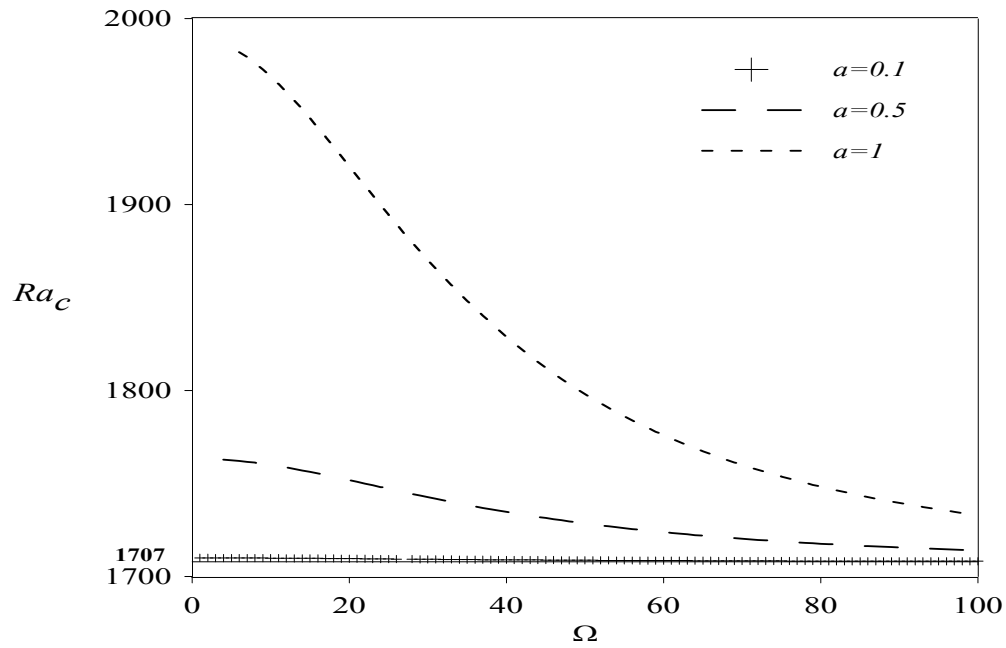


Figure 7 : Cas rigide-rigide, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω pour $\delta = -1$ et $\Gamma = 0$.

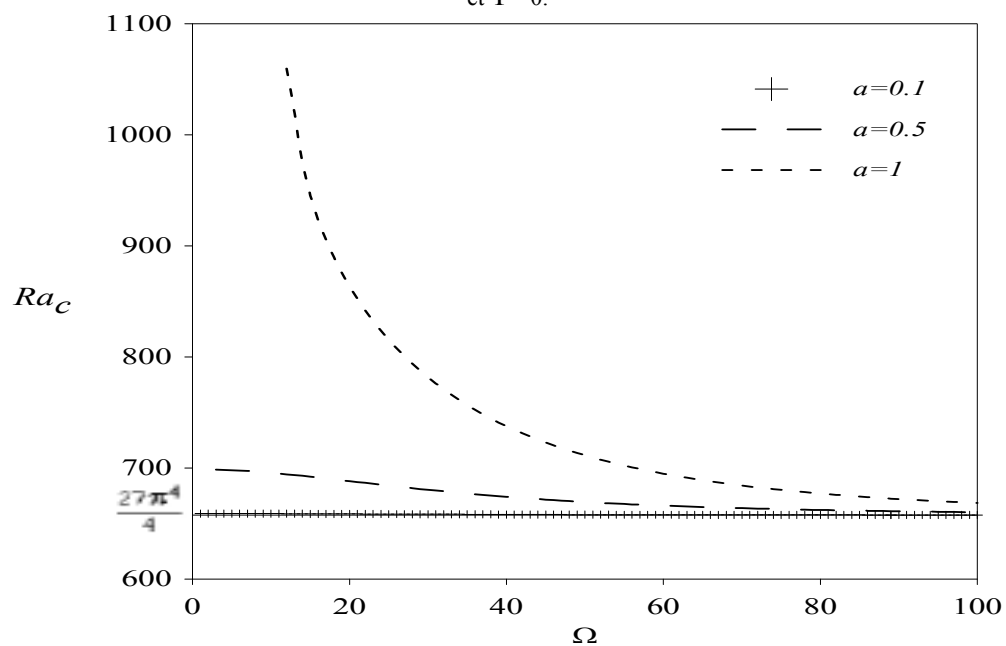


Figure 8 : Cas libre-libre, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω pour $\delta = -1$ et $\Gamma = 0$.

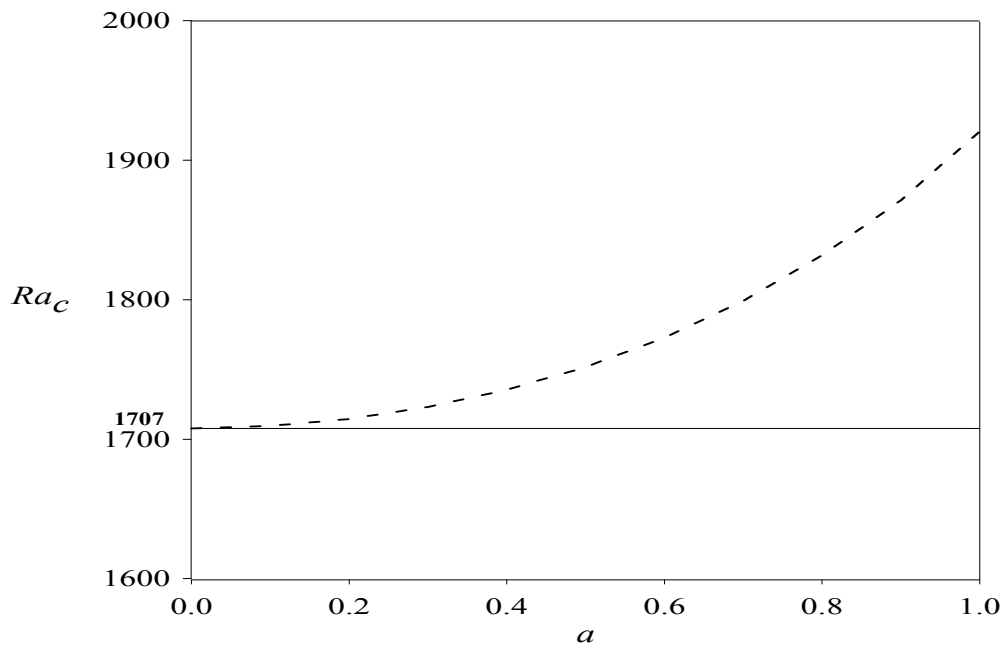


Figure 9 : Cas rigide-rigide, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude a pour $\Omega=20$, $\delta = -1$ et $\Gamma=0$.

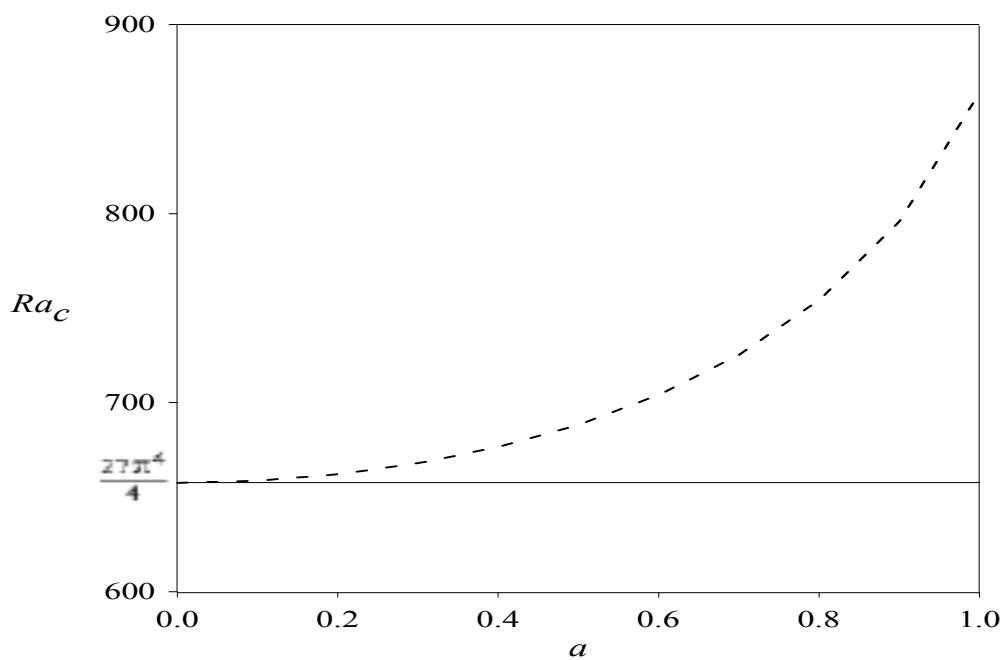


Figure 10 : Cas libre-libre, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude a pour $\Omega=20$, $\delta = -1$ et $\Gamma=0$.

Lorsqu'il s'agit d'une modulation en opposition de phase ($\delta = -1$), on se trouve, pour le cas des faibles fréquences, en présence d'un effet stabilisant par rapport au cas non modulé, ce qui est à l'opposé du

cas où $\delta = 1$ (Figures 7, 8). Lorsque la fréquence augmente, le nombre de Rayleigh critique décroît pour atteindre, pour les hautes fréquences, les valeurs exactes qui correspondent au cas non modulé. D'autre part, on remarque à partir des figures 9 et 10, que le nombre de Rayleigh critique augmente avec l'amplitude. On est donc en présence d'un effet stabilisant ce qui est en bon accord avec les résultats de Yih [4] qui a dégagé une conclusion similaire pour le cas rigide-rigide et pour une fréquence $\Omega = 5$.

4.3 Cas d'un liquide viscoélastique

Pour montrer l'influence de la nature viscoélastique du fluide sur le nombre de Rayleigh critique, nous présentons et analysons dans ce qui suit les courbes d'évolution du nombre de Rayleigh critique en fonction des paramètres de ce problème. Pour cette section les valeurs du nombre de Deborah considérées varient entre 0.005 et 0.025.

4.3.1 Modulation en opposition de phase ($\delta = -1$)

(a) Cas rigide-rigide.

Nous remarquons d'abord à partir de la figure 11, qu'en absence de modulation ($a=0$), le seuil critique de convection correspond à celui du cas non modulé d'un fluide newtonien ($Ra_c = 1707.7$), ceci confirme, en particulier, les résultats trouvés par Vest et Arpaci [13] relatifs aux cas où les valeurs du nombre de Deborah sont faibles. Nous observons également, à partir de cette même figure, que l'augmentation de l'amplitude génère pour une fréquence fixée ($\Omega = 20$) et pour les valeurs du nombre de Deborah comprises entre 0.005 et 0.025 un effet déstabilisant de plus en plus accentué. Ceci est à l'opposé du cas d'une couche fluide newtonienne modulée pour lequel l'augmentation de l'amplitude provoque un effet stabilisant. Deux autres résultats, tout aussi importants sont ceux qu'on est en mesure de relever à partir de la figure 12. Il s'agit d'une part du fait que pour une couche viscoélastique donnée, le passage des faibles fréquences aux fréquences intermédiaires est accompagné d'une augmentation du nombre de Rayleigh critique et d'autre part du fait que pour une fréquence donnée, l'augmentation du nombre de Deborah rend la solution de base de plus en plus instable.

Pour ce cas aussi, il s'agit de décrire l'influence des paramètres du problème (nombre de Deborah, fréquence et amplitude de la modulation) sur le nombre de Rayleigh critique. Pour cette description nous comparons, comme pour le cas rigide-rigide les résultats correspondants à une couche viscoélastique avec ceux relatifs au cas d'un fluide newtonien d'abord en absence, et après, en présence d'une modulation. Ainsi et par rapport au cas d'une couche newtonienne non modulée, nous observons, à partir de la figure 13, que pour $\Omega = 20$, le nombre de Rayleigh critique diminue lorsque l'amplitude varie de 0 à 1. Cette propriété déjà soulignée pour le cas rigide-rigide et pour $\Gamma \geq 0.005$ n'est toutefois vérifiée ici que pour les valeurs de Γ comprises entre 0.012 et 0.025. Dans le cas contraire ($\Gamma < 0.012$), l'augmentation de l'amplitude a génère un effet qui est de plus en plus stabilisant. D'autre part et comparativement au même cas non modulé, nous sommes en mesure de noter, à partir de la figure 14, que:

- i) Pour les valeurs du nombre de Deborah inférieures à 0.012 et pour $a=0.5$, la nature viscoélastique du fluide génère, un effet stabilisant pour toute la gamme des fréquences considérée.
- ii) Pour chaque valeur du nombre de Deborah supérieure ou égal 0.012, il apparaît une fréquence seuil Ω_s en dessous de laquelle le seuil critique de convection correspond à un effet déstabilisant; cet effet étant inversé pour les fréquences supérieures à Ω_s (Table II).

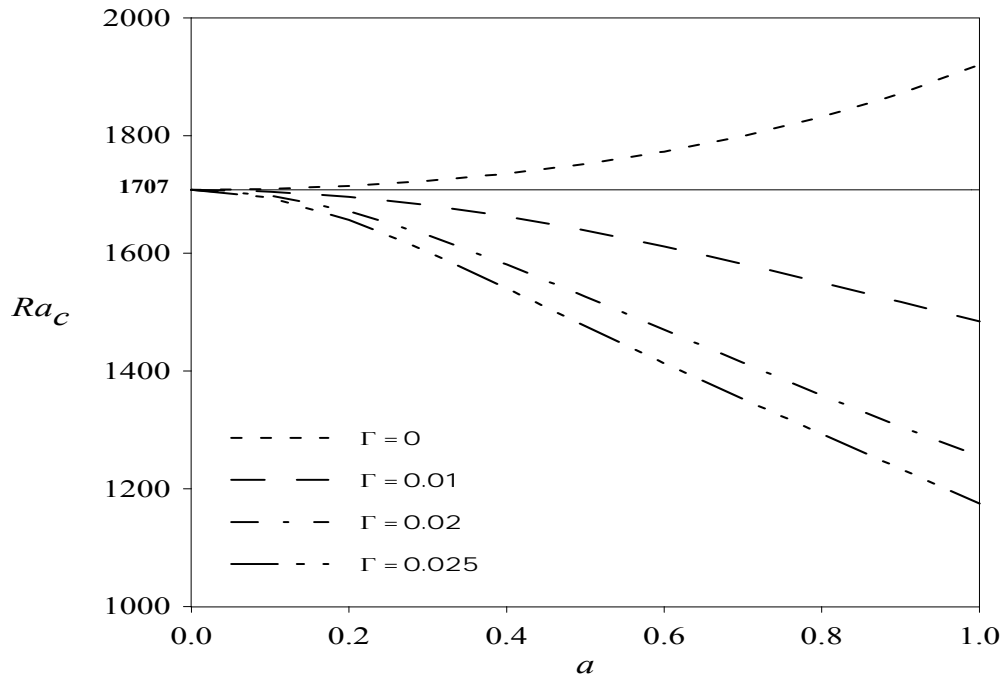


Figure 11 : Cas rigide-rigide, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude a pour $\Omega=20$ et $\delta = -1$.

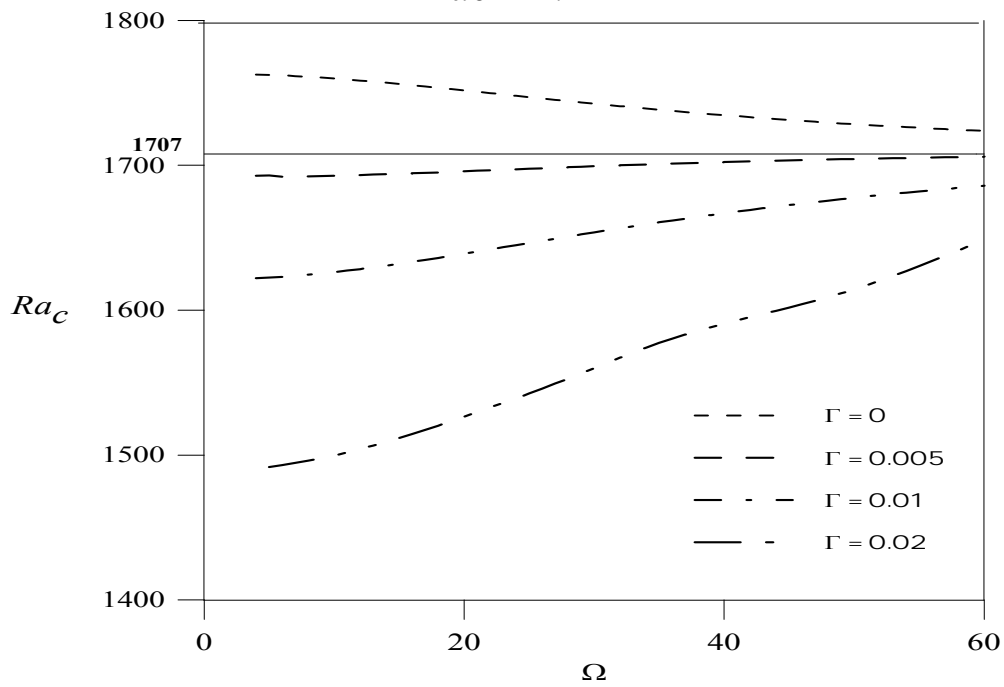


Figure 12 : Cas rigide-rigide, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω pour $\delta = -1$.

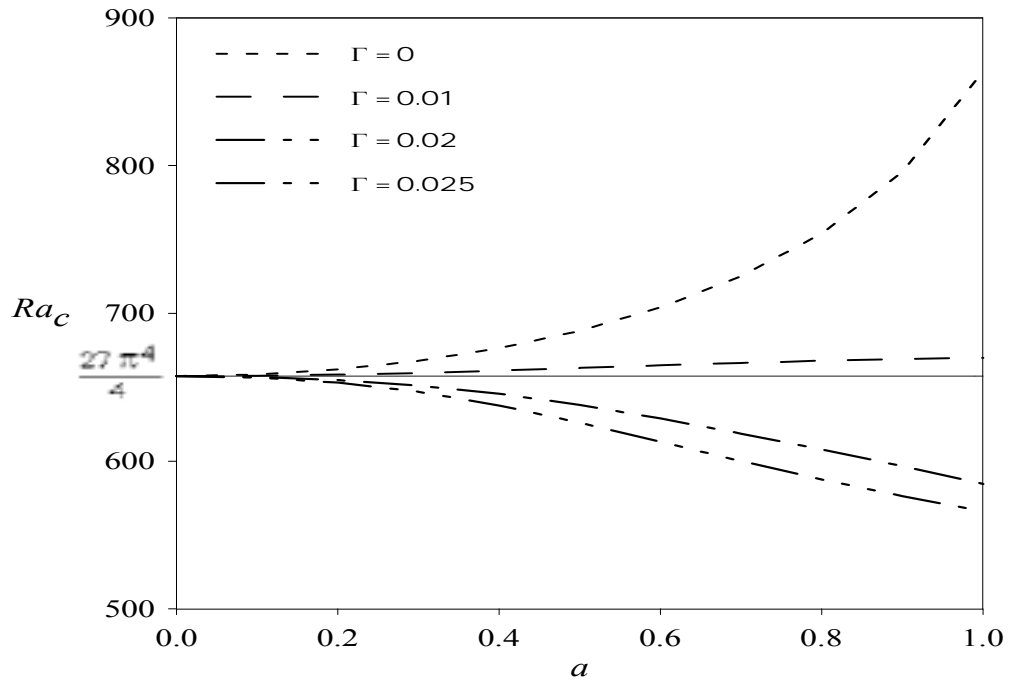


Figure 13 : Cas libre-libre, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude a pour $\Omega=20$ et $\delta = -1$.

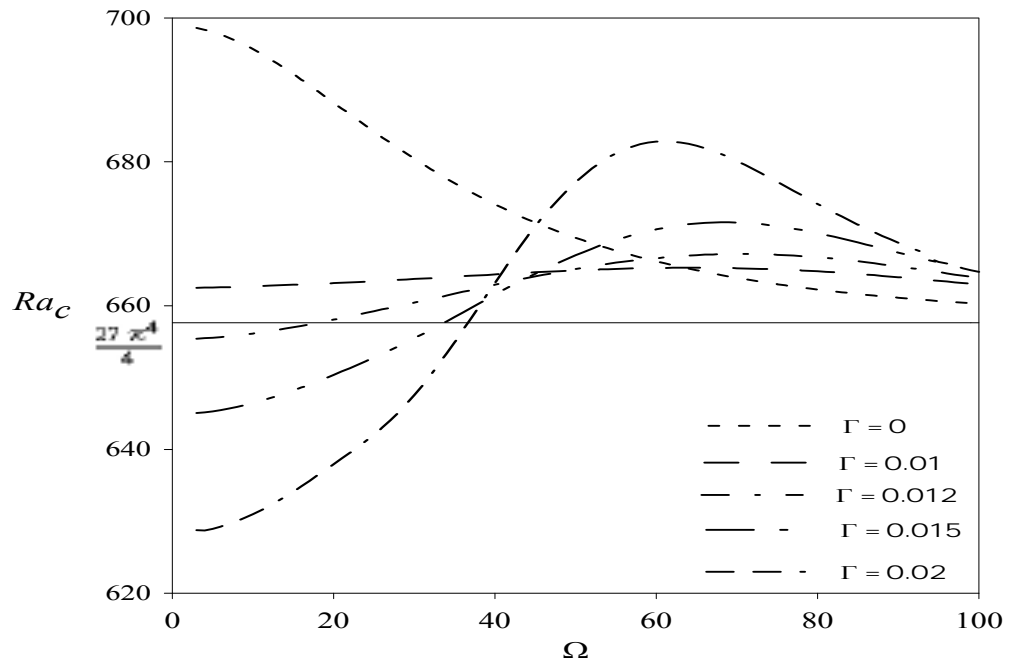


Figure 14: Cas libre-libre, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω pour $\delta = -1$.

(b) cas libre-libre.

Enfin et par rapport au cas d'une couche liquide newtonienne en présence d'une modulation, on constate à partir de la figure 14, qu'il est possible d'associer à chaque valeur de Γ , une fréquence seuil Ω_{sm} au delà (respectivement au dessous) de laquelle l'effet généré par la nature viscoélastique du fluide a un caractère stabilisant (respectivement déstabilisant) (Table 2). Nous constatons également que pour les hautes fréquences, l'effet de la modulation s'atténue (figure 14).

Γ	0.012	0.013	0.014	0.015	0.016	0.017	0.018	0.019	0.02
Ω_s	18	27	31	34	35	36	36.4	36.3	36.5
Ω_{sm}	57	56	55	53	52	50	48	47	45

Table 2 : Les valeurs de Ω_s et Ω_{sm} en fonction du nombre de Deborah Γ

4.3.2 Modulation en phase ($\delta = 1$).

Sur les figures 15 et 16, nous présentons pour les cas rigide-rigide et libre-libre l'évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω , pour $\alpha=0.5$, $Pr=7$ et pour $\Gamma = 0, 0.005, 0.01, 0.02$. Pour ces deux configurations, nous observons alors que pour les faibles fréquences, le nombre de Deborah Γ n'a pas d'influence sur le nombre de Rayleigh critique. Ceci est à l'opposé du cas où $\delta = -1$ pour lequel l'effet déstabilisant dû à la nature viscoélastique du fluide est prépondérant pour cette gamme de fréquences. Pour les fréquences intermédiaires, nous sommes en mesure d'affirmer, dans un premier temps, l'apparition par rapport au cas du liquide newtonien des deux effets supplémentaires. Il s'agit d'abord de l'influence du nombre de Deborah Γ sur le nombre de Rayleigh critique Ra_c ; ce dernier est, pour ce cas aussi, d'autant plus faible que le nombre de Deborah Γ est plus grand. D'autre part, il y a lieu de signaler que cet effet déstabilisant dû à la nature viscoélastique du liquide est prédominant dans les zones de fréquences définies autour des valeurs de Ω qui sont d'autant plus grandes que le nombre de Deborah Γ est plus grand ($\Omega=19 \rightarrow \Gamma = 0$; $\Omega = 20 \rightarrow \Gamma = 0.005$; $\Omega=23 \rightarrow \Gamma = 0.01$ et $\Omega = 32 \rightarrow \Gamma = 0.02$).

Enfin nous observons, à partir des figures 17 et 18, que l'effet déstabilisant devient plus accentué lorsque l'amplitude de la modulation imposée augmente.

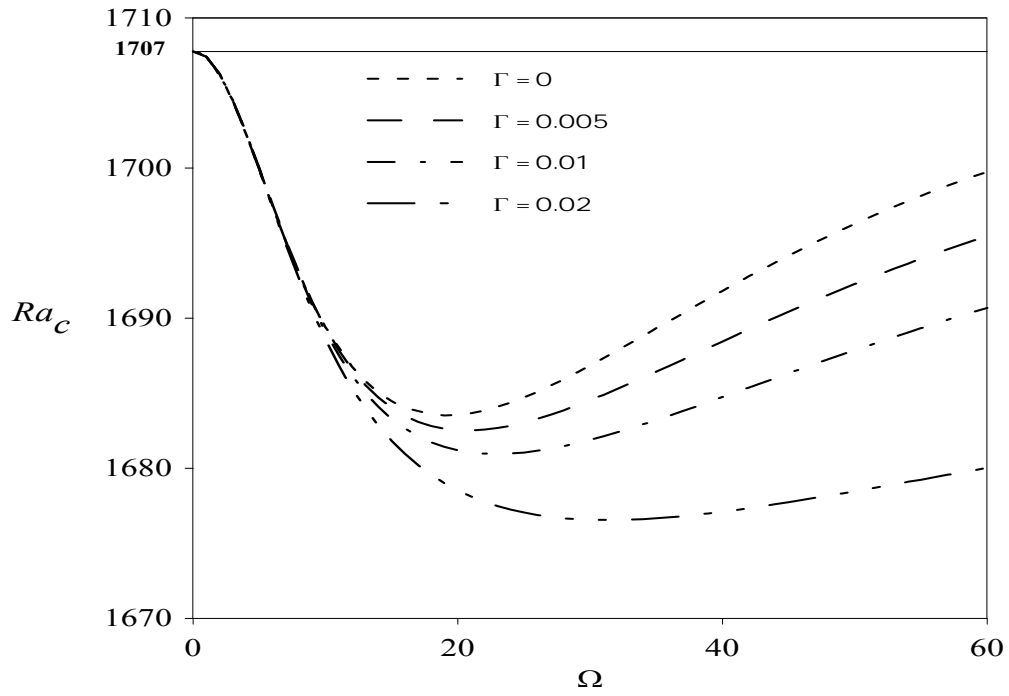


Figure 15 : Cas rigide-rigide évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω pour $\delta = 1$.

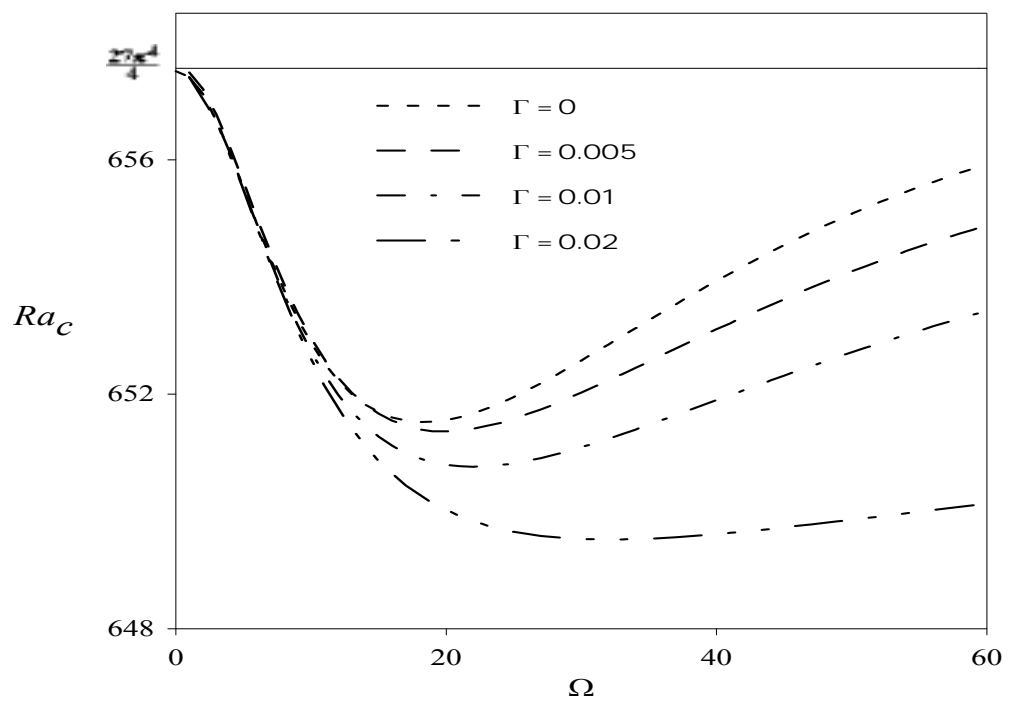


Figure 16 : Cas libre-libre évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω pour $\delta = 1$.

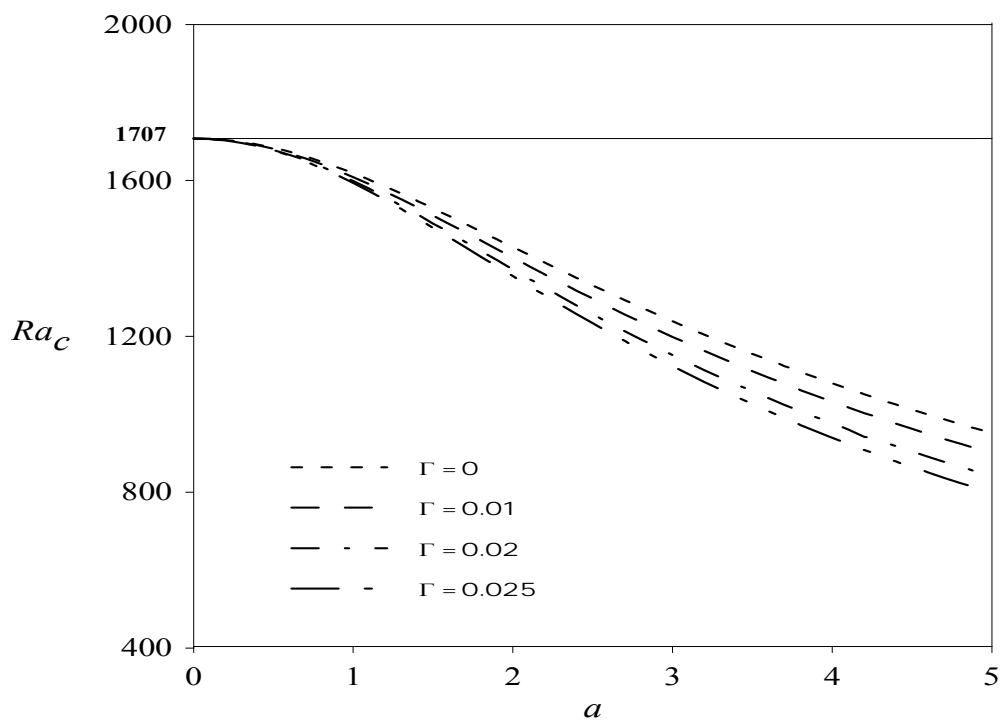


Figure 17 : Cas rigide-rigide évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence a pour $\Omega = 20$ et $\delta = 1$.

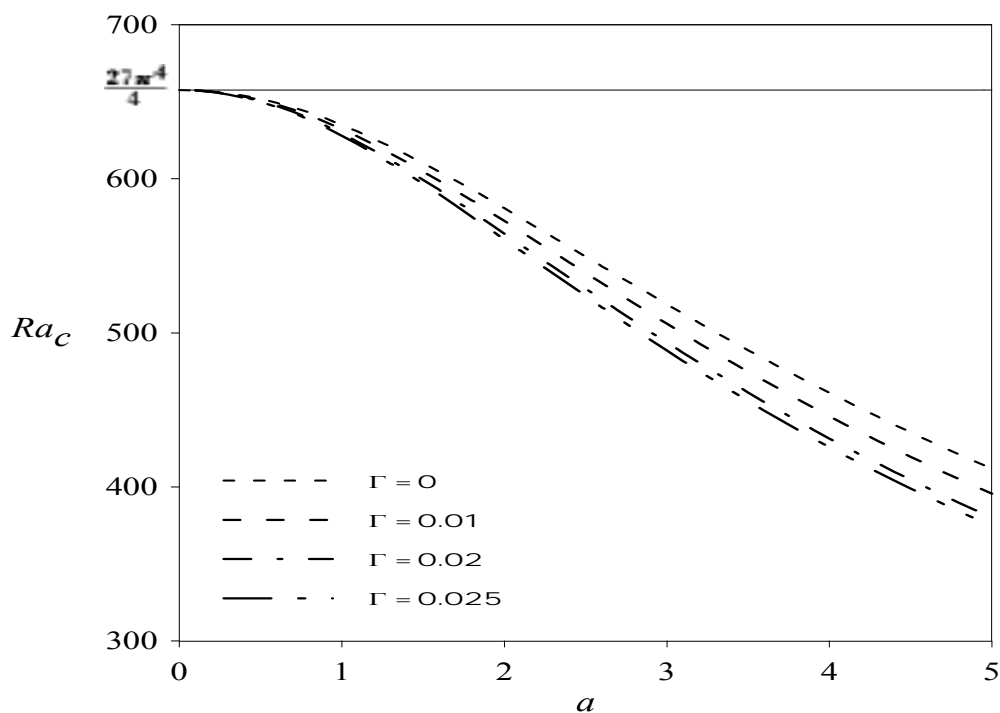


Figure 18 : Cas libre-libre évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence a pour $\Omega = 20$ et $\delta = 1$.

5. CONCLUSION

Cette étude nous a permis d'examiner l'influence d'une modulation sinusoïdale en phase ou en opposition de phase des conditions aux limites relatives à la température sur le seuil de convection. Dans ce cadre nous avons essentiellement comparé les résultats relatifs à une couche liquide viscoélastique à ceux correspondant à une couche newtonienne. Toutefois et pour le cas d'une couche newtonienne, nous avons vérifié à partir de la méthode considérée dans ce travail que la modulation en phase, respectivement en opposition de phase, génère un effet déstabilisant, respectivement stabilisant par rapport au cas non modulé. Ces deux effets, identiques pour les cas libre-libre et rigide-rigide, ne sont significatifs que pour les basses fréquences et les fréquences intermédiaires et s'amplifient avec l'amplitude. Pour le cas d'une couche viscoélastique, la variation du nombre de Rayleigh critique ne dépend pas uniquement de la nature de la modulation, son amplitude ou de la gamme de fréquence, mais aussi du type des conditions aux limites, libre-libre ou rigide-rigide, et du nombre de Deborah. Dans le cas rigide-rigide et pour les deux types de modulation, la nature viscoélastique du liquide génère un effet déstabilisant par rapport au cas d'une couche liquide newtonienne en présence ou en absence d'une modulation pour toutes les valeurs de Γ supérieur ou égal à 0.012. Pour le cas libre-libre, la conclusion précédente reste valable lorsqu'il s'agit d'une modulation en phase et pour toutes les valeurs de Γ considérées dans ce travail. Cependant et pour une modulation en déphasage, la nature viscoélastique du liquide provoque l'apparition d'un effet déstabilisant et par la suite stabilisant, comparativement au cas d'une couche liquide newtonienne en absence ou en présence de modulation, et ce au fur et à mesure que la fréquence augmente. De façon similaire au cas d'une couche liquide newtonienne, l'augmentation de l'amplitude de modulation amplifie les effets de déstabilisation lorsqu'il s'agit d'une couche liquide viscoélastique. Enfin et dans tous les cas de figures, nous avons constaté que, pour les hautes fréquences, l'effet de la modulation s'atténue.

RÉFÉRENCES

1. Venezian G., Effect of Modulation on the Onset of Thermal Convection. Part 2. Convective Instability, *J. Fluid. Mech.* 35 (1969) 243-254.
2. Gresho P. M. and Sani R. L., The Effects of Gravity Modulation on the Stability of a Heated Fluid Layer, *J. Fluid Mech.* 40 (4) (1970) 783-806.
3. Rosenblat S. and Herbert D. M., Low Frequency Modulation of Thermal Instability, *J. Fluid Mech.* 43 (2), (1970) 385-398.
4. Yih C.S. and LI C.H., Instability of Unsteady Flows or Configurations, *J. Fluid. Mech.* 54 (1972) 143-152.
5. Gershuni G. Z. and Zhukhovitskii E. M., "Convective stability of incompressible fluids", (translated from russian by D. Louvish), Keter Publications, Jerusalem, (1979).
6. Aniss S., Souhar M. and Belhaq M., Asymptotic Study of Convective Parametric Instability in Hele-Shaw Cell, *Phys. Fluids* 12 (2), (2000) 926-934..
7. Bhadauria B. S. and Bhatia P. K., Time-periodic Heating of Rayleigh-Benard Convection, *Physica Scripta.* 66 (2002)59-65.
8. Yang W. M. , Stability of viscoelastic fluids in a modulated gravitational field, *Int. J. Heat Mass Transfer.* 40,(1997) 1401-1410.
9. Aouidef A., Normand C. and Wesfreid J. E., Centrifugal Instability of Pulsed Flow, *Phys. Fluids* 6 (11), (1994) 3665-3676.
10. Daniel D. Josef, "Fluids dynamics of viscoelastic liquids"(Springer -Verlag 1990).
11. Coddington. E .A and Rober carlson., "Linear ordinary Differential Equation"(New York,1991).

12. Platten J. K. and Legros J. C., " Convection in Liquids" (Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 1984).
13. Vest C. M. and Arpaci V. S., Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below, J. Fluid Mech. 36, (1969) 613-623.
14. Chandrasekhar S., "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability" (Oxford University Press,1961)