

Modélisation par éléments finis de la rigidité non linéaire d'un palier à roulement

T. Hentati

Unité Mécanique, Modélisation et Production (UMMP), Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie

T. Fakhfakh

Département de Génie Mécanique, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie

F. Dammak

Département de Génie Mécanique, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie

M. Haddar

Département de Génie Mécanique, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie

Résumé

Le comportement mécanique d'un palier à roulement sous charge est depuis quelques décennies l'objet de plusieurs recherches. Le but principal de ces recherches est celui d'obtenir des modèles permettant de déterminer la rigidité de l'élément roulant ainsi que les efforts appliqués par les deux bagues intérieure et extérieure.

Notre travail consiste à modéliser le roulement par une matrice de rigidité tangente tenant compte de la non linéarité des contacts entre la piste de roulement et les corps roulants (contact de Hertz, jeux de fonctionnement). On s'est consacré dans ce travail à l'étude des rigidités d'un roulement à billes à contact oblique et d'un roulement à rouleaux cylindriques. Une étude numérique a permis d'analyser l'influence de la variation de certains paramètres sur la rigidité et le couplage entre les différents termes de la matrice de rigidité pour les deux types de roulement étudiés.

Abstract

The main objective of this paper is to formulate a three-dimensional model allowing to determinate the bearing stiffness and the forces applied by the two races on the rolling elements. Our study consists on determining the non-linear deflections between the rolling elements and the races; the forces applied by the two races are deducted. A tangent stiffness matrix associated to the inner race-rolling elements contact and the outer race-rolling elements contact are defined by the forces Jacobean. A Newton-Raphson Method of resolution is used to resolve the no linear local equilibrium equations. The equilibrium is reached when the residual vector (defined by the outer forces applied by the two races on the rolling element) is null. A finite element linking up a node of the inner race to another node of the outer race by mean of the stiffness matrix are developed. The influence of the modification of some parameters (the angular position of the rolling element, the contact angle, the imposed displacement) on the stiffness matrix is studied. This study shows also, the important coupling, until now neglected, between stiffness matrix terms.

Mots clefs : Paliers à roulement, méthode des éléments finis, matrice de rigidité tangente, contact hertzien

1. INTRODUCTION

Les paliers à roulement sont des éléments technologiques qui sont destinés à la réalisation de liaison

pivot entre deux ensembles de pièces d'un mécanisme, tout en assurant un frottement minimum. Un roulement est composé d'une bague extérieure, d'une bague intérieure (appelée "rondelle" dans le cas de butées) et d'éléments roulants logés dans une cage appropriée afin de les séparer et les répartir également le long de la piste de roulement.

En transmettant le mouvement de rotation de la partie statique à la partie dynamique de la machine tournante, le palier à roulement transmet de même des vibrations. Ces dernières sont dues essentiellement à l'état de surface des éléments roulants et des pistes de roulement, aux instabilités des cages, aux désalignements des arbres, etc.... Pour un roulement présentant un défaut, ces vibrations deviennent prépondérantes et on ne peut pas les négliger devant celles générées par le système.

Pour ces raisons, chaque élément du roulement doit être dimensionné. Il est de plus nécessaire de connaître les sollicitations mécaniques s'exerçant sur ces pièces, afin de pouvoir prédire leur durée de vie, leur capacité de chargement, etc....

Malgré l'importance qu'il présente, le roulement est souvent considéré comme conditions aux limites vis-à-vis du système tournant (appuis, encastrement) ou bien il est simplement modélisé par l'association de ressorts placés suivant les directions axiales et radiales.

Dans le but de déterminer avec une assez bonne précision la répartition des charges sur les différents corps roulants, des modèles plus performants tenant compte de la non linéarité des contacts entre ces derniers et les pistes de roulement (contact hertzien) sont développés. Dans ce contexte, Jones [1] et Palmgren [2] ont développé un modèle analytique d'un roulement chargé radialement ou axialement en utilisant les théories de Hertz et Boussinesq. Ils ont établi des formules approchées des relations effort-déplacement permettant de modéliser le comportement des roulements. Des relations simplifiées permettant de déterminer les raideurs axiale et radiale pour certaines configurations du chargement sont ensuite données par Garguillo [3]. Une étude concernant l'influence des différents paramètres expérimentaux sur la rigidité des roulements tels que la vitesse de rotation, la pré charge, etc... est présentée par Krauss [4] qui a montré que la vitesse de rotation n'a pas d'influence sur la rigidité. Des raideurs angulaires définies suivant le plan de flexion des arbres sont introduites par Drago [5]. Une approche analytique basée sur la détermination d'une matrice de rigidité associée aux cinq degrés de libertés (trois translations et deux rotations) de la bague intérieure du roulement dans son mouvement relatif par rapport à la bague extérieure est proposée par Lim et Singh [6] dans les années 90. Demul [7], a utilisé cette dernière modélisation en tenant compte des forces centrifuges.

Notre travail consiste à résoudre le problème non linéaire en s'appuyant sur une modélisation éléments finis. Le modèle se base sur la méthode des déplacements associée à l'algorithme de résolution itératif de Newton-Raphson. Une étude théorique amenant à la détermination de l'expression générale de la matrice de rigidité de dimension (12×12) est présentée.

On s'intéressera par la suite, dans un premier temps, à l'étude d'un roulement à billes à contact oblique : La matrice de rigidité non linéaire et les efforts appliqués par les deux bagues sur le corps roulant sont déterminés. Un élément fini à deux nœuds et six degrés de libertés par nœuds (trois déplacements et trois rotations) est développé lors de ces calculs. Une étude numérique est ensuite présentée pour montrer l'influence de la variation de certains paramètres sur les termes de la matrice de rigidité. Une étude similaire est ensuite réalisée sur un roulement à rouleaux cylindriques dont les bagues présentent deux épaulements.

2. ETUDE THEORIQUE

On s'intéressera à discrétiser le roulement en corps roulants, et l'on associera à chacun d'eux un élément au sens des éléments finis. Cet élément "corps roulant" relie un nœud de la bague intérieure à un nœud de la bague extérieure par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité. Cette matrice assure la

transmission de trois forces et de deux moments. Aucun moment n'est transmis suivant la direction correspondant à la rotation du roulement.

Ces éléments prennent en compte la géométrie fine des paliers à roulement (tenir compte des jeux et des rayons de bombés), compte tenu du phénomène d'écrasement, et permettent d'obtenir :

- les efforts exercés par les bagues et les épaulements sur le corps roulant,
- la matrice de rigidité tangente associée à chaque corps roulant.

Il s'agit alors de déterminer pour chaque corps roulant (supposé indéformable sauf ponctuellement au niveau des contacts) les déplacements élémentaires du centre du corps roulant assurant l'équilibre de ce dernier dans le plan radial (équilibre des forces et des moments) pour des déplacements donnés des noeuds d'attache N_1 et N_2 .

2.1. Théorie de Hertz

Les déplacements des bagues intérieure et extérieure vont engendrer des efforts de contact sur la piste de roulement. La théorie de Hertz est utilisée lors du calcul des efforts qui agissent sur les éléments roulants:

$$Q = C_f (\delta)^n \quad (1)$$

où Q est la force agissant sur l'élément roulant, C_f une constante de rigidité du contact, δ l'écrasement des corps en contact et n le coefficient dépendant de la nature du contact.

2.2. Matrices de "Géométrie"

Les différents repères orthonormés directs utilisés dans cette analyse pour déterminer le mouvement relatif du corps roulant et de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure sont : le repère élémentaire (global) $R_1 (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z l'axe de rotation du roulement, le repère lié au corps roulant $R_2(C_r, \vec{e}_r, \vec{e}_n, \vec{e}_z)$ avec Φ l'angle repérant la position du centre C_r , et le repère lié à la bague extérieure $R_3(C_r, \vec{e}_r', \vec{e}_n', \vec{e}_z')$ qui tient compte du basculement éventuel de la bague extérieure dans le repère R_2 (voir figure 1).

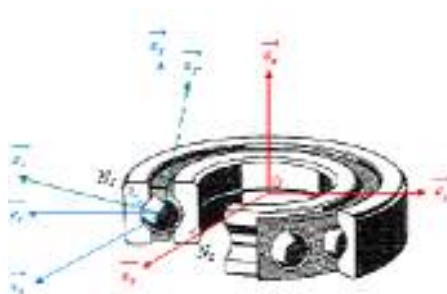


Figure 1 : Définition des repères utilisés

On note $\theta_x, \theta_y, \theta_z$, et γ respectivement les déplacements angulaires du point N_1 dans le repère R_1 suivant les trois directions $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ et l'angle de basculement de la bague extérieure dans le plan radial de calcul. Ce dernier s'écrit :

$$\gamma = -\sin \phi \theta_x + \cos \phi \theta_y \quad (2)$$

On définit les matrices de "géométrie" $[G_1]$ et $[G_2]$ correspondant respectivement aux bagues extérieure et intérieure comme étant :

$$\left\{ \overrightarrow{dep}(C_r \in \text{Bague ext}) \right\}_{R_3} = [G_1] \cdot \left\{ \overrightarrow{dep}(N_1 \in \text{Bague ext}) \right\}_{R_1} \quad (3)$$

$$\left\{ \overrightarrow{dep}(C_r \in \text{Bague int}) \right\}_{R_3} = [G_2] \cdot \left\{ \overrightarrow{dep}(N_2 \in \text{Bague int}) \right\}_{R_1} \quad (4)$$

Ces matrices permettent de déterminer le déplacement des nœuds N_1 et N_2 dans le repère R_1 à l'aide des déplacements du centre C_r dans le repère R_3 appartenant respectivement à la bague extérieure et à la bague intérieure. Elles s'écrivent :

$$[G_i] = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \phi & \cos \gamma \sin \phi & \sin \gamma & -Z_i \sin \phi & Z_i \cos \phi & 0 \\ -\sin \gamma \sin \phi & \sin \gamma \cos \phi & \cos \gamma & R_i \sin \phi & -R_i \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.3. Equilibre du corps roulant

Les calculs qui vont suivre sont effectués par rapport au repère R_3 dans le plan radial ($C_r, \vec{e}_r, \vec{e}_z$).

Notons par $\left\{ \vec{u} \right\}$ le vecteur déplacement de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure dans le repère R_3 et par $\left\{ \vec{v} \right\}$ le vecteur déplacement du centre du corps roulant.

Le vecteur des efforts résiduels s'écrit :

$$\left\{ \vec{R} \right\} = -\sum F_{ext} = -\begin{Bmatrix} F_r^{Be} \\ F_z^{Be} \\ M_\theta^{Be} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_r^{Bi} \\ F_z^{Bi} \\ M_\theta^{Bi} \end{Bmatrix} = F(v_r, v_z, v_\theta) \quad (6)$$

L'équilibre du corps roulant est obtenu lorsque le vecteur des efforts résiduels est nul. Le processus consiste à déterminer, pour chaque itération, le vecteur des efforts résiduels ainsi que la matrice de rigidité obtenue en fonction du nouveau vecteur déplacement.

Notons $[K_T]_i$ la matrice de rigidité tangente de dimension (3×3) associée au système bagues corps roulant, calculée au point C_r à l'itération i . Elle s'exprime par :

$$\begin{aligned} [K_T]_i &= [K_t^{Be}]_{V_i} + [K_t^{Bi}]_{V_i} \\ &= \left[\frac{-\partial \left\{ \vec{F}^{Be} \right\}}{\partial \left\{ \vec{V} \right\}} \right]_{V_i} + \left[\frac{-\partial \left\{ \vec{F}^{Bi} \right\}}{\partial \left\{ \vec{V} \right\}} \right]_{V_i} \end{aligned} \quad (7)$$

Lorsque le vecteur des efforts résiduels est nul, l'équilibre est atteint. Une matrice de rigidité élémentaire équivalente est déterminée entre N_1 et N_2 : C'est la matrice de rigidité tangente associée à l'élément corps roulant.

La matrice de rigidité équivalente déterminée entre N_1 et N_2 dans le repère R_3 s'écrit :

$$[K] = [K_t^{Be}] [K_t^{Be} + K_t^{Bi}]^{-1} [K_t^{Bi}] \tag{8}$$

$$[\tilde{K}]_{(6 \times 6)} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$[K_t^e]_{(12 \times 12)} = [G]^t [\tilde{K}] [G] \tag{10}$$

avec $[G]$ la matrice de passage du repère R_3 au repère R_I :

$$[G] = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

L'organigramme décrivant les différentes étapes de calcul est présenté par la figure 2

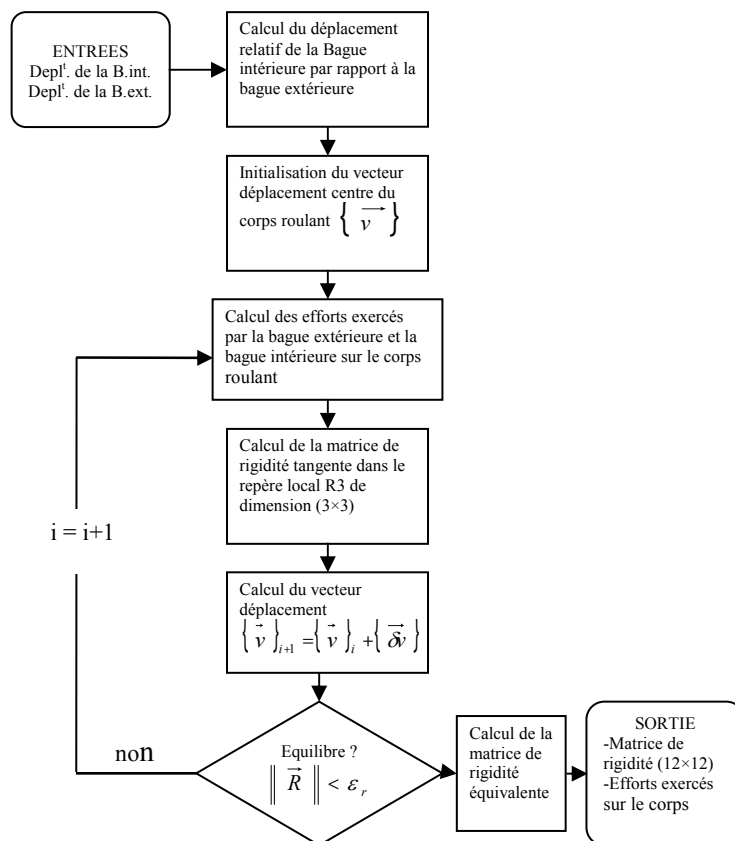


Figure 2 : Organigramme de calcul

3. RIGIDITE D'UN PALIER A ROULEMENT A BILLES A CONTACT OBLIQUE

3.1. Modélisation géométrique

Le modèle adopté est schématisé par la figure 3

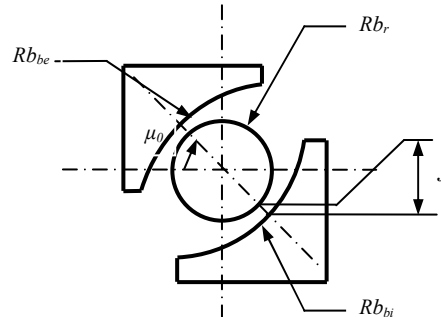


Figure 3 : Modélisation d'un roulement à bille à contact oblique

avec, μ_0 l'angle complémentaire de celui de contact ($\mu_0 = 90 - \alpha$), R_{br} le rayon de la bille, R_{bbe} le rayon du bombé de la bague extérieure, R_{bbi} le rayon du bombé de la bague intérieure et J le jeu initial entre les bagues et la bille.

3.2. Efforts appliqués

On se place dans toute la suite dans le cas d'un montage arbre tournant.

Soit $\{\vec{u}\}_{R_3} = \{u_r \quad u_z \quad u_\theta\}^T$ le déplacement imposé à la bague intérieure dans le repère R_3 (l'exposant T indique le transposé du vecteur), avec u_θ est l'angle entre l'axe de la bague extérieure et l'axe de la bague intérieure (voir figure 4).

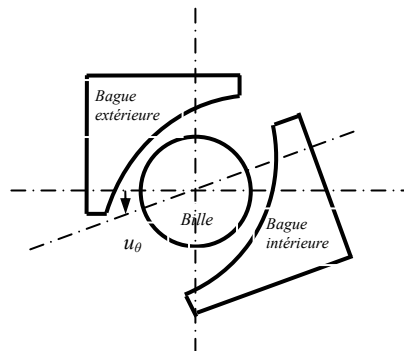


Figure 4 : Positionnement de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure

On définit par μ_i l'angle entre la normale au contact et l'axe de la bille. La figure 5 définit les angles μ_1 et μ_2 associés respectivement aux directions effectives de la bille par rapport à la bague extérieure et à la bague intérieure.

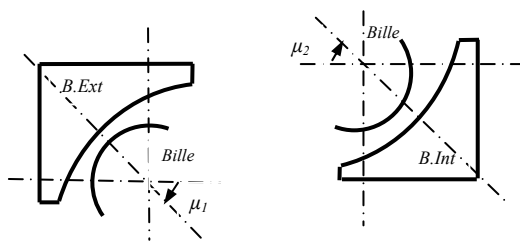


Figure 5 : Directions de contact

μ_1 et μ_2 ont les expressions suivantes :

$$\mu_1 = \mu_0 \quad \text{et} \quad \mu_2 = \mu_0 + u_\theta \quad (12)$$

Le jeu s'exprime en fonction de μ_i :

$$\tilde{J} = J + R_{br} (\cos \mu_i - \cos \mu_0) \quad (13)$$

L'écrasement s'exprime alors pour les deux bagues par :

$$\delta_1 = -v_z \cos \mu_0 + v_r \sin \mu_0 - \tilde{J} \quad (14)$$

$$\delta_2 = -(u_z - v_z) \cos(\mu_0 - u_\theta) + (u_r - v_r) \sin(\mu_0 - u_\theta) - \tilde{J} \quad (15)$$

L'écrasement est positif s'il y a contact entre la bille et les bagues, nul dans le cas contraire. Les bagues exercent donc des efforts sur la bille qui sont estimés à l'aide de la relation de Hertz ($n=3/2$) par :

$$Q_i(v_r, v_z, v_\theta) = C_{ep} (\delta_i)^{3/2} \quad (16)$$

Les moments au centre de la bille sont nuls.

Les équations d'équilibre s'écrivent dans le repère R_3 :

$$F_r(v_r, v_z, v_\theta) = F_r^{Bague\text{ext}} + F_r^{bague\text{int}} = -Q_1 \sin \mu_0 + Q_2 \sin(\mu_0 - u_\theta) \quad (17)$$

$$F_z(v_r, v_z, v_\theta) = F_z^{Bague\text{ext}} + F_z^{bague\text{int}} = Q_1 \cos \mu_0 - Q_2 \cos(\mu_0 - u_\theta) \quad (18)$$

$$M_\theta(v_r, v_z, v_\theta) = M_\theta^{Bague\text{ext}} + M_\theta^{bague\text{int}} = 0 \quad (19)$$

3.3. Matrices de rigidités

Les déplacements du corps roulant sont les inconnus du problème. Les matrices de rigidité tangente associées aux contacts bagues - bille s'expriment par :

$$\left[K_t^{Bague\ ext} \right] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r^{Bague\ ext}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_r^{Bague\ ext}}{\partial v_z} & \frac{\partial F_r^{Bague\ ext}}{\partial v_\theta} \\ \frac{\partial F_z^{Bague\ ext}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_z^{Bague\ ext}}{\partial v_z} & \frac{\partial F_z^{Bague\ ext}}{\partial v_\theta} \\ \frac{\partial M_\theta^{Bague\ ext}}{\partial v_r} & \frac{\partial M_\theta^{Bague\ ext}}{\partial v_z} & \frac{\partial M_\theta^{Bague\ ext}}{\partial v_\theta} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\left[K_t^{Bague\ int} \right] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r^{Bague\ int}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_r^{Bague\ int}}{\partial v_z} & \frac{\partial F_r^{Bague\ int}}{\partial v_\theta} \\ \frac{\partial F_z^{Bague\ int}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_z^{Bague\ int}}{\partial v_z} & \frac{\partial F_z^{Bague\ int}}{\partial v_\theta} \\ \frac{\partial M_\theta^{Bague\ int}}{\partial v_r} & \frac{\partial M_\theta^{Bague\ int}}{\partial v_z} & \frac{\partial M_\theta^{Bague\ int}}{\partial v_\theta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

On a développé un programme en langage Fortran pour déterminer la matrice de rigidité et les efforts appliqués pour différentes configurations et dimensions. Le calcul de la matrice de rigidité fait apparaître un élément fini "élément roulant" à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud $(u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$. Ces deux nœuds correspondent aux nœuds d'attaches N_1 et N_2 appartenant respectivement à la bague extérieure et à la bague intérieure. La rotation θ_z est nulle puisqu'elle correspond à la rotation autour de l'axe du roulement.

3.4. Résultats numériques

L'étude numérique présentée considère un roulement à 12 corps roulants.

La matrice de rigidité tangente de dimension (12×12) du corps roulant dans le repère global R_I s'écrit :

$$\left[K_T \right] = \begin{bmatrix} K^{Be} & K^{Be-Bi} \\ K^{Bi-Be} & K^{Bi} \end{bmatrix} \quad (22)$$

avec K^{Be} , K^{Bi} les matrices de rigidités de dimension (6×6) associées respectivement aux bagues extérieure et intérieure et K^{Be-Bi} , K^{Bi-Be} les matrices de rigidités de dimension (6×6) traduisant le couplage entre les deux bagues.

On s'intéressera dans la suite aux termes de rigidités K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} , C_{xx} et C_{yy} donnés par la formule ci-dessous :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K^{Be}} + \frac{1}{K^{Bi}}, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C^{Be}} + \frac{1}{C^{Bi}} \quad (23)$$

On étudiera alors l'influence de la variation de l'angle de contact α et de la variation du déplacement imposé sur les termes de rigidités K_{xx} , K_{yy} , K_{zz} , C_{xx} et C_{yy} en fonction de la position angulaire Φ du corps roulant.

3.4.1. Influence de la variation de l'angle de contact

On fait varier l'angle de contact α entre 30 et 40 degrés et la position angulaire de l'élément roulant Φ entre 0 et 360 degrés. Les résultats obtenus concernant les termes de rigidités et les efforts sont présentés dans les figures qui suivent.

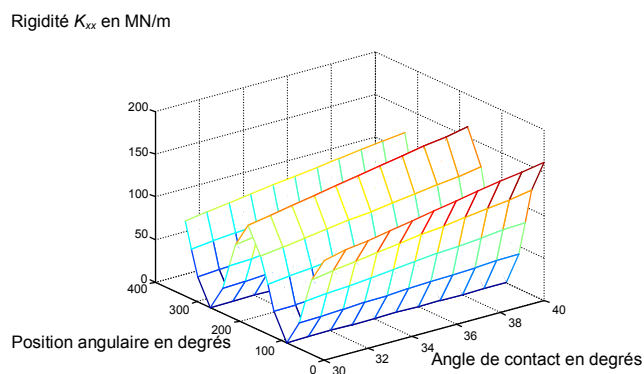


Figure 6 : Rigidité K_{xx}

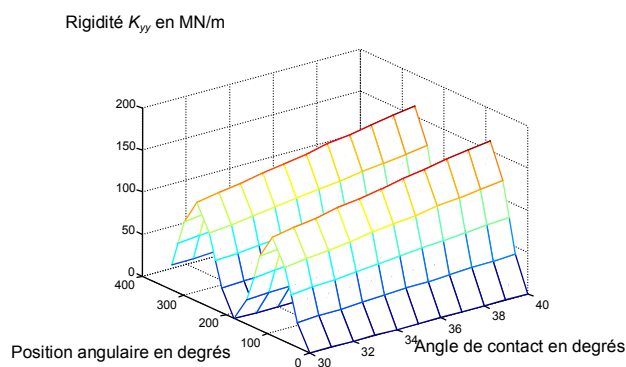


Figure 7 : Rigidité K_{yy}

Les figures 6 et 7 montrent que pour un angle Φ constant, les rigidités K_{xx} et K_{yy} varient linéairement avec une pente croissante en fonction de l'angle de contact α dans l'intervalle considéré ($30^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$). Ces mêmes figures montrent que pour un angle α constant, K_{xx} et K_{yy} varient sinusoïdalement en opposition de phase en fonction de la position du corps roulant, avec une période de 180° .

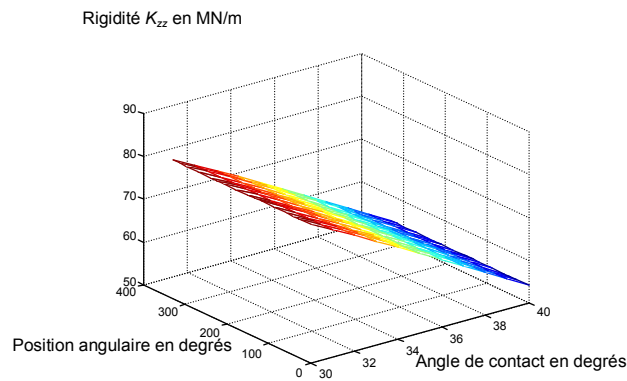


Figure 8 : Rigidité K_{zz}

La figure 8 représente la variation de la rigidité axiale en fonction de l'angle de contact et en fonction de la position angulaire. Pour une position angulaire Φ fixe du corps roulant, K_{zz} varie linéairement avec une pente décroissante en fonction de l'angle de contact α et est indépendante de la position angulaire de l'élément roulant pour un angle de contact donné.

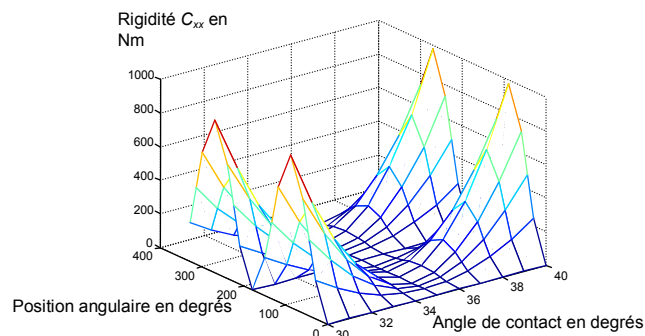


Figure 9 : Rigidité torsionnelle C_{xx}

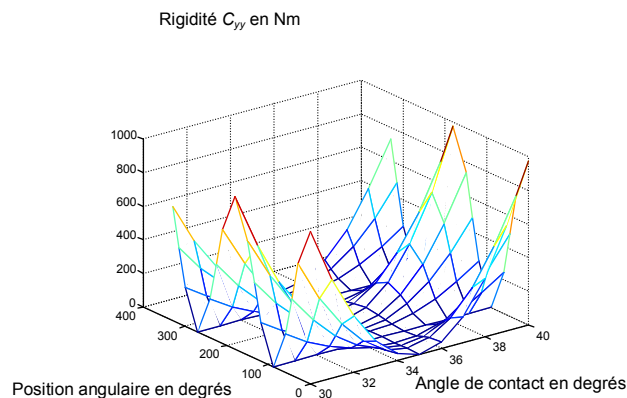


Figure 10 : Rigidité torsionnelle C_{yy}

On constate d'après les figures 9 et 10, que pour une position angulaire Φ constante, C_{xx} et C_{yy} ont de formes sinusoïdales qui s'annulent pour une valeur de $\alpha = 35^\circ$.

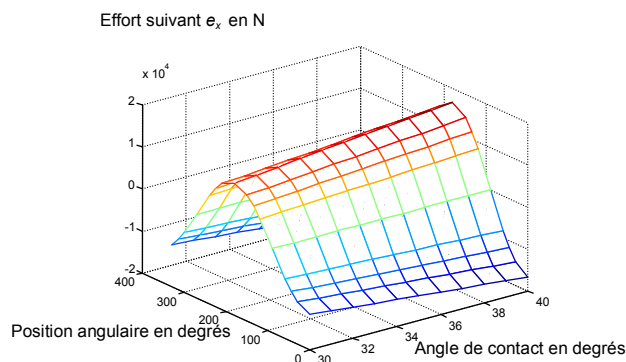


Figure 11 : Effort suivant e_x appliqué par la bague extérieure sur l'élément roulant

Pour une position angulaire constante de la bille, F_x et $F_y = F(\alpha)$ sont des droites de pente croissante (voir figures 11 et 12).

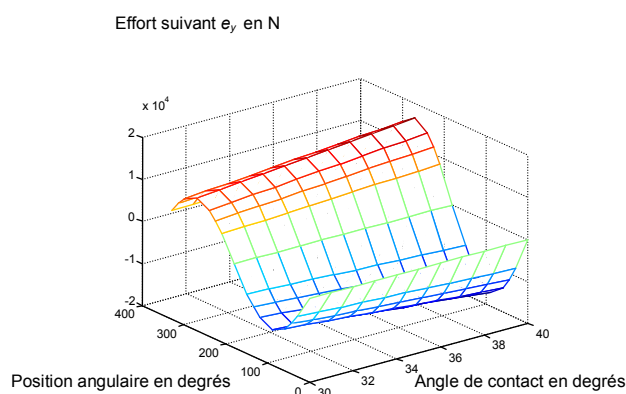


Figure 12 : Effort suivant e_y appliqué par la bague extérieure sur l'élément roulant

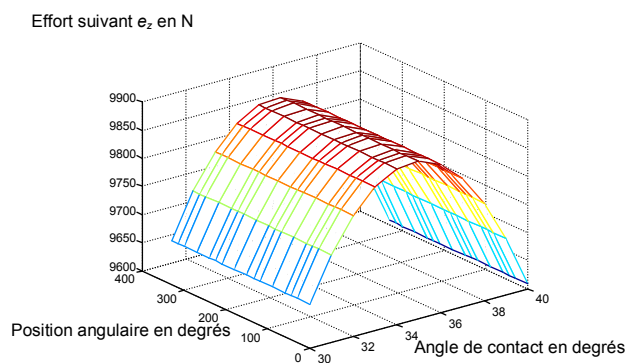


Figure 13 : Effort suivant e_z appliqué par la bague extérieure sur l'élément roulant

La figure 13 représente la variation de l'effort axiale en fonction de la position angulaire et en fonction de l'angle de contact. On constate que l'allure de $F_z = F(\alpha)$ est une sinusoïde qui atteint un maximum pour un angle de contact 35°.

3.4.2. Influence de la variation du déplacement

Le déplacement varie de 10^{-4} à 10^{-3} m. Les figures qui suivent représentent la variation des termes de rigidité en fonction de la position angulaire de l'élément roulant et du déplacement.

Les figures 14 à 16 montrent qu'en maintenant une position angulaire constante, les rigidités et les efforts augmentent non linéairement en fonction du déplacement, vu qu'on a utilisé la théorie de Hertz (contact non linéaire).

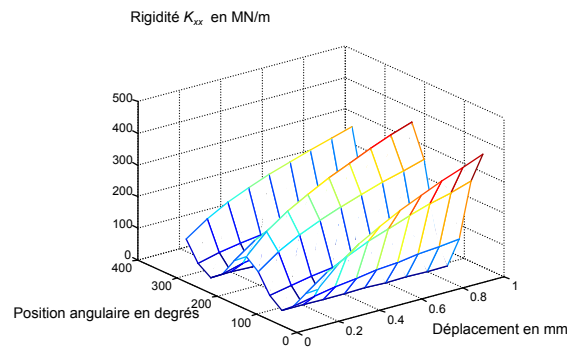


Figure 14 : Rigidité K_{xx}

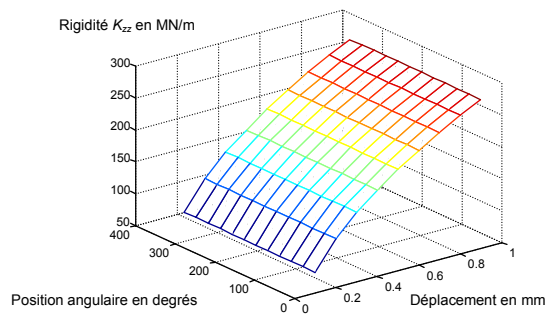


Figure 15 : Rigidité K_{zz}

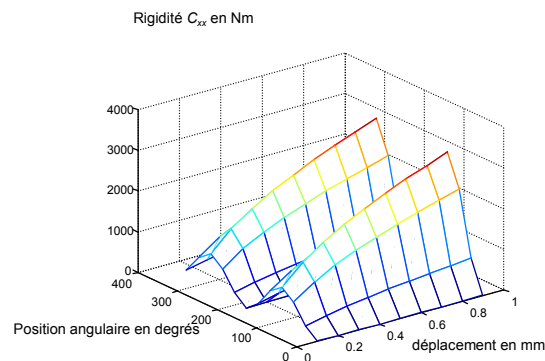


Figure 16 : Rigidité torsionnelle C_{xx}

3.4.3. Analyse du couplage entre les différents termes de la matrice de rigidité

La matrice de rigidité associée au contact bague extérieure - élément roulant de dimension (5×5) obtenue pour la position angulaire égale à 0° de l'élément roulant et pour un déplacement radial de 10^{-4} m est donnée par le tableau 1 :

$2,341 \cdot 10^8$	0	$-1,964 \cdot 10^8$	0	$6,51 \cdot 10^5$
0	0	0	0	0
$-1,964 \cdot 10^8$	0	$1,648 \cdot 10^8$	0	$-5,47 \cdot 10^5$
0	0	0	0	0
$6,51 \cdot 10^5$	0	$-5,47 \cdot 10^5$	0	$1,81 \cdot 10^3$

Tableau 1. Matrice de rigidité associée au corps roulant pour $\Phi = 0^\circ$

Afin de mieux comprendre le comportement du corps roulant, on transpose la matrice de rigidité dans son repère principal. La matrice obtenue est la suivante :

$3,99 \cdot 10^8$	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Tableau 2. Matrice de rigidité diagonalisée pour $\Phi = 0^\circ$

On constate que le corps roulant peut être modélisé par un ressort linéaire de rigidité $3,99 \cdot 10^8$ (N/m) suivant la direction propre associée \vec{e}_x de coordonnées dans le repère R_1 : $\{0,76 \ 0 \ -0,64 \ 0 \ 0\}^T_{R_1}$ (Les rotations autour de \vec{e}_x et \vec{e}_y sont négligeables).

Ce résultat montre l'importance de cette étude : un palier à roulement ne doit pas être modélisé par l'association de ressorts linéaires indépendants suivant les trois directions \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z . Le couplage mécanique entre ces ressorts est important, ce qui justifie l'utilisation d'un élément fini corps roulant dans cette étude.

4. RIGIDITE D'UN PALIER A ROULEMENT A ROULEAUX CYLINDRIQUES

4.1. Modélisation géométrique

Le modèle adopté est schématisé par la figure 17, avec, R_s est le rayon de la forme sphérique à l'extrémité du rouleau cylindrique, X_s est la distance du centre de la sphère d'extrémité au centre C_r du rouleau, μ_0 est l'angle de contact à l'épaulement, R_{br} est le rayon du bombé du rouleau, R_{b_e} est le rayon du bombé de la bague extérieure, R_{b_i} est le rayon du bombé de la bague intérieure, J_b est le jeu initial bagues rouleau, J_e est le jeu initial bagues épaulements, L_r est la longueur des génératrices rectilignes des pistes du rouleau et L_e la longueur effective du rouleau.

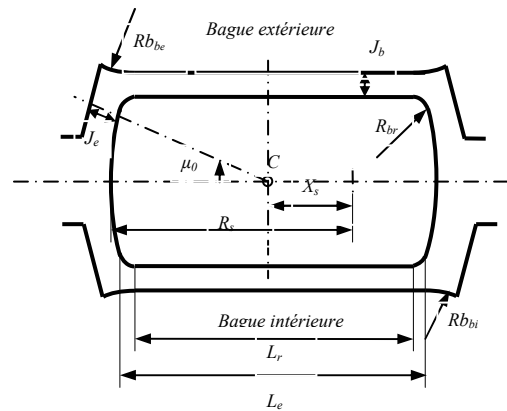


Figure 17 : Modélisation d'un roulement à rouleaux cylindriques

On définit par $\{\vec{u}\}_{R_3} = \{u_r \quad u_z \quad u_\theta\}^T$ le déplacement imposé à la bague intérieure dans le repère R_3 et par $\{\vec{v}\}_{R_3} = \{v_r \quad v_z \quad v_\theta\}^T$ le déplacement du centre du corps roulant, avec v_θ l'angle entre l'axe de la bague extérieure et l'axe du corps roulant, et u_θ l'angle entre l'axe de la bague extérieure et l'axe de la bague intérieure.

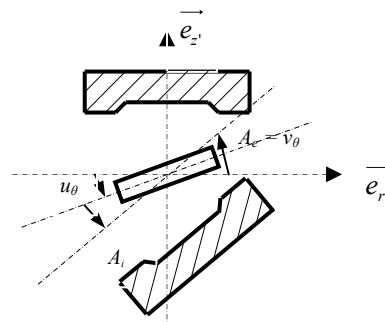


Figure 18 : Positionnement la bague intérieure par rapport à la bague extérieure

En définissant par A_i l'angle orienté entre l'axe de la bague intérieure et l'axe du rouleau, et A_e l'angle orienté entre l'axe de la bague extérieure et l'axe du rouleau, on obtient les relations suivantes :

$$A_i = -u_\theta + v_\theta \quad \text{et} \quad A_e = v_\theta \quad (24)$$

4.2. Efforts appliqués sur la piste de roulement

Les rapprochements du rouleau par rapport à chacune des pistes de roulement sont respectivement notés δ_i et δ_e et s'expriment par :

$$\delta_i = u_r - v_r - J_b \quad \text{et} \quad \delta_e = v_r - J_b \quad (25)$$

La zone de contact potentiel entre le rouleau et la piste est découpée en N tranches. L'écrasement entre les deux corps pour chaque tranche est donné par la formule suivante :

$$\Delta d = \delta + \alpha z_k - h_k^1 - h_k^2 \quad (26)$$

avec, δ est le rapprochement, α est le basculement relatif des deux solides (pour le contact bague extérieure et rouleau $\alpha = A_e$, et pour le contact bague intérieure et rouleau $\alpha = A_i$) et h_k^1 et h_k^2 sont les termes permettant de tenir compte du bombé éventuel des corps.

En appliquant la théorie de Hertz définie précédemment, on peut écrire les expressions de l'effort Q_k au contact et le moment M_k au centre C_r , pour chaque nœud :

$$Q_k = C_f \left(\Delta d \right)^{\frac{10}{9}} d_e \quad (27)$$

$$M_k = Q_k z_k \quad (28)$$

La résultante Q_{Bn} des efforts exercés le long de la piste de contact sur le roulement et le moment résultant M_{Bn} sont donc :

$$Q_{Bn} = \sum_{k=1}^N Q_{kn} \quad \text{et} \quad M_{Bn} = \sum_{k=1}^N M_{kn} \quad (29)$$

avec l'indice $n = i$ s'il s'agit de la bague intérieure et $n = e$ s'il s'agit de la bague extérieure.

4.3. Efforts appliqués aux épaulements

Pour chacun des quatre épaulements, l'angle effectif entre la normale au contact et l'axe du rouleau doit être défini. Soit μ_i l'angle associé à l'épaulement i ($i = 1$ à 4) comme il est présenté ci-dessous

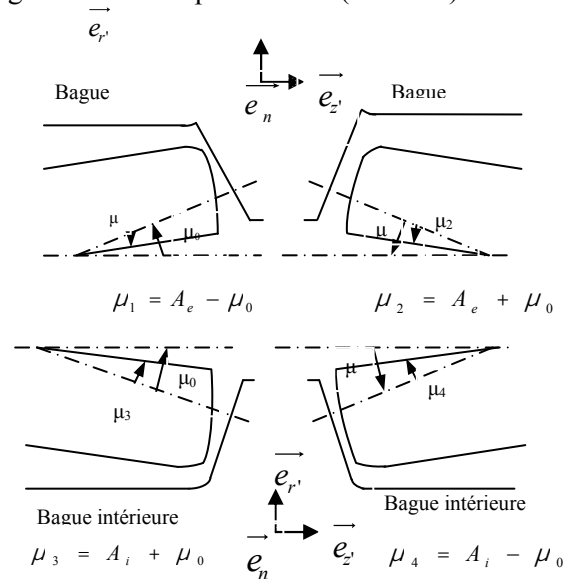


Figure 19 : Différentes directions de contact

Le jeu \tilde{J}_i entre le rouleau et l'épaulement varie selon la direction effective i de contact entre l'extrémité de roulement et l'épaulement.

Dans ce cas, l'écrasement aura pour expression pour la bague extérieure :

$$\delta_1 = v_z \cos \mu_0 + v_r \sin \mu_0 - \tilde{J}_1 \quad (30)$$

$$\delta_2 = v_r \sin \mu_0 - v_z \cos \mu_0 - \tilde{J}_2 \quad (31)$$

et pour la bague intérieure :

$$\delta_3 = -(u_z - v_z) \cos(\mu_0 - u_\theta) + (u_r - v_r) \sin(\mu_0 - u_\theta) - \tilde{J}_3 \quad (32)$$

$$\delta_4 = (u_z - v_z) \cos(\mu_0 - u_\theta) + (u_r - v_r) \sin(\mu_0 - u_\theta) - \tilde{J}_4 \quad (33)$$

Les deux bagues extérieure et intérieure exercent sur le rouleau suivant ces directions de contact des efforts Q_{Ei} et des moments M_{Ei} en C_r qui sont estimés par la théorie de Hertz par les expressions :

$$Q_{Ei}(v_r, v_z, v_\theta) = C_{ep} (\delta_i)^{3/2} \quad (34)$$

$$M_{Ei} = -Q_{Ei} X_s \sin \mu_i \quad (35)$$

Les matrices de rigidités de la bague extérieure et de la bague intérieure sont déterminées comme précédemment (cas du roulement à billes à contact oblique).

4.4. Résultats numériques

4.4.1. Influence de la variation de la distance X_s

L'influence de la variation de la distance X_s du centre de la sphère d'extrémité au centre C_r du rouleau sur les termes de cette matrice de rigidité sera étudiée dans ce qui suit.

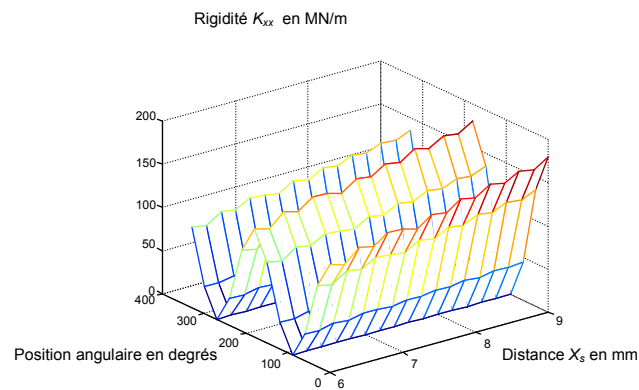


Figure 20 : Rigidité K_{xx}

On constate pour une position angulaire fixe que la rigidité K_{zz} est indépendante de X_s tandis que K_{xx} et K_{yy} augmentent en fonction de X_s (voir figures 20 et 21).

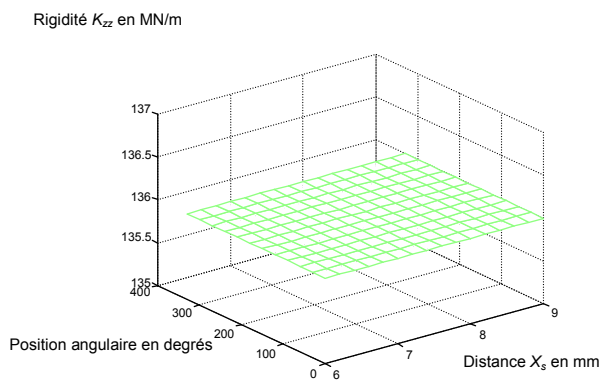


Figure 21 : Rigidité K_{zz}

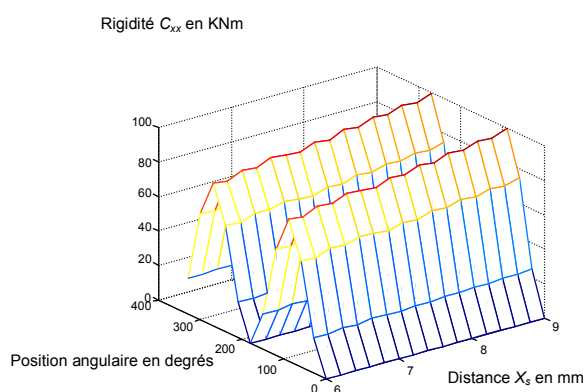


Figure 22 : Rigidité torsionnelle C_{xx}

D'après la figure 22, on constate que pour une position angulaire fixe les rigidités torsionnelles augmentent en fonction de X_s .

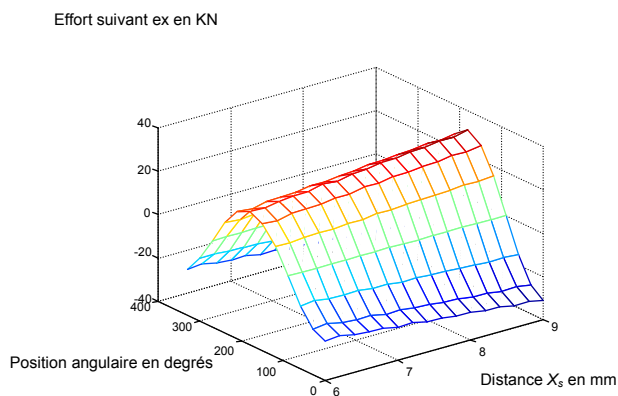


Figure 24 : Effort appliqué suivant e_x par les deux bagues sur l'élément roulant

4.4.2. Couplage entre les différents termes de la matrice de rigidité

La matrice de rigidité associée à un corps roulant situé dans une position angulaire égale à 0° est donnée par le tableau 3 :

2.86E+08	0	-2.82E-11	0	-4.00E+06	0	-2.86E+08	0	2.82E-11	0	-4.00E+06	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.82E-11	0	2.72E+08	0	-5.75E+06	0	2.82E-11	0	-2.72E+08	0	-5.13E+06	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4.00E+06	0	-5.25E+06	0	1.78E+05	0	4.00E+06	0	5.25E+06	0	1.44E+05	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.86E+08	0	2.82E-11	0	4.00E+06	0	2.86E+08	0	-2.82E-11	0	4.00E+06	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.82E-11	0	-2.72E+08	0	5.75E+06	0	-2.82E-11	0	2.72E+08	0	5.13E+06	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4.00E+06	0	-5.63E+06	0	1.64E+05	0	4.00E+06	0	5.63E+06	0	1.73E+05	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 3. Matrice de rigidité tangente

Afin de déterminer le couplage entre les différents termes de la matrice de rigidité, on rapporte ces termes par rapport au plus grand terme K_{xx}^{BE} . La matrice obtenue est donnée respectivement par le tableau 4.

1.00E+00	0	-9.87E-20	0	-1.40E-02	0	-	0	9.87E-20	0	-1.40E-02	0
0	0	0	0	0	0	1.00E+00	0	0	0	0	0
-9.87E-20	0	9.51E-01	0	-2.01E-02	0	9.87E-20	0	-9.51E-01	0	-1.79E-02	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.40E-02	0	-1.84E-02	0	6.22E-04	0	1.40E-02	0	1.84E-02	0	5.05E-04	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	9.87E-20	0	1.40E-02	0	1.00E+00	0	-9.87E-20	0	1.40E-02	0
1.00E+00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9.87E-20	0	-9.51E-01	0	2.01E-02	0	-9.87E-20	0	9.51E-01	0	1.79E-02	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.40E-02	0	-1.97E-02	0	5.75E-04	0	1.40E-02	0	1.97E-02	0	6.05E-04	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 4. Matrice de rigidité tangente rapportée

On constate pour une position angulaire $\Phi = 0^\circ$, les termes représentant le couplage entre u_x u_z pour les deux bagues sont les plus importants (95.1%). Le couplage entre u_x θ_y et u_z θ_y pour les deux bagues est de 19%.

5. CONCLUSION

Cette modélisation nous a permis de développer un élément fini à deux nœuds et six degrés de liberté par nœud afin d'étudier l'influence de la variation de certains paramètres (la position angulaire du corps roulant, l'angle de contact et le déplacement imposé) sur les termes de la matrice de rigidité. En dépit des résultats attendus concernant la variation des grandeurs K_{xx} , K_{yy} , C_{xx} et C_{yy} en fonction de la position angulaire (pouvant renseigner sur la validité du programme de calcul), on note un comportement non linéaire des termes K_{xx} et K_{yy} en fonction du déplacement imposé.

Une analyse des différents termes de la matrice de rigidité a montré la présence d'un couplage important pouvant atteindre jusqu'au 96 % dans le cas le plus défavorable (corps roulant appartenant à un roulement à billes à contact oblique se trouvant à une position angulaire 30°). Le roulement ne peut donc pas être modélisé par l'association de ressorts linéaires indépendants placés suivant les trois directions \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z .

La matrice de rigidité globale du roulement peut être déterminée par l'association des matrices de rigidités des différents corps roulants qui le constituent. Cette matrice est ensuite injectée dans un modèle global définissant la rigidité du système à étudier.

6. RÉFÉRENCES

1. Jones, A.B. A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions, *TASME, Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, 309-320, 1960.
2. Palmgren, A. *Ball and roller bearings engineering*, 3rd ed., Burbank, Philadelphia, SKF, Industries, Inc. 1959.
3. Garguilo E.P. A simple way to estimate bearing stiffness, *Machine Design* 52, 107-110, 1980.
4. Krauss, J.; Blech, J.J.; Braun, S.G. In situ determination of roller bearing stiffness and damping by model analysis, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in design*, Vol. 109, 235-240, 1987.
5. Drago, R.J. How to Design Quiet Transmission, *Machine Design*, 175-181, 1980.
6. Lim, T.C.; Singh, R. Vibration transmission through rolling element bearings. Part I: Bearing stiffness formulation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 139, No.2, 179-199, 1990.
7. Demul, J.M.; Vree, J.M.; Maas, D.A. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearing loaded in 5 degrees of freedom while neglecting frictions. Part II: Application to roller bearings in experimental verification, *TASME, Journal of Tribology*, Vol. 111, 149-155, 1989.
8. Bourdon, A. *Modélisation dynamique globale des boîtes de vitesses automobile*, thèse de doctorat, institut nationale des sciences appliquées de Lyon, 1997.
9. Dhatt, G.; Touzot, G. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Editeur, Paris, 1984.
10. Lahmar, F. *Interaction entre la dynamique de l'engrènement et les paliers à roulement*", thèse de doctorat, Institut Nationale des Sciences Appliquées de Lyon, 2000.
11. Gupta P.K. *Advanced Dynamics of Rolling Elements*, Springer-Verlag, New York Inc, 1984.

12. Nelias, D. Contribution à l'étude des roulements. Modélisation globale des roulements et avaries superficielles dans les contacts EHD pour des surfaces réelles ou indentées, dossier d'habilitation à diriger des recherches, institut nationale des sciences appliquées de Lyon, 1999.