

Simulation par éléments finis multicouche du comportement des structures en béton armé à la ruine

Y. Belmouden

Laboratoire d'Informatique et Mécanique Appliquées à la Construction, GC G1 494, ENAC-IS-IMAC,
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, EPFL, CH 1015, Lausanne, SUISSE

Résumé

Dans cet article, on présente un élément fini poutre multicouche non linéaire, hétérogène et à géométrie variable pour les structures en béton armé. Une procédure d'analyse non linéaire de structure événement à événement est présentée et appliquée à l'élément fini multicouche. Des tests élémentaires sont conduits sur la base d'un modèle analytique trilineaire pour les structures en béton armé. Les résultats obtenus de la simulation numérique et du calcul analytique montrent une très bonne concordance. Le modèle élément fini permet une analyse globale, semi-locale et locale par le calcul des sollicitations, des diagrammes de contraintes, moment - courbure, de la distribution des courbures et de la variation de l'axe neutre.

Abstract :

In this paper, we present a non linear multilayer flexibility-based finite beam element for reinforced concrete structures. A non linear structural analysis method with event to event scheme is presented and used for the multilayer finite element. Elementary tests are conducted using a trilinear analytical model for reinforced concrete structures. Very good concordance is obtained between the numerical simulation and the analytical results. The finite element model permit a global to local investigation by calculation of sollicitations, stress diagrams, bending moment - curvatures diagrams, curvature distribution and neutral axis shifting.

1. INTRODUCTION

Le modèle élément fini béton armé présenté dans cette étude est basé sur une formulation par la méthode des forces (ou des flexibilités) (Zeris 1991[29]). La principale difficulté de cette formulation réside sur son intégration dans un procédé d'analyse non linéaire sur la base de la méthode des déplacements (ou des rigidités). Cet inconvénient fut levé dans le cas de la discrétisation par éléments finis non linéaires (Neuenhofer 1997 [21]) et dans le cas des éléments fortement non linéaires à écrouissage négatif (Coleman 2001[8]).

La simulation du fonctionnement des structures sous chargements sévères conduit généralement à des problèmes de grande taille, dont la résolution est délicate.

L'approche complète (approche locale) consiste à conjuguer une modélisation géométrique (maillages 2D ou 3D), un modèle rhéologique (formulation de la loi de comportement en 2D ou en 3D) et un modèle de chargement. Elle permet d'aborder des problèmes complexes mais reste applicable seulement à des éléments de structures et ne permet pas d'envisager son utilisation systématique dans le cadre de dimensionnement d'un ouvrage complet.

L'approche semi-globale (ou semi locale) constitue une approche intermédiaire où le champ des déplacements et des sollicitations est décrit au niveau des nœuds des éléments finis, tandis que toute information concernant le comportement des matériaux est traitée au niveau local. Il s'agit dans la plupart des cas d'utiliser des éléments poutres avec les hypothèses cinématiques habituelles (Bernoulli ou Timoshenko). L'intégration du modèle rhéologique peut être réalisée en général par une intégration numérique classique sur la hauteur, si le problème est plan ou dans les deux directions de la section si le problème est tridimensionnel.

L'approche semi-globale a été adoptée avec succès, pour des éléments finis formulés sur la base de la méthode des déplacements (Merabet 1990 [18], La borderie 1991 [11], Guedes 1994 [9], Shahrokh 1998 [25]), ou sur la base de la méthode des forces (Taucer 1991 [27], Spacone 1996 [26]). Aussi, plusieurs applications ont été conduites pour la modélisation des structures plus ou moins complexes jusqu'à la ruine tel que les voiles en béton armé, lorsque leur comportement est dominé par la flexion par éléments finis semi globaux formulés par la méthode des déplacements (Lago et al. 1998 [12], Mazars 1998 [15], Ragueneau et al. 2000 [23], Mazars et al. 2003 [17]), par le cisaillement (Mazars et al. 2002 [16], Kotronis et al. 2003 [10]) ou formulés par la méthode des forces en tenant compte du glissement d'adhérence dans les poutres en béton armé (Monti 2000 [20]), du cisaillement transverse dans les poutres (poutre de Timoshenko) (Martino 2000 [14]) ou en tenant compte de l'interaction flexion-cisaillement-glissement d'adhérence des armatures en zone critique dans les voiles en béton armé sous chargement cyclique alternée (Belmouden et al. 2003 [4] [5] [6] [7]).

Dans cet article, on présente une contribution à la modélisation par éléments finis multicouche 1D, non linéaires, pour les structures bidimensionnelles (maillage 2D). L'élément fini est une adaptation pour l'analyse détaillée conformément aux règlements de construction de bâtiments multi-étagés en béton armé à contreventement en portique (ossature composée de poutres et de poteaux). Le modèle élément fini proposé est formulé sur la base de la méthode des forces. Le modèle est implanté dans un logiciel d'analyse des structures basé sur la méthode des déplacements (formulation mixte). Le modèle permet la distribution des non linéarités dans le sens longitudinal et transversal, pour l'analyse aux états limites de déformations des structures vis à vis de la flexion composée sous chargement statique monotone croissant jusqu'à la ruine.

La validation élément fini est conduite selon des tests élémentaires [19] en adoptant un modèle analytique trinéaire pour des problèmes à solution théorique incomplète. Le modèle est utilisé pour l'analyse des poutres en béton armé. Le calcul met en évidence les modes de rupture réglementaire conformément au code français BAEL91 (béton armé aux états limites) [22] pour le béton armé par épuisement des armatures tendues ou par écrasement du béton comprimé ainsi que l'état de plastification des armatures tendues et du béton comprimé.

2. PRÉSENTATION DE L'ÉLÉMENT FINI MULTICOUCHE SIMPLIFIÉ

2.1 Formulation

L'élément fini multicouche consiste en un élément fini poutre non linéaire, à géométrie variable et à sections hétérogènes pour la modélisation des structures bidimensionnelles (Fig. 1). Il est formulé sur la base de la méthode des forces [21]. Il est capable de rendre compte de la distribution des non-linéarités en flexion composée, longitudinalement par des segments placés en série et transversalement par des couches superposées en parallèle selon l'hypothèse de Navier-Bernoulli pour les sections

droites (Fig. 1). Le modèle est une version simplifiée du modèle élément fini multicouche du type Timoshenko avec glissement d'adhérence [4] [5] [6] [7].

Le modèle élément fini est défini par :

1- les sollicitations nodales $\{F^e\} = \{N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j\}^t$ et le vecteur des déplacements et rotations nodaux correspondant $\{u^e\} = \{u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j\}^t$,

2- la matrice de rigidité élémentaire exprimée dans le repère local $(x, y) : [K^e] = [R]^t [F_{lex}^e]^{-1} [R]$,

avec : $[F_{lex}^e]$ est la matrice de flexibilité de l'élément en flexion, $[R]$ est la matrice de passage au système à degré de liberté réduit. En effet, la méthode des forces permet de travailler sur un élément sans modes rigides de déformations à 3 degrés de liberté, défini par les vecteurs de sollicitations $\{Q\}$ et des déplacements $\{q\}$ tel que: $\{F^e\} = [R]^t \{Q\}$ et $\{q\} = [R] \{u^e\}$ avec : $\{Q\} = \{-N_i, M_i, M_j\}^t$,

3- l'interpolation exacte des efforts nodaux en l'absence des charges réparties, permet de les calculer en tout point de l'élément tel que : $\{D(\xi_n)\} = \{N(\xi_n), M(\xi_n)\}^t = [b(\xi_n)] \{Q\}$,

où : $N(\xi_n)$ et $M(\xi_n)$ sont l'effort normal et le moment de flexion au point d'abscisse ξ_n (Fig. 1), et

$b(\xi_n)$ la fonction d'interpolation définie par : $[b(\xi_n)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \xi_n & -\xi_n \end{bmatrix}$,

4- chaque section de l'élément poutre peut être définie par le vecteur des sollicitations et des déformations qu'elle subit : $\{D(\xi_n)\} = [f(\xi_n)]^{-1} \{d(\xi_n)\}$ où : $\{d(\xi_n)\} = \{\varepsilon_{NN}(\xi_n), \kappa(\xi_n)\}^t$ est le vecteur de la déformation uniaxiale et de la courbure, et $[f(\xi_n)]^{-1}$ est la matrice des raideurs de flexion de la section (inverse de la matrice des souplesses) tel que :

$$[f(\xi_n)]^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11}(\xi_n) & k_{12}(\xi_n) \\ k_{21}(\xi_n) & k_{22}(\xi_n) \end{bmatrix},$$

La discrétisation de la section droite en un certain nombre de couches superposées selon l'hypothèse de Navier-Bernoulli permet d'obtenir les raideurs suivantes :

$$k_{11}(\xi_n) = \sum_{k=1}^{ncouches} E_k(\xi_n) A_k(\xi_n), \quad k_{22}(\xi_n) = \sum_{k=1}^{ncouches} E_k(\xi_n) y_k^2(\xi_n) A_k(\xi_n)$$

$$k_{12}(\xi_n) = k_{21}(\xi_n) = \sum_{k=1}^{ncouches} E_k(\xi_n) y_k(\xi_n) A_k(\xi_n)$$

$E_k(\xi_n)$, $A_k(\xi_n)$ et $y_k(\xi_n)$ sont respectivement le module d'Young, l'aire d'une couche et la position de son centroïde par rapport à un axe de référence. Chaque couche est définie par sa déformation axiale :

$$\varepsilon_k(\xi_n) = \varepsilon_{NN}(\xi_n) + y_k(\xi_n) \kappa(\xi_n),$$

5- l'application du principe des travaux virtuels exprimé en forces et de l'énergie complémentaire permet d'obtenir l'expression de la matrice de rigidité de l'élément :

$$[\mathbf{F}_{\text{lex}}^e]^{-1} = \left(L \sum_{n=1}^{\text{nsegments}} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} [\mathbf{b}(\xi)]^t [\mathbf{f}(\xi_n)] [\mathbf{b}(\xi)] d\xi \right)^{-1},$$

où: $\xi_n = \frac{\eta_n + \eta_{n-1}}{2}$ définit le centre d'un segment de poutre délimité par $\eta_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{L}$ et $\eta_n = \frac{x_n}{L}$ (Fig. 1).

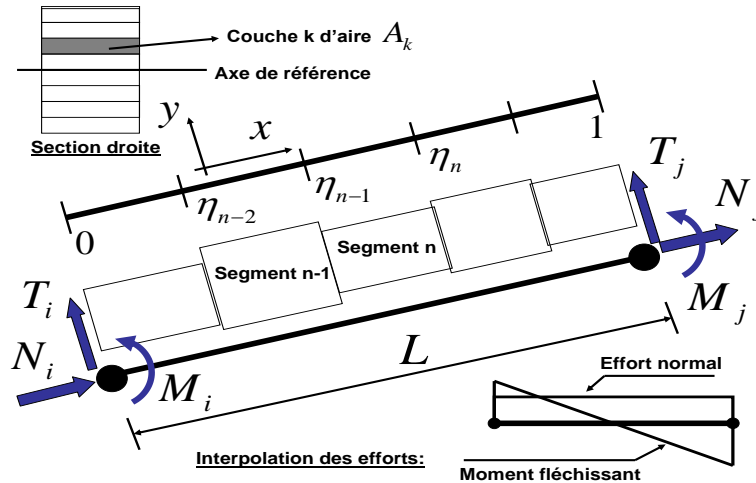


Figure 1 : Modèle élément fini poutre multicouche : discrétisation de l'élément en segments de poutre en série

2.2 Analyse non linéaire de structures

L'analyse non linéaire des structures par éléments finis requiert une procédure de réactualisation de l'état et des réponses des éléments finis au cours des itérations. L'élément fini simplifié est implanté dans le logiciel de calcul de structures DRAIN-2DX [2]. Le programme adopte la méthode itérative de résolution par la méthode événement à événement [13] selon le schéma incrémental linéaire par morceaux.

La procédure de réactualisation et du calcul des réponses est la suivante :

1-résolution du système d'équations linéaires suivant :

$$[\mathbf{K}^{\text{structure}}]^{j-1} \{\Delta \mathbf{U}\}^j = \{\mathbf{F}_{\text{ext}}\}^j - \{\mathbf{R}_u\}^{j-1} \quad (\text{itération } j)$$

avec : $[\mathbf{K}^{\text{structure}}]^{j-1} = \sum_{\text{assemblage}} [\mathbf{K}^e]^{j-1}$ la matrice de rigidité de la structure calculée à l'itération précédente

$j-1$, $\{\mathbf{F}_{\text{ext}}\}^j$ les charges nodales appliquées, $\{\mathbf{R}_u\}^{j-1}$ le résidu de l'itération $j-1$,

2- calcul du facteur d'événement (facteur d'ajustement) de la structure : $\alpha^{\text{structure}} = \prod_{p=1}^{\text{nelements}} (\alpha^e)_p \leq 1$,

avec : α^e le facteur d'événement élémentaire à l'itération j . Si $\alpha^{\text{structure}} = 1$ alors le comportement de la structure est linéaire,

- 3- actualisation des déplacements globaux : $\{U\}^j = \{U\}^{j-1} + \alpha^{\text{structure}} \{\Delta U\}^j$,
- 4- extraire l'incrément du déplacement nodale de l'élément à l'itération j , $\{\Delta U^e\}^j$, à partir de l'incrément ajusté de déplacement de la structure $\alpha^{\text{structure}} \{\Delta U\}^j$,
- 5- transformer $\{\Delta U^e\}^j$ en $\{\Delta q\}^j = [R] [P] \{\Delta U^e\}^j$ où : $[P]$ est la matrice de passage du repère global au repère local,
- 6- calcul de $\{\Delta Q\}^j = [K^e]^{j-1} \{\Delta q\}^j$ puis actualiser : $\{Q\}^j = \{Q\}^{j-1} + \{\Delta Q\}^j$ et $\{q\}^j = \{q\}^{j-1} + \{\Delta q\}^j$,
- 7- pour l'ensemble des segments qui constitue l'élément fini poutre, on calcule :

$$\{\Delta D(\xi_n)\}^j = [b(\xi_n)] \{\Delta Q\}^j \text{ et } \{\Delta d(\xi_n)\}^j = [f(\xi_n)]^{j-1} \{\Delta D(\xi_n)\}^j$$

- 8- actualiser l'état des segments :

$$\{D(\xi_n)\}^j = \{D(\xi_n)\}^{j-1} + \{\Delta D(\xi_n)\}^j \text{ et } \{d(\xi_n)\}^j = \{d(\xi_n)\}^{j-1} + \{\Delta d(\xi_n)\}^j$$

- 9- en déduire les incréments de la déformation et de la contrainte axiale dans les couches :

$\{\Delta \varepsilon_k(\xi_n)\}^j = \{\Delta \varepsilon_{NN}(\xi_n)\}^j + y_k(\xi_n) \{\Delta \kappa(\xi_n)\}^j$ et $\{\Delta \sigma_k(\xi_n)\}^j$ en fonction de la loi de comportement du matériau associé à la couche $(\sigma - \varepsilon)$,

10- en déduire les modules $E_k^j(\xi_n)$. L'actualisation des états dans les couches s'effectue sans tenir compte des tolérances. Les couches sujettes d'une actualisation sont celles dont l'état contrainte – déformation se trouve dans la bande de la tolérance $\Delta \sigma^{\text{tolérance}}$ (Fig. 3).

11- établir les matrices actuelles : $([f(\xi_n)]^{-1})^j$, $[F_{\text{lex}}^e]^j$ et $[K^e]^j$. L'actualisation élémentaire peut aussi être conduite par itérations au sein de chaque élément fini.

12- calcul des efforts résistants internes $\{F_{\text{int}}^e\}^j = [R]^t [P]^t \{Q\}^j$.

13- calcul du résidu $\{R_u\}^j = (F_{\text{ext}})^j - \sum_{\text{assemblage}} (F_{\text{int}}^e)^j$.

14- après la formation de la rigidité actuelle de la structure $[K^{\text{structure}}]^j$ et suite à la triangularisation, on vérifie les pivots : si un pivot est nul alors la structure est considérée instable [1].

2.3 Mise en évidence du facteur d'événement élémentaire α^e

La mise en évidence du facteur d'événement élémentaire débute par la donnée de l'incrément des sollicitations appliquées à une section donnée d'abscisse x discrétisée en couches en se plaçant dans l'hypothèse d'un comportement linéaire tel que, à l'itération j , on a:

$$\{\Delta D(x)\}^j = \begin{Bmatrix} \Delta N(x) \\ \Delta M(x) \end{Bmatrix}^j = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\text{ncouches}} \Delta \sigma_k^j(x) A_k(x) \\ \sum_{k=1}^{\text{ncouches}} \Delta \sigma_k^j(x) y_k(x) A_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\text{ncouches}} \Delta \varepsilon_k^j(x) E_k^{j-1}(x) A_k(x) \\ \sum_{k=1}^{\text{ncouches}} \Delta \varepsilon_k^j(x) E_k^{j-1}(x) A_k(x) y_k(x) \end{pmatrix}$$

On définit alors un facteur appelé *facteur d'événement* noté $\alpha_k(x)$ pour la mesure du dépassement de la limite d'écoulement prédéfinie ou encore pour la détection d'occurrence de non linéarité locale (Fig. 3), tel que pour une couche donnée k , on a :

$$\alpha_k(x) = 1 \text{ si } \Delta\sigma_k^j(x) < \sigma_y + \Delta\sigma^{\text{tolérance}} - \sigma_k^{j-1}(x) \text{ sinon } \alpha_k(x) = \frac{\sigma_y + \Delta\sigma^{\text{tolérance}} - \sigma_k^{j-1}(x)}{\Delta\sigma_k^j(x)} < 1$$

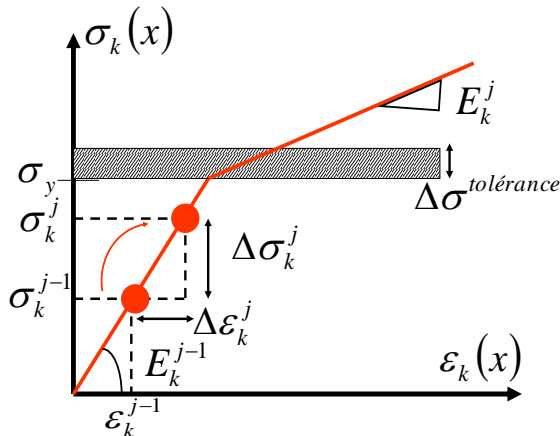


Figure 2 Comportement linéaire d'une couche k

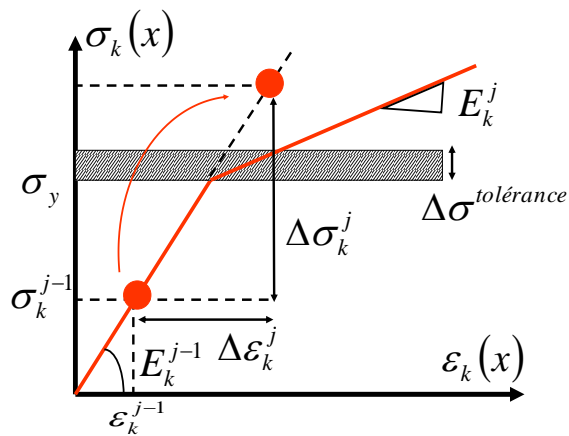


Figure 3 Comportement non linéaire d'une couche k

Figure 2 : la couche k de la section d'abscisse x n'a pas dépassé sa limite d'écoulement σ_y plus une tolérance $\Delta\sigma^{\text{tolérance}}$: on dit qu'il n'y a pas d'événement en terme de comportement au niveau de la couche k , le comportement reste donc linéaire;

Figure 3 : la couche a dépassé sa limite d'écoulement plus la tolérance $\sigma_y + \Delta\sigma^{\text{tolérance}}$ sous l'incrément $\Delta\epsilon_k^j$ ou $\Delta\sigma_k^j$: on dit alors qu'un événement est survenu pour la couche étudiée k , son comportement n'est plus linéaire \Rightarrow une réactualisation de son état est obligatoire.

En partant d'une couche quelconque k d'ordonnée $y_k(x)$, on développe l'expression de $\{\Delta D(x)\}^j$:

$$\begin{pmatrix} \Delta N(x) \\ \Delta M(x) \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} \Delta\sigma_1^j(x)A_1(x) + \dots + \Delta\sigma_k^j(x)A_k(x) + \dots + \Delta\sigma_n^j(x)A_n(x) \\ \Delta\sigma_1^j(x)y_1(x)A_1(x) + \dots + \Delta\sigma_k^j(x)y_k(x)A_k(x) + \dots + \Delta\sigma_n^j(x)y_n(x)A_n(x) \end{pmatrix}$$

On remplace ensuite dans cette expression le terme $\Delta\sigma_k^j(x)$ par l'expression $\frac{\sigma_y + \Delta\sigma^{\text{tolérance}} - \sigma_k^{j-1}(x)}{\alpha_k(x)}$

et on factorise par $1/\alpha_k(x)$ tel que :

$$\begin{pmatrix} \Delta N(x) \\ \Delta M(x) \end{pmatrix}^j = \frac{1}{\alpha_{k'}(x)} \begin{pmatrix} \alpha_{k'}(x) \Delta \sigma_1^j(x) A_1(x) + \dots + (\sigma_y + \Delta \sigma^{\text{tolérance}} - \sigma_k^{j-1}(x)) A_{k'}(x) + \dots + \alpha_{k'}(x) \Delta \sigma_n^j(x) A_n(x) \\ \alpha_{k'}(x) \Delta \sigma_1^j(x) y_1(x) A_1(x) + \dots + (\sigma_y + \Delta \sigma^{\text{tolérance}} - \sigma_k^{j-1}(x)) y_{k'}(x) A_{k'}(x) + \dots + \alpha_{k'}(x) \Delta \sigma_n^j(x) y_n(x) A_n(x) \end{pmatrix}$$

On obtient un nouveau champ de forces réduit noté $\{\Delta D^{(k')}(x)\}^j = \alpha_{k'}(x) \{\Delta D(x)\}^j$ où : $\{\Delta D^{(k')}(x)\}^j$ est le champ de forces à appliquer à la section d'abscisse x au lieu de $\{\Delta D(x)\}^j$ pour que la couche k' soit exactement au niveau de sa limite d'écoulement plus une tolérance.

En appliquant cette définition à l'ensemble des couches qui constitue la section d'abscisse x , on cherche le plus petit incrément de sollicitations $\{\Delta D(x)\}_{\min}^j$ pour lequel toutes les couches de la section ne dépasseront pas leurs limites d'écoulement respectives $\sigma_y + \Delta \sigma^{\text{tolérance}}$ et conserveront un comportement local linéaire selon les tolérances adoptées.

Par conséquent, il existe une couche qui est exactement au niveau de sa limite d'écoulement plus sa tolérance prédéfinie qu'on appelle couche critique, on a alors :

$$\{\Delta D(x)\}_{\min}^j = \text{MIN}(\Delta D^{(1)}(x), \Delta D^{(2)}(x), \dots, \Delta D^{(k)}(x), \dots) = \{\Delta D(x)\}^j \alpha_1(x)$$

avec : $\alpha_1(x) = \text{MIN}(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_k(x), \dots)$ le facteur d'événement d'un segment de poutre.

Ce qui permet d'affirmer que, si k' est la couche critique ($\alpha_1(x) = \alpha_{k'}(x)$), alors pour $k \neq k'$, on a :

$$\alpha_1(x) \Delta \sigma_{k \neq k'}^j(x) = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_{k \neq k'}(x)} (\sigma_y + \Delta \sigma^{\text{tolérance}} - \sigma_k^{j-1})$$

Comme par définition on a : $\frac{\alpha_{k'}(x)}{\alpha_{k \neq k'}(x)} < 1$, on vérifie : $\alpha_{k'}(x) \Delta \sigma_{k \neq k'}^j(x) < (\sigma_y + \Delta \sigma^{\text{tolérance}} - \sigma_k^{j-1})$,

Le champ de forces $\{\Delta D(x)\}_{\min}^j$ correspond à un champ de forces nodales tel que :

$$\{\Delta D(x)\}_{\min}^j = [b(x)] \alpha_1(x) \{\Delta Q\}^j = [b(x)] \{\Delta Q_1\}^j$$

La généralisation de la méthode à l'ensemble des segments d'abscisses (x_1, x_2, x_3, \dots) de l'élément fini poutre, permet de calculer un champ de forces nodales minimal $\{\Delta Q\}_{\min}^j$ qui correspond à un comportement linéaire de l'élément dans les tolérances prédéfinies tel que :

$$\{\Delta Q\}_{\min}^j = \{\Delta Q\}^j \text{MIN}(\alpha_1(x_1), \alpha_1(x_2), \alpha_1(x_3), \dots)$$

avec : $\alpha^e = \text{MIN}(\alpha_1(x_1), \alpha_1(x_2), \alpha_1(x_3), \dots)$ le facteur d'événement élémentaire.

Finalement, il existe un incrément de déplacement ajusté $\alpha^e \{\Delta U^e\}^j$ tel que le comportement de l'élément fini reste assimilable à un comportement linéaire tel que :

$$\alpha^e \{\Delta q\}^j = \left[(F_{lex}^e) \right]^{j-1} \alpha^e \{\Delta Q\}^j = [R][P] \alpha^e \{\Delta U^e\}^j$$

3. ÉTUDE DES POUTRES EN BÉTON ARMÉ

Dans le règlement BAEL [22], on n'envisage pas la possibilité de véritable calcul en plasticité avec redistribution complète des efforts. Le comportement des structures n'est pas parfaitement plastique, les ruptures se produisent donc dès que les déformations atteignent certaines valeurs limites appelées pivots définissant les états limites ultimes des déformations qu'on désigne par ELU (Fig. 4). Ainsi on se base d'une part sur la théorie de l'élasticité (RDM) pour le calcul des efforts ce qui reste valable dans le calcul non linéaire par élément fini multicouche à chaque itération, d'autre part sur la plasticité pour la détermination de la résistance des sections autrement dit en augmentant les sollicitations jusqu'à l'épuisement et la rupture des sections critiques ou déterminantes. Les efforts peuvent être considérablement redistribués par rapport à l'analyse élastique.

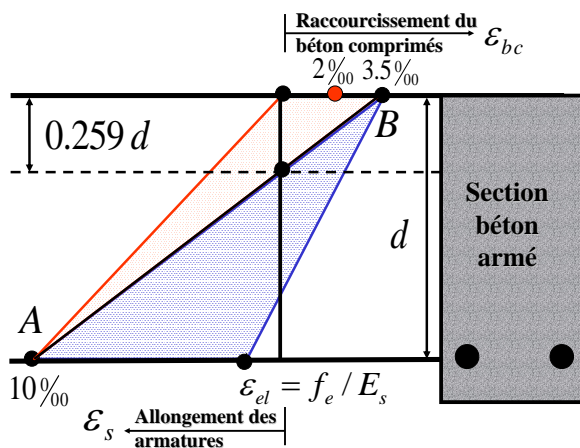


Figure 4 : Déformations dans une section droite en béton armé

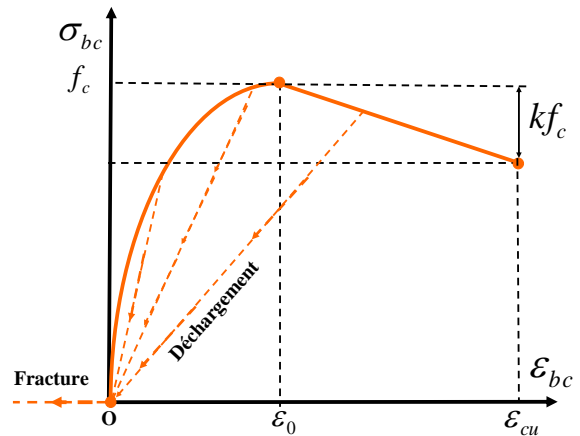


Figure 5 : Modèle de comportement du béton

Figure 4 : Pivots ou états limites ultimes de déformations dans les structures en béton armé (BAEL 91): pivot A (rupture par épuisement des armatures tendues : la déformation dans les armatures tendues ε_s dépasse 0.01) et pivot B (rupture par écrasement du béton comprimé : la déformation dans la fibre béton la plus comprimée ε_{bc} dépasse 0.0035), f_e : la contrainte de plastification des armatures, E_s le module d'élasticité des armatures.

Figure 5 : Modèle du béton comprimé de Hognestad à déchargement élastique,

d : la hauteur utile de la section béton armé (Fig. 4), f_c : la résistance maximal à la compression, ε_c : la déformation ultime du béton comprimé, ε_0 : la déformation de plastification du béton comprimé.

Le principe de la redistribution peut être schématisé par le fait que les couches les moins sollicitées viennent en secours des couches les plus sollicitées selon les mêmes conditions et hypothèses citées dans (2.). Le processus de redistribution se poursuit jusqu'à atteindre l'un des deux états limites prédéfinis ; suite à quoi il y a formation de la rotule plastique qui équilibre toujours un moment fléchissant. La ruine se produit lors de l'apparition de la rotule mécanique où il y aura déformation de la section à moment constant.

Hypothèses :

Pour les exemples traités plus loin, les hypothèses associées aux modèles analytique de validation et numérique sont:

- 1- Structures étudiées: deux poutres sur appuis simples, de section rectangulaire, avec chargement uniformément réparti (Fig. 13) et ponctuel (Fig. 8), afin d'isoler la position de l'occurrence de la rupture au centre des poutres,
- 2- Ferrailages des poutres sans prise en compte des aciers de compression,
- 3- Modèle de comportement élastique parfaitement plastique pour les armatures, dont l'allongement est limité à 10‰ en traction (Fig. 8),
- 4- Le modèle analytique du béton comprimé adopté pour la validation est le modèle parabole rectangle obtenu à partir du modèle de Hognestad (Fig. 5) [24] en prenant $k = 0$, $\varepsilon_0 = 2‰$ et $\varepsilon_{cu} = 3,5‰$ à l'état limite ultime (ELU) [22] tel que,

$$\sigma_{bc}(\varepsilon_{bc}) = f_c \left(\frac{2\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \text{ si } 0 \leq \varepsilon_{bc} \leq \varepsilon_0 \quad (1)$$

$$\sigma_{bc}(\varepsilon_{bc}) = f_c \left(1 - \frac{k(\varepsilon_{bc} - \varepsilon_0)}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0} \right) \text{ si } \varepsilon_0 < \varepsilon_{bc} \leq \varepsilon_{cu} \quad (2)$$

La modélisation numérique du béton comprimé en chaque couche de l'élément fini est réalisée à l'aide du modèle élastique à fissuration progressive (Elastic-fracturing model) avec possibilité de déchargement. En effet, malgré la nature du chargement croissant monotone des poutres et par suite en chaque section, la discrétisation multicouche fait que des couches comprimées se déchargent et se fracturent (Fig. 5) lorsque l'axe neutre évolue dans la zone comprimée qui se réduit. Le raccourcissement des couches de béton comprimé est donc limité à $\varepsilon_{cu} = 3,5‰$.

- 5- La contribution du béton tendu dans le modèle analytique est négligé par conséquent, elle l'est aussi dans le modèle numérique,
- 6- La formulation du modèle analytique de validation est basée sur la définition de trois états déterminants du comportement non linéaire du béton armé en flexion pour une section rectangulaire à une nappe d'armature de traction (Fig. 6,7): plastification du béton comprimé, plastification des armatures tendues et état de rupture,
- 7- Le mode de comportement non linéaire de l'élément fini multicouche vis-à-vis du cisaillement [4][5][6][7] et vis-à-vis du glissement d'adhérence des armatures d'acier [4][5][6][7] sont désactivés : seul le mode de flexion non linéaire de l'élément fini est activé.

3.1 Formulation du modèle analytique trilinéaire

Dans le modèle trilinéaire (Fig. 6, 7), on définit 3 états déterminants entre lesquels le comportement est considéré comme linéaire. Ainsi, il est possible d'approcher analytiquement le comportement d'une poutre en béton armé. Le modèle permet d'établir la loi moment-courbures ($M - \kappa$) et la distribution des courbures le long de la poutre par la connaissance de 3 états : l'état de plastification des armatures d'acier en traction, l'état de plastification du béton comprimé et l'état de rupture.

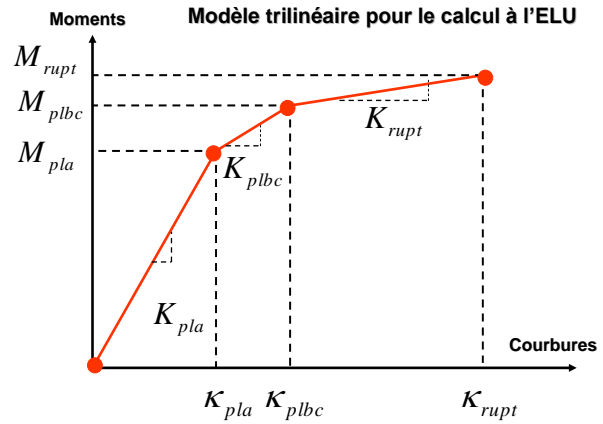
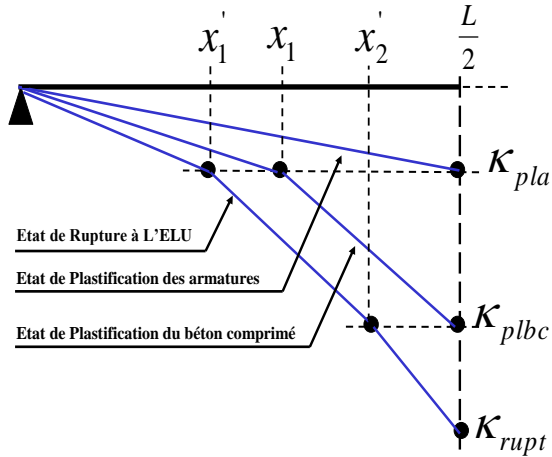


Figure 6 Modèle d'évolution de la courbure dans une poutre **Figure 7** Modèle trilinéaire moment-courbure

Figure 6 : Distribution trilinéaire de la courbure dans la structure.

Figure 7 : Diagramme moment-courbure trilinéaire ($M - \kappa$) dans une section pour le modèle analytique de validation.

La résultante des forces dans le béton comprimé pour une section rectangulaire de largeur b est :

$$F_{bc} = \int_0^{y^*} b(y) \sigma_{bc}(y) dy \text{ tel que :}$$

$$F_{bc} = bf_c \frac{y^{*2}}{y_0} \left(1 - \frac{y^*}{3y_0} \right) \text{ si } y^* < y_0 \text{ (ou } \varepsilon_{bc} < \varepsilon_0 \text{) (parabole partielle) avec : } y_0 \text{ la distance de l'axe}$$

neutre à la fibre de béton correspondante à la déformation $\varepsilon_0 = 2\text{‰}$, y^* la distance de l'axe neutre à la fibre de béton comprimée extrême de déformation ε_{bc} tel que :

$$\frac{\varepsilon_{bc}}{y^*} = \frac{\varepsilon_0}{y_0} \tag{3}$$

$$F_{bc} = \frac{2}{3} bf_c y_0 \text{ si } y^* = y_0 \text{ (ou } \varepsilon_{bc} = \varepsilon_0 \text{) (parabole complète),} \tag{4}$$

$$F_{bc} = bf_c \left(\frac{2}{3} y_0 + (y^* - y_0) \right) = bf_c \left(\frac{2}{3} y_0 + \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{bc}} \right) y^* \right) \text{ si } y_0 < y^* < y_{rupt} \text{ (ou } \varepsilon_0 < \varepsilon_{bc} < \varepsilon_{cu} \text{) (parabole rectangle partiel),} \tag{5}$$

$$F_{bc} = \frac{17}{21} bf_c y^* \text{ si } y^* = y_{rupt} \text{ (ou } \varepsilon_{bc} = \varepsilon_{cu} \text{) (parabole rectangle complet) avec } y_{rupt} = 1,75y_0 \tag{6}$$

La résultante des moments dans le béton comprimé est :

$$M_{bc} = \int_0^{y^*} b(y) \sigma_{bc}(y) y dy \text{ tel que :} \tag{7}$$

$$\text{si } y^* < y_0 \text{ (ou } \varepsilon_{bc} < \varepsilon_0 \text{) alors : } M_{bc} = bf_c \frac{y^{*3}}{y_0} \left(\frac{2}{3} - \frac{y^*}{4y_0} \right),$$

$$\text{si } y^* \geq y_0 \text{ (ou } \varepsilon_{bc} \geq \varepsilon_0 \text{) alors : } M_{bc} = \frac{1}{2} b f_c \left(y^{*2} - \frac{y_0^2}{6} \right).$$

3.1.1. État de plastification des armatures tendues

L'équilibre des forces dans les armatures plastifiées $F_s = A_s f_e$ et dans le béton comprimé F_{bc} permet de calculer l'axe neutre de plastification des armatures y_{pla} . En supposant que la plastification des aciers précède celle du béton comprimé, on procède par quelques itérations pour satisfaire l'équilibre des résultantes en commençant par l'état particulier de la plastification simultanée des armatures et du béton comprimé. Dans chaque itération, la condition de compatibilité des déformations dans la section

$$\text{doit être respectée tel que : } \frac{\varepsilon_s}{d - y_{pla}} = \frac{\varepsilon_{bc}}{y_{pla}} = \frac{\varepsilon_0}{y_0} \text{ (Fig. 4)}$$

La procédure de détermination de l'état de plastification des armatures se résume comme suit :

1] partant de l'état de plastification simultanée des armatures tendues $\varepsilon_s = f_e / E_s$ et du béton

$$\text{comprimé } \varepsilon_{bc} = \varepsilon_0 \text{ on calcul la valeur initiale } y^* = \frac{d}{1 + \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{bc}}} = d \left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{bc}} \right)^{-1},$$

2] pour une valeur donnée de y^* , calculer : $\varepsilon_{bc} = \frac{y^*}{d - y^*} \varepsilon_s$. En déduire $y_0 = y_{pla} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{bc}}$ et F_{bc} ,

3] si $F_{bc} > F_s$: diminuer y^* , si $F_{bc} < F_s$ augmenter y^* , réitérer (aller en 2/),

4] si $F_{bc} = F_s$ fin des calculs : $y^* = y_{pla}$.

La connaissance de l'axe neutre de plastification $y^* = y_{pla}$ permet d'obtenir :

$$\text{La courbure de plastification des armatures tendues de la section : } \kappa_{pla} = \frac{\varepsilon_s}{d - y_{pla}}.$$

$$\text{Le moment de plastification de la section : } M_{pl} = M_s + M_{bc} \text{ avec : } M_s = F_s (d - y_{pla}).$$

3.1.2. État de plastification du béton comprimé

L'état de plastification du béton comprimé se définit directement à partir de l'axe neutre y_{plbc} obtenu de l'équilibre des résultantes dans les sections. Dans ce cas, on adopte une parabole complète pour le béton comprimé tel que la déformation dans la fibre la plus comprimée atteint $\varepsilon_{bc} = \varepsilon_0$ en s'assurant que les armatures tendues sont plastifiées.

La courbure et le moment de plastification du béton comprimé de la section sont :

$$\kappa_{plbc} = \frac{\varepsilon_{bc}}{y_{plbc}} \text{ et } M_{pl} = M_s + M_{bc},$$

$$\text{avec : } M_s = F_s (d - y_{plbc}).$$

3.1.3. État de rupture

L'équilibre des résultantes permet toujours d'obtenir l'axe neutre à la rupture y_{rupt} en partant de l'état correspondant au pivot **B** (Fig. 4). Si l'équilibre n'est pas satisfait, alors on procède par un calcul itératif afin de satisfaire à l'équilibre entre les forces de traction dans les armatures $F_s = A_s f_e$ et la résultante des forces dans le béton comprimé et en respectant à chaque itération la condition de compatibilité des déformations dans la section $\frac{\varepsilon_s}{d - y_{rupt}} = \frac{\varepsilon_{bc}}{y_{rupt}} = \frac{\varepsilon_0}{y_0}$:

$$\boxed{1} \text{ calcul de la valeur de départ pour } y^* : y^* = \frac{F_s}{\frac{17}{21} b f_c} [28],$$

$\boxed{2}$ calculer $\alpha = \frac{y^*}{d}$ et vérifier les cas suivants:

Si $\alpha < \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{bc}} + 1 \right)^{-1}$ avec $\varepsilon_s = 10\text{‰}$ et $\varepsilon_{bc} = 3,5\text{‰}$ autrement dit si $\alpha \leq 0,259$, alors : rupture selon

le pivot **A** : $\varepsilon_s = 10\text{‰}$ et $\varepsilon_{bc} = \varepsilon_s \frac{y^*}{d - y^*}$,

Si $\alpha > 0,259$, alors : rupture selon le pivot **B** : $\varepsilon_{bc} = 3,5\text{‰}$ et $\varepsilon_s = \varepsilon_{bc} \frac{d - y^*}{y^*}$. Ensuite, calculer

$y_0 = y^* \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{bc}}$ et en déduire la résultante F_{bc} en fonction de ε_{bc} et F_s en fonction de ε_s ,

$\boxed{3}$ si $F_{bc} > F_s$: diminuer y^* , si $F_{bc} < F_s$ augmenter y^* , réitérer [aller en $\boxed{2}$],

$\boxed{4}$ si $F_{bc} = F_s$ fin des calculs : $y^* = y_{rupt}$.

La courbure et le moment résistant de la section à la rupture sont :

$$\kappa_{rupt} = \frac{\varepsilon_{bc}}{y_{rupt}} \text{ et } M_{rupt} = M_s + M_{bc}.$$

3.2 Rupture d'une poutre par épaissement des armatures tendues – Pivot A

La poutre est discrétisée en 50 éléments finis multicouches à 2 segments chacun et à 80 couches (Fig. 8). Les résultats numériques semi-locaux tel que la courbure κ et locaux tel que les déformations ε au droit de la charge **P** sont calculés au centre du segment à gauche ou à droite de celle-ci, soit à 2,5 cm du point d'application effectif de la charge extérieure. La tolérance du calcul numérique $\Delta\sigma^{tolérance}$ pour les matériaux constitutif est de 10^{-2} .

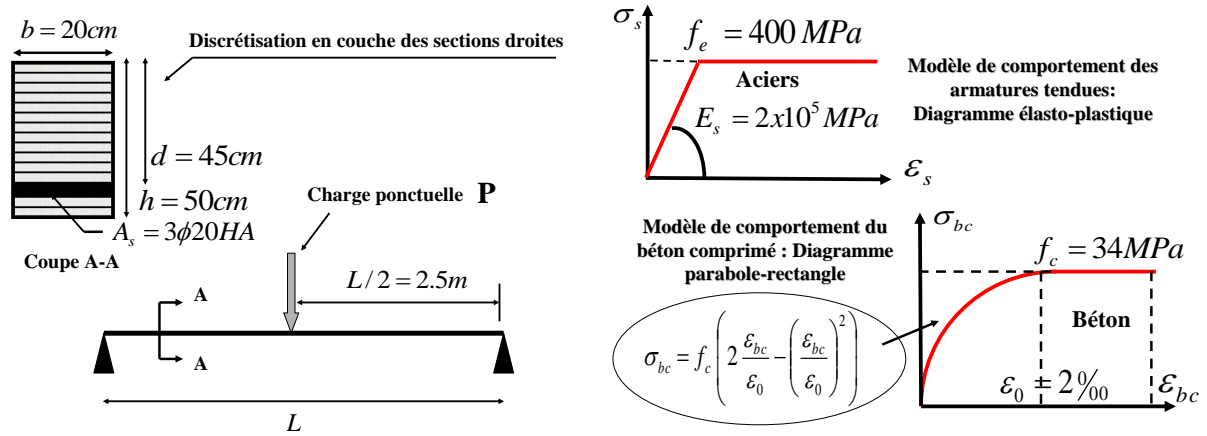


Figure 8 : Dimensions de la structure, discrétisation multicouche et modélisation des matériaux béton et acier

La rupture de la poutre s’effectue selon le pivot A (Fig. 4): par épuisement des armatures tendues.

Etat de la section médiane		M (kNm)	P (kN)	κ ($10^{-3} m^{-1}$)	ϵ_{bc} ‰	ϵ_s ‰	x (m)
Plastification des aciers tendus	Analytique	150.890	120.712	6.4923	0.9215	2.0	0.1419
	Numérique	152.130	121.700	6.4992	0.9077	1.9977	0.1397
	δ (%)	0.815	0.811	0.106	1.497	0.115	1.550
Plastification du béton comprimé	Analytique	157.815	126.252	24.062	2.0	8.828	0.08311
	Numérique	155.10	124.080	23.939	1.9941	9.208	0.0810
	δ (%)	1.720	1.720	0.511	0.295	4.126	2.538
Rupture	Analytique	158.073	126.458	27.027	2.162	10.0	0.0800
	Numérique	159.630	127.700	26.885	2.090	9.9286	0.0815
	δ (%)	0.975	0.972	0.525	3.330	0.714	1.840

Tableau 1 Corrélation entre les résultats numériques et analytiques au droit de la charge P (δ l'écart relatif)

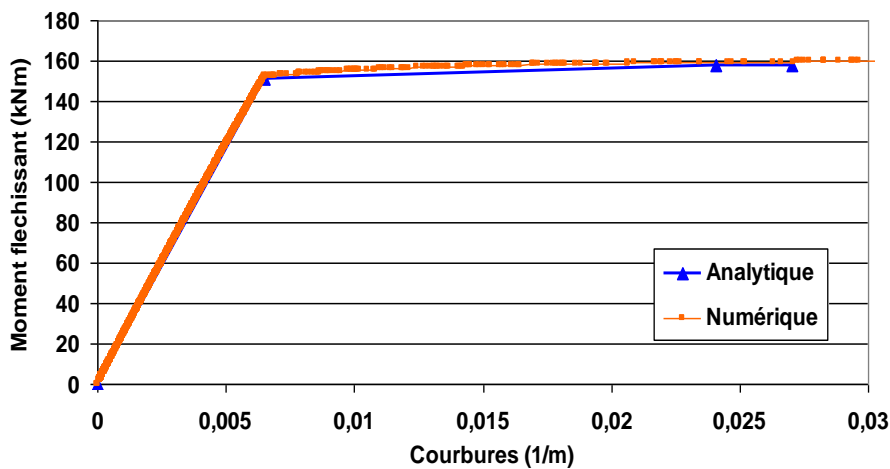


Figure 9 : Diagrammes moments-couures ($M - \kappa$) au droit de la charge P

Le comportement global de la poutre (Fig. 9) est fortement conditionné par celui des armatures tendues dont le comportement est élastique parfaitement plastique sur une couche en acier.

La redistribution des non linéarités peut être déterminée par l'évolution de la courbure dans la structure à travers la connaissance de la position des sections ayant atteint l'un des états particuliers (M_{pla}, κ_{pla}) , $(M_{plbc}, \kappa_{plbc})$ et $(M_{rupt}, \kappa_{rupt})$ où la courbure est connue à partir de la loi moment-courbures $(M - \kappa)$ de la section médiane. Pour un chargement ponctuel donné \mathbf{P} , connaissant le diagramme des moments en tout point de la poutre, la position de ces sections (Fig. 6) sont déduites à l'état de plastification du béton comprimé et des armatures tendues par :

$$x_1 = \frac{M_{pla}}{M_{plbc}} \left(\frac{L}{2} \right), \quad x_1' = \frac{M_{pla}}{M_{rupt}} \left(\frac{L}{2} \right) \quad \text{et} \quad x_2' = \frac{M_{plbc}}{M_{rupt}} \left(\frac{L}{2} \right)$$

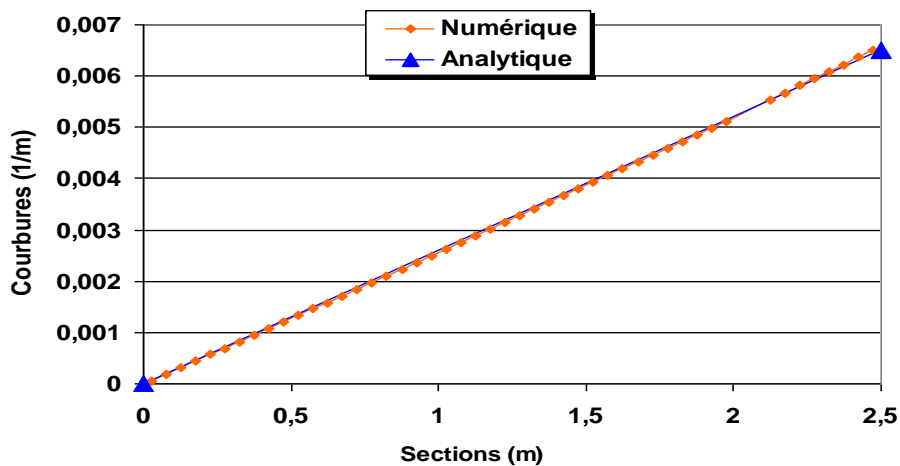


Figure 10 : Distribution de la courbure κ le long de la poutre à l'état de plastification des armatures tendues au niveau de la section médiane en $x=2,5\text{m}$

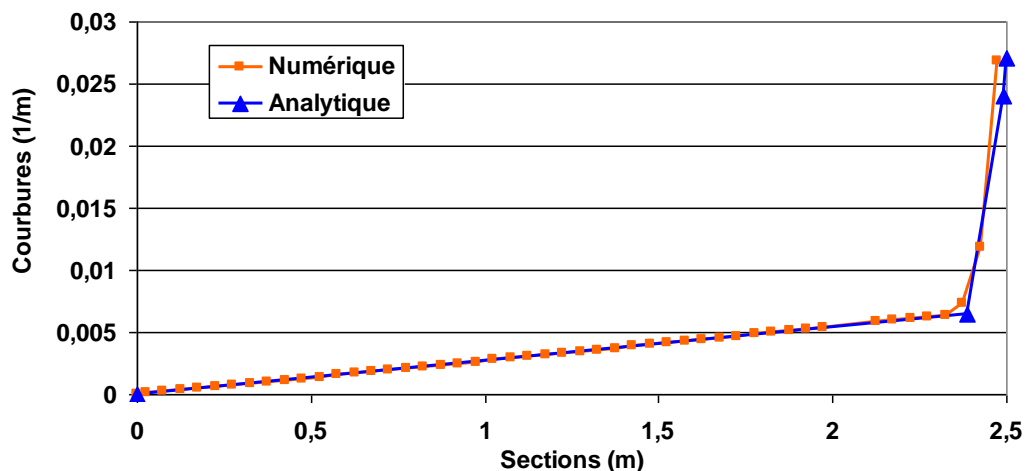


Figure 11 : Distribution de la courbure κ le long de la de la poutre à l'état de rupture au niveau de la section médiane en $x=2,5\text{m}$

L'approximation polygonale du diagramme des contraintes et des déformations du béton comprimé ($\sigma_{bc} - \varepsilon_{bc}$) est réalisée à l'aide de 8 segments de droites seulement correspondant aux déformations 0.1 ‰, 0.2 ‰, 0.4 ‰, 0.8 ‰, 1 ‰, 1.4 ‰, 1.6 ‰ et 2 ‰.

Le diagramme des contraintes montre que le béton comprimé n'a presque plus évolué. Cet instant correspond à l'écoulement par déformations des armatures tendues (Fig. 12).

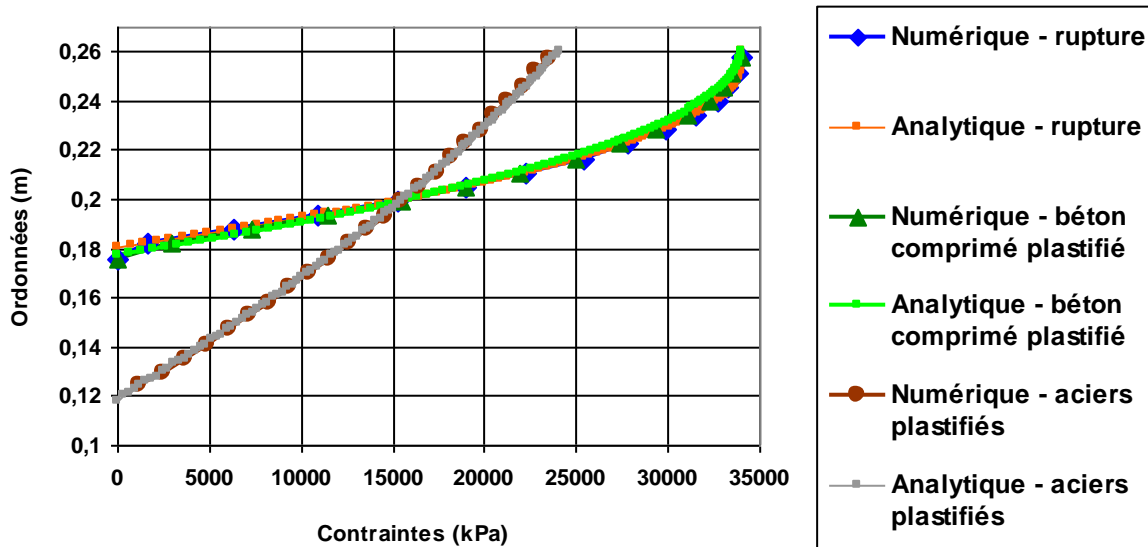


Figure 12 : Diagrammes de contraintes du béton comprimé $\sigma_{bc}(x)$ dans la section médiane ($x=2,5m$) pour les 3 états déterminants par rapport à l'axe de référence de calcul. (la hauteur de la zone comprimée de référence est égale à 0,2603m)

3.3 Rupture d'une poutre par écrasement du béton comprimé - Pivot B

La structure est une poutre dimensionnée à l'état limite ultime (ELU) [28] pour un chargement uniformément réparti ultime $p_u = 42,675kN/m$. Le moment de dimensionnement à l'ELU est $M_u = 0,342MNm$. La section d'acier théorique obtenue est égale à $A_s = 21,10cm^2$. Les dispositions constructives consistent en un ferrailage de la section médiane en 3 nappes de $(2HA16+1HA20)$ arrêtées à deux reprises en tenant compte du décalage $\pm 0,8h$ de l'épure des arrêts des barres. La structure est discrétisée en 54 éléments finis multicouches de 3 segments équidistants de 80 couches en béton (Fig. 13). Les tolérances du calcul numérique $\Delta\sigma^{tolérance}$ sont respectivement 10^{-3} pour le béton et 10^{-2} pour les armatures. La résistance maximal du béton est $f_c = 14,166MPa$ et celle des armatures est égale à $f_e = 347,826MPa$ avec un module élastique $E_s = 2.10^5 MPa$. Le calcul analytique est conduit dans les trois sections pour l'établissement de la loi moment-

courbure $(M - \kappa)$ (Fig. 15) avec une nappe équivalente $d_{s,eq} = \left(\frac{\sum_{i=\text{nombre denappes}} A_{s,i} d_i}{\sum_{i=\text{nombre denappes}} A_{s,i}} \right)$ tel que

$A_{s,i} = 7,16cm^2$ (Fig. 14). L'état de plastification extrait de la simulation correspond à la plastification de la deuxième nappe d'armatures.

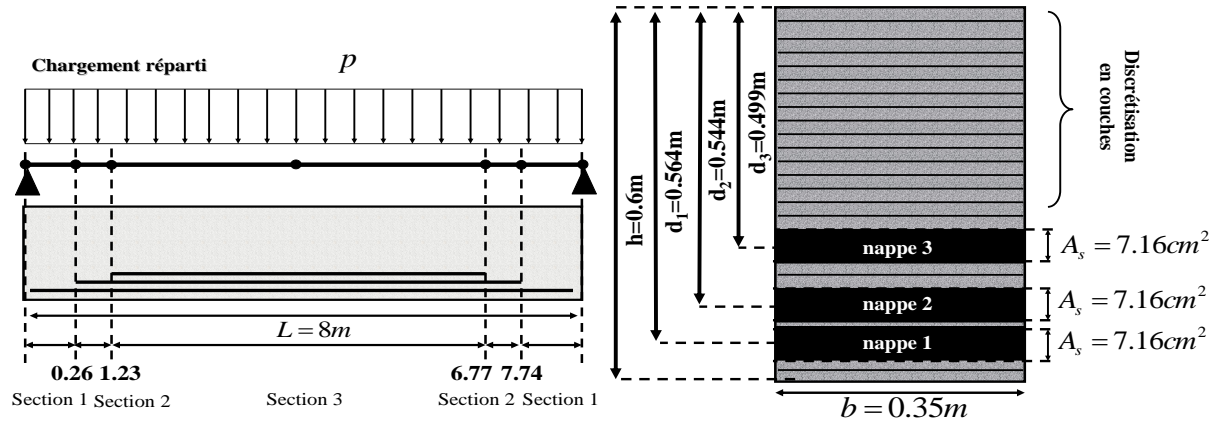


Figure 13 : Dimensions, maillage et arrêt des barres de la poutre Figure 14 : Section en béton armé à 3 nappes

Etat de la section médiane		M (kNm)	p (kN/m)	κ ($10^{-3} m^{-1}$)	ϵ_{bc} (‰)	ϵ_s (‰)	x (m)
Plastification des armatures tendues	Analytique	332.725	41.590	6.9234	1.708	2.000	0.2468
	Numérique	329.170 ($\delta=1.06\%$)	41.146	6.797 ($\delta=1.82\%$)	1.683	(i=3) 1.6922	0.2508 ($\delta=1.59\%$)
						(i=2) 1.9981	
(i=1) 2.1340							
Plastification du béton comprimé	Analytique	336.882	42.110	8.8486	2.000	2.7398	0.2260
	Numérique	336.010 ($\delta=0.25\%$)	42.012	8.813 ($\delta=0.40\%$)	2.000	(i=3) 2.3765	0.2315 ($\delta=2.37\%$)
						(i=2) 2.7731	
(i=1) 2.9494							
Rupture à l'ELU	Analytique	342.359	42.794	18.8034	3.500	6.5723	0.1861
	Numérique	342.250 ($\delta=0.03\%$)	42.781	18.951 ($\delta=0.77\%$)	3.506	(i=3) 5.904	0.1881 ($\delta=1.06\%$)
						(i=2) 6.757	
(i=1) 7.136							

Tableau 2 Etats déterminants du comportement non linéaire de la poutre (δ l'écart relatif et i le numéro d'une nappe d'armatures)

La redistribution des non linéarités est déterminée comme précédemment par l'évolution de la courbure dans la structure. L'évolution de la courbure se détermine par la connaissance de la position des sections ayant atteint l'un des états particuliers où la courbure est connue a priori et aux points de discontinuité relatifs aux arrêts des barres à partir de la loi moment-courbures ($M - \kappa$) des sections correspondants aux trois types de ferrailage.

Pour un chargement réparti donné p , le diagramme du moment fléchissant en tout point de la poutre est connu, par conséquent il est possible de déterminer la position de ces sections (Fig. 6) à l'état de plastification du béton comprimé et à l'état de plastification des armatures tendues par :

$$x_1 = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_{pla}}{M_{plbc}}} \right), \quad x_1' = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_{pla}}{M_{rupt}}} \right) \text{ et } x_2' = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_{plbc}}{M_{rupt}}} \right)$$

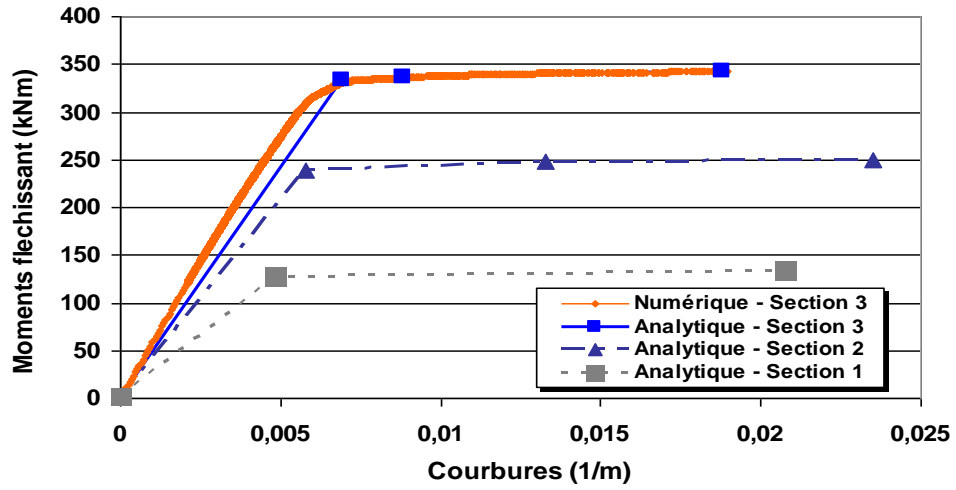


Figure 15 : Diagrammes moment-courbure ($M - \kappa$) pour les 3 sections béton armé de la poutre

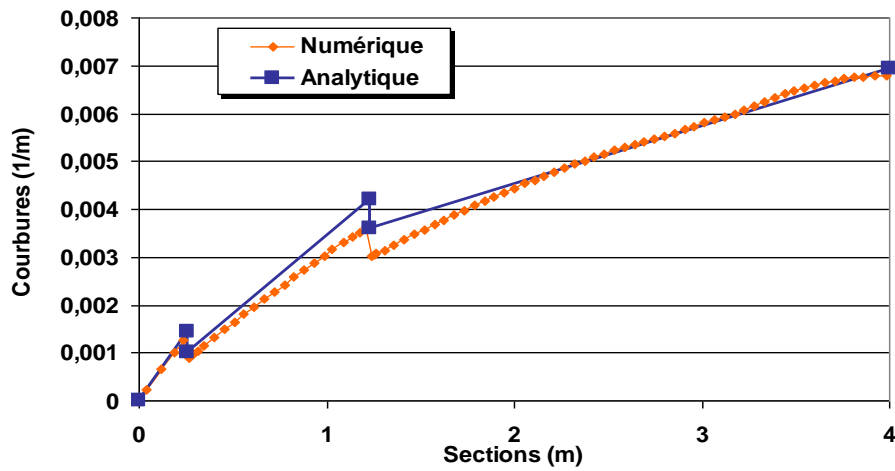


Figure 16 : Distribution de la courbure κ le long de la poutre à l'état de plastification des armatures tendues au niveau de la section médiane en $x=4,0m$

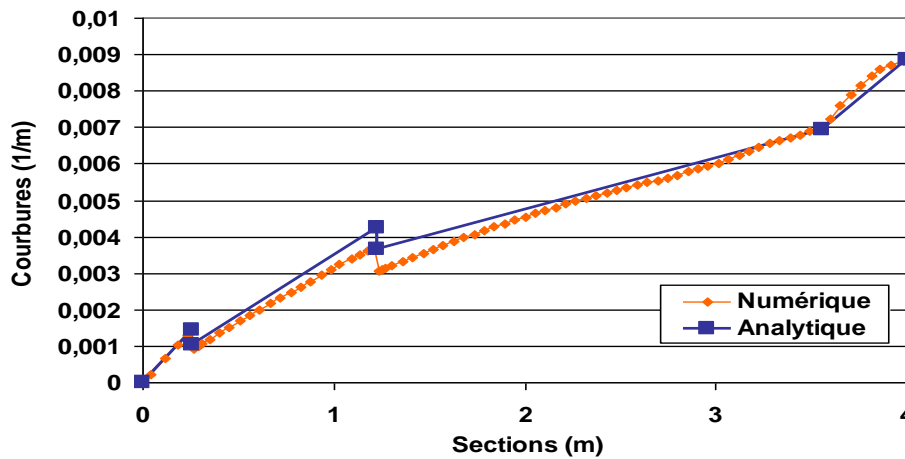


Figure 17 : Distribution de la courbure κ le long de la poutre à l'état de plastification du béton comprimé au niveau de la section médiane en $x=4,0\text{m}$

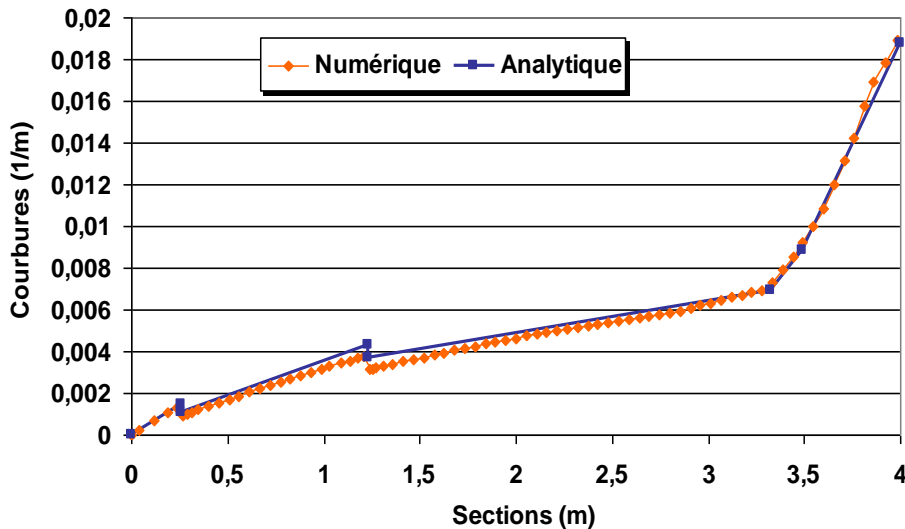


Figure 18 : Distribution de la courbure κ le long de la poutre à l'état de rupture par écrasement du béton comprimé au niveau de la section médiane en $x=4,0\text{m}$

Les sections 1 et 2 n'atteindront pas la plastification de leurs armatures tendues du fait que le moment de flexion sollicitant est faible, ainsi leurs diagrammes ($M - \kappa$) (Fig. 15) n'est pas totalement exploité dans la détermination de l'évolution de κ . La connaissance de k_{pla} est alors suffisante. On remarque aussi que l'évolution de la courbure aux voisinages de la section médiane, à la rupture, présente une allure parabolique contrairement à la première poutre, indiquant l'influence du comportement du béton comprimé par rapport au comportement des aciers sur le comportement global de la structure.

La qualité des diagrammes de contraintes obtenus par simulation numérique (Fig. 19), comparés au diagramme analytique, dépend étroitement de l'approximation polygonale prise pour les modèles de

comportements locaux. Dans le cas de cette poutre, l'approximation polygonale du diagramme $(\sigma_{bc} - \varepsilon_{bc})$ est réalisée à l'aide de 4 segments de droites seulement correspondant aux déformations 0.5 ‰, 0.8 ‰, 1.3 ‰ et 2 ‰.

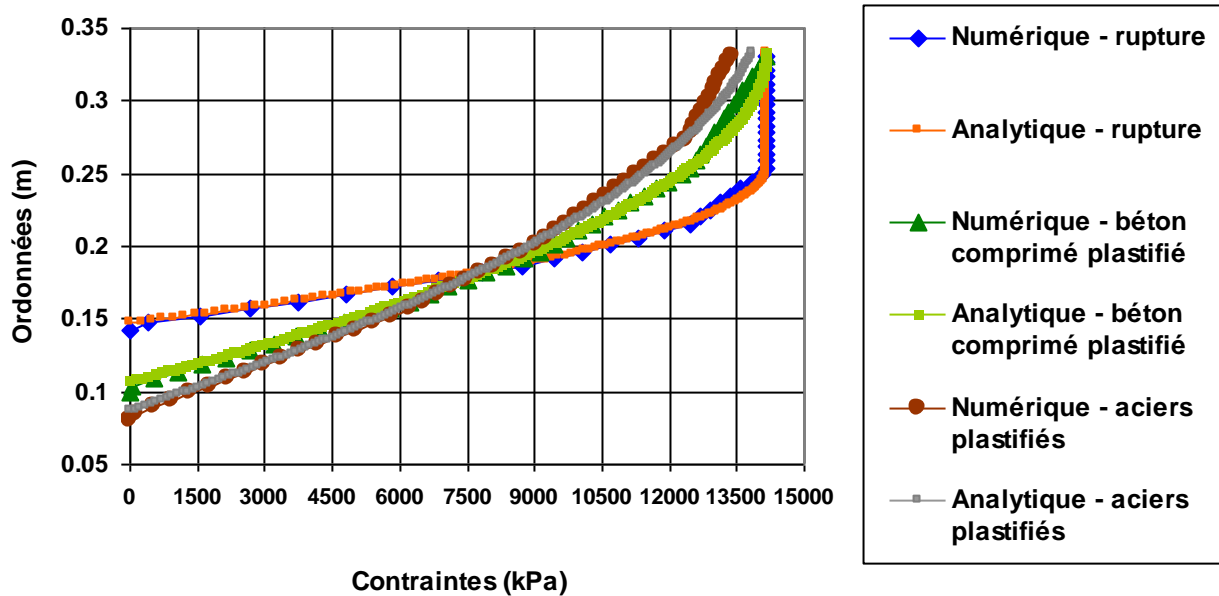


Figure 19 : Diagrammes de contraintes du béton comprimé $\sigma_{bc}(x)$ dans la section médiane pour les 3 états déterminants par rapport à l'axe de référence de calcul. (la hauteur de la zone comprimée de référence dans la section droite en béton armé est égale à 0,3333m)

4. CONCLUSION

Un élément fini multicouche est présenté et validé vis-à-vis du chargement statique monotone croissant à la ruine des structures en béton armé. Les résultats obtenus par le modèle sont très satisfaisants pour la simulation du comportement non linéaire jusqu'à la ruine. L'élément fini, par sa conception en couches et en segments, permet aussi le suivi des distributions des non linéarités constitutives dans le sens transversal (diagrammes des contraintes, déformations, évolution de l'axe neutre, diagrammes moment-courbure) et longitudinal (distribution des courbures) en tenant compte des dispositions constructives dans les structures en béton armé ainsi que des lois de comportement des matériaux acier et béton.

Le modèle peut être utilisé pour la vérification et le dimensionnement des structures aux états limites ultimes de déformation conformément aux règlements de constructions en béton armé. L'élément fini permettra aussi d'analyser des structures plus importantes en béton armé sous chargement statique monotone croissant à la ruine avec un suivi systématique des non linéarités. Le présent modèle peut être aussi utilisé exploité dans l'établissement des courbes de vulnérabilité (ou de fragilité) des bâtiments existants sous chargement sismique par le suivi systématique du développement des dommages que peuvent subir les structures.

RÉFÉRENCES

1. Absi E. “Grandes déformations et instabilité des structures : Critères d’instabilité”, Annales de l’Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics (ITBTP), Série : théories et méthodes de calcul 332, N°509, Décembre, 1992.
2. Allahabadi R., Powell G.H. “DRAIN-2DX user guide”, Report No. UCB/EERC-88/06, Earthquake Engineering Research Ctr., University of California, Berkeley, California, USA 1988.
3. Bazant Z.P., Kim S.S. “Plastic-Fracturing Theory of Concrete”, Journal of the Engineering Mechanics Division, p. 407-428, June 1979.
4. Belmouden Y. “Analyse par éléments finis multicouches des performances non linéaires des structures en béton armé vis-à-vis des secousses sismiques”, Thèse de Doctorat, Université Mohammed V, N°2163, 2003.
5. Belmouden Y., Elharif A. “Modélisation semi-locale des parois porteuses en béton armé par élément fini multicouche”, 6^{ème} Congrès de Mécanique, Société Marocaine des Sciences Mécaniques, Tanger, 15-18 Avril, 2003.
6. Belmouden Y., Elharif A. “Modélisation numérique de la tenue aux séismes des parois porteuses en béton armé par élément fini multicouche”, Bulletins du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), Numéro 242, pp. 49-65, Janvier-Février, 2003.
7. Belmouden Y., Elharif A. “Modélisation des murs porteurs en béton armé par éléments finis multicouches”, Revue Européenne des Eléments Finis (REEF), Vol. 12, pp. 907-932, Editions Lavoisier, Août, 2003.
8. Coleman and Enrico Spacone “Localization Issues in Force-Based Elements”, Journal of Structural Engineering, Vol. 127 No. 11, p. 1257-1265, November 2001.
9. Guedes J., Pégon P., Pinto A., “A fiber Timoshenko beam element in CASTEM 2000”, special publication Nr. I.94.31, JRC, I-21020 Ispra, Italy, 1994.
10. Kotronis P., Mazars J., Davenne L., “The equivalent reinforced concrete model for simulating the behavior of shear walls under dynamic loading”, Engineering Fracture Mechanics, issues 7-8, pp 1085-1097, 2003.
11. La borderie C. “Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable: Modélisation et application à l’analyse de structures en béton”, Thèse de Doctorat de l’Université Paris 6, Laboratoire de Mécanique et Technologie, ENS de Cachan, Mai 1991.
12. Lago A., Combescure D., “Numerical analysis of CAMUS III using a fiber model: Non linear pushover and dynamic analysis”, Rapports DMT SEMT/EMSI/RT/ 98-054 A, CEA Saclay, 1998.
13. Mahasuverachai M., Powell G.H. “Inelastic analysis of piping and tubular structures”, EERC Report 82/27, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1982.
14. Martino R., Spacone E., Kingsley G. “Non linear pushover analysis of RC structures”, Advanced Technology in Structural Engineering, M. ElGahy, ed. (CD-ROM), ASCE, Reston, Va, 2000.
15. Mazars, J., “French advanced research on structural walls: An overview on recent seismic programs”, Proceedings of the 11th European Conference on Earthquake Engineering, Invited Lectures, Paris, CD-ROM, 1998.
16. Mazars J., Kotronis P., Davenne L., “A new modelling strategy for the behaviour of shear walls under dynamic loading”, Earthquake Engineering and Structural dynamics, volume 31, issue 4, pp. 937-954, 2002.
17. Mazars J., Colombo A., Kotronis P., Ile N., Casaux G., Ragueneau F., Fischinger M., Marusic D., “Numerical modelling for earthquake engineering: the case of lightly RC structural walls”, Keynote paper, Proc. EURO-C 2003, Computational modelling of Concrete structures, eds. N. Bicanic, R. de Borst, H. Mang & G. Meschke, pp. 869-880, St. Johann im Pongau, Austria, 17-20 March, 2003.
18. Merabet O. “Modélisation des structures planes en béton sous chargement monotone et cyclique – Construction et validation d’un modèle numérique”, Thèse de Doctorat de l’INSA de Lyon, 1990.
19. Mestat P., Humbert P. “Référentiel de tests pour la vérification de la programmation des lois de comportement dans les logiciels d’éléments finis”, Bulletin du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées 230, LCPC, Réf. 4349, pp. 23-38, Janvier-Février 2001.
20. Monti G., Spacone E. “Reinforced Concrete Fiber Beam Column Element with Bond Slip”, Journal of Structural Engineering, Vol. 126 No. 6, pp. 654-661, June 2000.
21. Neuenhofer A., Filippou F.C. “Evaluation of Non-linear Frame Finite-Element Models”, Journal of Structural Engineering, Vol. 123 No. 7, pp. 958-966, July 1997.
22. Perchat J., Roux J., “Pratique de B.A.E.L. 91”, Editions Eyrolles, 1993.

23. Ragueneau F., La Borderie Ch., and Mazars J., “ Damage Model for Concrete Like Materials Coupling Cracking and Friction, Contribution towards Structural Damping: First Uniaxial Application”, *Mechanics Cohesive Frictional Materials*, Vol. 5, pp. 607-625, 2000.
24. Saenz L.P. “ Equation for stress-strain curve of concrete ”, *Journal of the American Concrete*, 61, pp. 1229-1235, 1964.
25. Shahrokh G., Jacky M. “ Recherche et génie parasismique : Stratégie de calcul simplifiés pour l’analyse du comportement des structures en BA : le code EfiCoS ”, *Revue française du génie civil*, Vol 2-n°1/1998.
26. Spacone E., Filippou F.C., Taucer F.F. “ Fiber beam column model for non linear analysis of RC frames: Formulation ”, *Earthquake Engrg. Struct., Dyn.*, 25, pp. 711-725, 1996.
27. Taucer F.F., Spacone E., Filippou F.C. “ A fiber beam-column element for seismic response analysis of RC structures ”, Report N°UCB/EERC-91/17, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, December 1991.
28. Thonier H. “ Le projet de béton armé ”, 4^{ème} Edition SEBTP, 1995.
29. Zeris, C.A., Mahin S.A. “ Behavior of reinforced concrete structures subjected to biaxial excitation ”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 117 (ST9), pp. 2657-2673.