

Détermination du champ de contrainte et du facteur d'intensité de contrainte en tridimensionnel par l'utilisation de la fonction de Green dans la méthode de discontinuité de déplacement

B.K.Hachi

Laboratoire Génie Mécanique et Développement,
Département de génie mécanique, Ecole National Polytechnique,
10 Avenue Hassen Badi El-Harrach Alger.

Y.Belkacemi

Laboratoire Génie Mécanique et Développement,
Département de génie mécanique, Ecole National Polytechnique,
10 Avenue Hassen Badi El-Harrach Alger.

S. Rechak

Laboratoire Génie Mécanique et Développement,
Département de génie mécanique, Ecole National Polytechnique,
10 Avenue Hassen Badi El-Harrach Alger.

Résumé

Ce travail porte sur la modélisation des milieux tridimensionnels, homogènes, isotropes et linéairement élastiques par la méthode des discontinuités de déplacement. On effectue tout d'abord, la construction de la formulation mathématique de la méthode en 3-D en utilisant la fonction de Green, puis la mise en forme de la procédure numérique et enfin l'élaboration d'un code de calcul. Ce code peut déterminer le champ de contraintes et le champ de déplacements pour les milieux tridimensionnels, ainsi que le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour les problèmes de fissuration en trois dimensions.

Abstract

This work consists of studying the three-dimensional homogeneous isotropic bodies in linear elasticity with the displacement discontinuity method. First, we establish the mathematical formulation of the method in 3D by using the Green's function. Next, we built the numerical procedure, and construction of the computer program. This program allows so to determine the stresses and the displacements for the 3D bodies and to compute the stress intensity factors for the crack problems.

Key words: Displacement discontinuity method, Green's function, stress analysis, crack, stress intensity factor.

1. INTRODUCTION

La méthode de discontinuité de déplacement (M.D.D) a été introduite initialement par les travaux de Crouch [1] en (1976) et Panasyuk et al.[2] en (1977) dans le but de déterminer les champs de contraintes et de déplacements en 2D. L'utilisation de la M.D.D, pour résoudre les problèmes liés à la mécanique de la rupture, n'a été commencée que par Crouch en (1983), mais reste limitée aux

domaines bidimensionnels. La majorité des travaux qui ont suivi cette contribution ne concernent que le développement des éléments de discrétisation avec différents types et différents ordres [3], [4] et [5], tout en restant en 2D.

Les travaux dans [6] constituent la première publication concernant l'application de la méthode de discontinuité de déplacement pour déterminer les champs de contraintes et de déplacements en 3D, sans franchir l'étude des problèmes de fissuration.

Le présent travail prend sa source dans cet article et représente une contribution différente pour l'application de la méthode de discontinuité de déplacement en analyse de contraintes en 3D, particulièrement en mécanique de la rupture.

Cette investigation rassemble un lourd travail analytique concernant une étude sur les fonctions de Green ; leurs intégrations analytiques et leurs valeurs limites tout en traitant les différents problèmes de singularité. Wiles et al. ont utilisé, en revanche, dans le développement de la formulation de la méthode, une intégration numérique, sans la moindre indication sur les techniques utilisées dans le traitement des problèmes de singularités des fonctions de Green, qui représente un même degré d'importance que la formulation elle-même.

Les applications traitées dans cette étude concernent l'analyse de contraintes pour des milieux tridimensionnels continus, et le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour des milieux tridimensionnels fissurés.

2. DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT EN 3-D

On considère le milieu élastique homogène de la figure (1) et contenant une fissure plane de surface A. On distingue dans ce cas trois déplacements relatifs possibles entre les deux lèvres de la fissure D_1 , D_2 (tangentiels) et D_3 (normal).

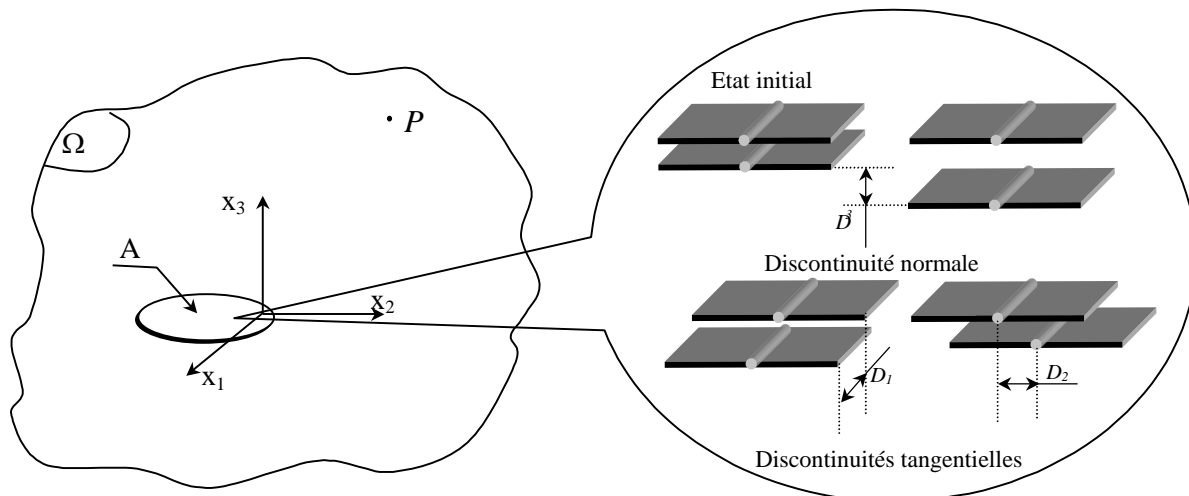


Figure 1 : Discontinuités de déplacement dans un milieu élastique.

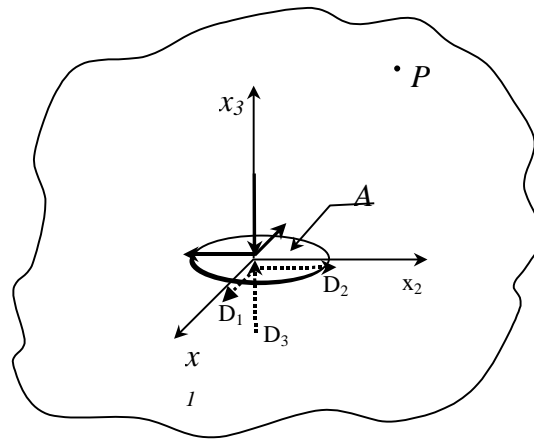


Figure 2 : La discontinuité de déplacement dans un milieu tridimensionnel.

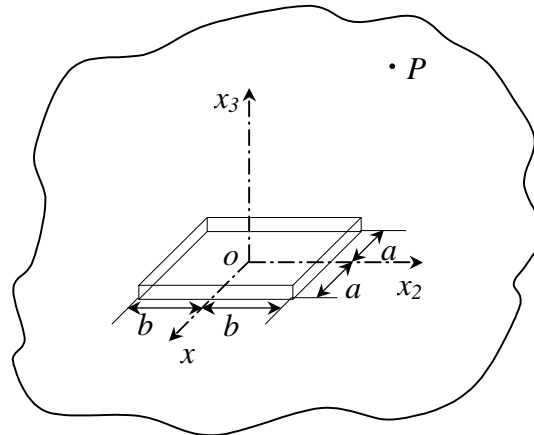


Figure 3 : Présentation de l'élément rectangulaire de discontinuité.

2.1 Formulation mathématique de la méthode

La solution en terme des fonctions de Green pour un milieu homogène, isotrope et linéairement élastique (figure 2) contenant une fissure élémentaire surfacique est donnée en 3D sous la forme suivante [6]:

$$\begin{aligned}
 u_i(x_1, x_2, x_3) &= \iint_A f_{ij}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) D_j(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 \\
 \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) &= \iint_A g_{ijk}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) D_k(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 \\
 i, j, k &\in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Avec f_{ij} : fonctions de Green concernant les déplacements, g_{ijk} : fonctions de Green concernant les contraintes.

Les fonctions f_{ij} et g_{ijk} sont données dans la partie annexe de la référence [6] et de la référence [7]. Dans le cas général D_i est une fonction polynomiale :

$$D_i = (a_0)_i + (a_1)_i x_i + (a_2)_i x_i^2 + \dots + (a_n)_i x_i^n \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3$$

2.2 Intégration des fonctions de Green en 3D

D'après les équations (1) on remarque que la solution est donnée en terme d'intégrales à déterminer. Ces intégrales peuvent être déterminées analytiquement ou numériquement. Nous sommes tentés de faire une intégration numérique vu la complexité des fonctions de Green en 3D. Le problème qui va se poser est la présence de singularité des fonctions en $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$ et en $\frac{1}{r^7}$ (r étant la distance entre le point O et le point P de la figure 3). Cela demande une étude complète sur les techniques de traitement des singularités, qui fait l'objet de beaucoup de recherches récentes. Les références [8] et [9] traitent des singularités similaires mais d'ordre inférieur (en $1/r^3$ seulement). Pour les raisons précédentes, on a préféré l'intégration analytique, en se limitant aux éléments rectangulaires de discontinuité de déplacement constante et le gain sur le temps, et la précision de calcul sera remarquable.

La surface A de l'élément (fissure élémentaire) est un rectangle de longueur 2a et de largeur 2b (figure 3).

$$A = \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a dx'_1 dx'_2 = 4ab \quad (3)$$

Les équations (1) deviennent :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a f_{ij}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) D_j(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 = F_{ij} D_j \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a g_{ijk}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) D_k(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 = G_{ijk} D_k$$

$$i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

F_{ij} , G_{ijk} sont respectivement les fonctions intégrales des fonctions de Green f_{ij} , g_{ijk} ,

$$F_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a f_{ij}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) dx'_1 dx'_2 \quad (5)$$

$$G_{ijk}(x_1, x_2, x_3) = \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a g_{ijk}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) dx'_1 dx'_2$$

$$i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

Les fonctions primitives des 30 intégrales (5) sont illustrées sous la forme des tableaux A1 et A2 dans la partie annexe.

2.3 Etude des cas limites des fonctions primitives

D'après les tableaux A1 et A2 on remarque que les fonctions primitives possèdent plusieurs singularités qui sont généralement une division par zéro ou un logarithme de zéro. Les limites de ces intégrales impropres sont représentés dans les tableaux A3 et A4 dans l'annexe. Pour la fonction

$$F_{ii} = \left[\left[F_{ii}^* \right]_{x'_1=-a}^{x'_1=a} \right]_{x'_2=-b}^{x'_2=b}$$

qui contient la fonction arc-tangente d'une fraction singulière lorsque x_3 tend

vers 0, leurs limites doivent être calculées en étudiant tous les cas possibles de la fraction :

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0} [F_{ii}] = 0 - \frac{1}{4\pi} \lim_{x_3 \rightarrow 0} \left(\arctan \left[\frac{(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2)}{x_3 r} \right] \right)_{\substack{x'_1=a \\ x'_1=-a}}^{\substack{x'_2=b \\ x'_2=-b}} \quad (6)$$

$i = 1, 2, 3$

Pour trouver cette limite on doit se référer au cas général :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctan \left[\frac{C}{x} \right] \right) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} \text{ pour } (C > 0) \text{ et } (x \rightarrow 0^+) \\ -\frac{\pi}{2} \text{ pour } (C < 0) \text{ et } (x \rightarrow 0^+) \\ -\frac{\pi}{2} \text{ pour } (C > 0) \text{ et } (x \rightarrow 0^-) \\ +\frac{\pi}{2} \text{ pour } (C < 0) \text{ et } (x \rightarrow 0^-) \end{cases} \quad (7)$$

Après calculs, pour le cas où $x \rightarrow 0^-$, on trouve :

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^-} [F_{ii}] = \begin{cases} -\frac{1}{2}; \text{ pour } : |x_1| < a, |x_2| < b \\ 0; \text{ pour } : |x_1| > a, |x_2| < b \\ 0; \text{ pour } : |x_1| < a, |x_2| > b \\ 0; \text{ pour } : |x_1| > a, |x_2| > b \end{cases} \quad (8)$$

Pour le cas où $x \rightarrow 0^+$, on trouve de la même manière :

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^+} [F_{ii}] = \begin{cases} +\frac{1}{2}; \text{ pour } : |x_1| < a, |x_2| < b \\ 0; \text{ pour } : |x_1| > a, |x_2| < b \\ 0; \text{ pour } : |x_1| < a, |x_2| > b \\ 0; \text{ pour } : |x_1| > a, |x_2| > b \end{cases} \quad (9)$$

2.4 Procédure numérique

Dans le cas général la fissure est de forme quelconque comme présentée dans la figure 4. Elle est discrétisée en N éléments joints l'un à l'autre. Les positions et les orientations de ces éléments sont spécifiées par rapport au système global (x_1, x_2, x_3) comme il est indiqué dans la figure 4.

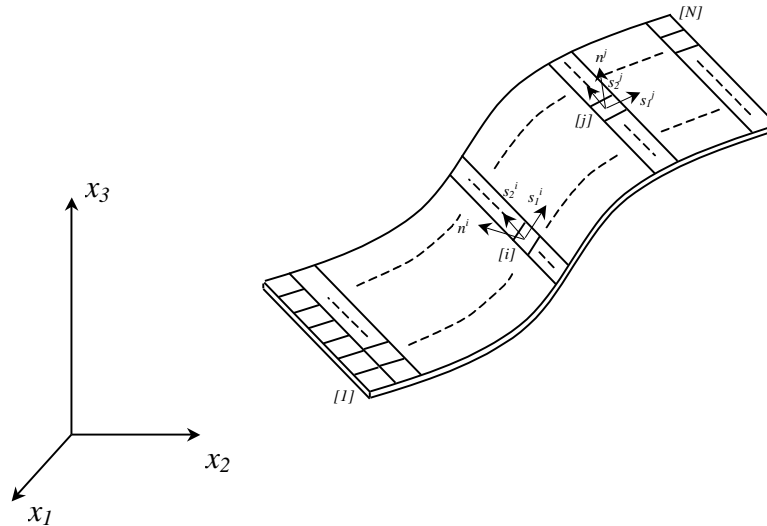


Figure 4 : Représentation d'une fissure à N éléments en 3D.

Chaque élément de discontinuité de déplacement élémentaire représente une discontinuité de déplacement réelle pour le cas d'une fissure. Les D^i pour la fissure ont une signification physique et représentent une discontinuité réelle entre les deux lèvres de la fissure et simulent dans ce cas les trois modes de rupture (ouverture, glissement plan et anti-plan). C'est pourquoi la M.D.D est l'approche la plus adéquate à l'étude des problèmes de fissuration, car la fissure est discrétisée une seule fois, ce qui n'est pas le cas pour les autres approches qui nécessitent une discrétisation des deux lèvres de la fissure séparément.

Les composantes de discontinuité de déplacement élémentaires dans les directions des axes des repères locaux (s_1, s_2, n) sont définies par :

$$\begin{aligned} D_{s_1}^j &= u_{s_1}^{j[-]} - u_{s_1}^{j[+]} \\ D_{s_2}^j &= u_{s_2}^{j[-]} - u_{s_2}^{j[+]} \\ D_n^j &= u_n^{j[-]} - u_n^{j[+]} \end{aligned} \quad (10)$$

avec $u_{s_1}^j$: déplacement tangentiel dans la direction s_1 , $u_{s_2}^j$: déplacement tangentiel dans la direction s_2 et u_n^j : déplacement normal.

Les signes [+] et [-] dans l'équation (10) désignent respectivement la surface positive et celle négative de la fissure d'après sa position vis-à-vis de l'axe \vec{n} du repère local. D'après les équations (4), les contraintes tangentielles et normales de l'élément [i] appartenant à la fissure peuvent être exprimées en terme des composantes de la discontinuité de déplacement de chaque élément [j]. En tenant compte des positions et des orientations relatives entre l'élément [i] et l'élément [j] et par superposition des effets, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma_{s_1}^i &= \sum_{j=1}^N A_{s_1 s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N A_{s_1 s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N A_{s_1 n}^{ij} D_n^j \\
\sigma_{s_2}^i &= \sum_{j=1}^N A_{s_2 s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N A_{s_2 s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N A_{s_2 n}^{ij} D_n^j \\
\sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{n s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N A_{n s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N A_{n n}^{ij} D_n^j \\
i, j, k &\in \{1, 2, 3\}
\end{aligned} \tag{11}$$

$A_{s_i s_j}^{ij}, \dots$ etc., est le coefficient d'influence concernant les contraintes. Par exemple $A_{s_2 n}^{ij}$ est la contrainte tangentielle dans la direction s_2 de l'élément $[i]$ due à la composante de discontinuité de déplacement normale unitaire ($D_n^j = 1$) de l'élément $[j]$. Si les contraintes $\sigma_{s_1}^i, \sigma_{s_2}^i, \sigma_n^i$ sont données pour chaque élément de la fissure (contraintes appliquées), les équations (11) vont former un système algébrique de $3N$ équations à $3N$ inconnues $D_{s_1}^j, D_{s_2}^j, D_n^j$ avec $j=1$ à N . Après la résolution du système d'inconnues $D_{s_1}^j, D_{s_2}^j, D_n^j$, on peut déterminer les déplacements et les contraintes en n'importe quel point du corps avec le même principe de superpositions des influences utilisé pour la construction du système d'équations (11). Les déplacements pour chaque élément $[i]$ de la fissure sont donnés par :

$$\begin{aligned}
u_{s_1}^i &= \sum_{j=1}^N B_{s_1 s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N B_{s_1 s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N B_{s_1 n}^{ij} D_n^j \\
u_{s_2}^i &= \sum_{j=1}^N B_{s_2 s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N B_{s_2 s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N B_{s_2 n}^{ij} D_n^j \\
u_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{n s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N B_{n s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N B_{n n}^{ij} D_n^j \\
i, j, k &\in \{1, 2, 3\}
\end{aligned} \tag{12}$$

Les déplacements sont discontinus en passant d'une face à l'autre de la fissure. Par conséquent, on doit distinguer entre les faces de la fissure dans le calcul des coefficients d'auto-influence ($j=i$) $B_{s_i s_i}^{ii}, \dots$ etc. D'après la section (2.3), F_{11}, F_{22} et F_{33} présentent une singularité lorsque $x_3 \rightarrow 0$, tandis que les autres fonctions F_{ij} sont nulles. Dans ce cas les coefficients non diagonaux sont tous nuls : $B_{s_1 s_2}^{ii} = B_{s_1 n}^{ii} = B_{s_2 s_1}^{ii} = B_{s_2 n}^{ii} = B_{n s_1}^{ii} = B_{n s_2}^{ii} = B_{n n}^{ii} = 0$ et ceux diagonaux sont :

$$\begin{aligned}
B_{s_1 s_1}^{ii} = F_{11} \Big|_{\substack{x_3 \rightarrow 0 \\ x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0}} &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{ pour : } x_3 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow n \rightarrow 0^- \\ \frac{1}{2} \text{ pour : } x_3 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow n \rightarrow 0^+ \end{cases}, & B_{s_2 s_2}^{ii} = F_{22} \Big|_{\substack{x_3 \rightarrow 0 \\ x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0}} &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{ pour : } x_3 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow n \rightarrow 0^- \\ \frac{1}{2} \text{ pour : } x_3 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow n \rightarrow 0^+ \end{cases}, \\
B_{n n}^{ii} = F_{33} \Big|_{\substack{x_3 \rightarrow 0 \\ x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0}} &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{ pour : } x_3 \rightarrow 0^- \Leftrightarrow n \rightarrow 0^- \\ \frac{1}{2} \text{ pour : } x_3 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow n \rightarrow 0^+ \end{cases}
\end{aligned} \tag{13}$$

Considérons maintenant le problème d'une cavité de forme parallélépipédique dans un milieu infini. On discrétise ce parallélépipède en N éléments. On associe à chaque élément trois composantes de discontinuité de déplacement $D_{s_1}^i, D_{s_2}^i$ et D_n^i . Contrairement au cas d'une fissure, dans le cas des frontières de cavité ou des frontières des corps finis, $D_{s_1}^i, D_{s_2}^i$ et D_n^i ne représentent que des quantités fictives et leur calcul est intermédiaire.

D'après la figure 5, on doit respecter une convention pour le choix du repère local $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{n})$ de chaque élément. Le vecteur \bar{n} doit être normal en sortant de la matière. Les autres vecteurs \bar{s}_1, \bar{s}_2 doivent former avec \bar{n} un trièdre $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{n})$ direct. D'après cette convention les valeurs des coefficients d'auto-influence de l'équation (13) vont être celles correspondantes à $n \rightarrow 0^-$:

$$B_{s_1 s_1}^{ii} = B_{s_2 s_2}^{ii} = B_{nn}^{ii} = -\frac{1}{2} \quad (14)$$

Pour trouver le champ de contrainte et de déplacement, on suit la même démarche exposée dans le cas de fissure.

Certains problèmes présentent des symétries par rapport à un, deux ou trois plans de l'espace. Dans ce dernier cas, la discrétisation va être impliquée seulement sur l'un huitième de la surface de frontière (exemple : la partie en gras de la cavité dans la figure 5).

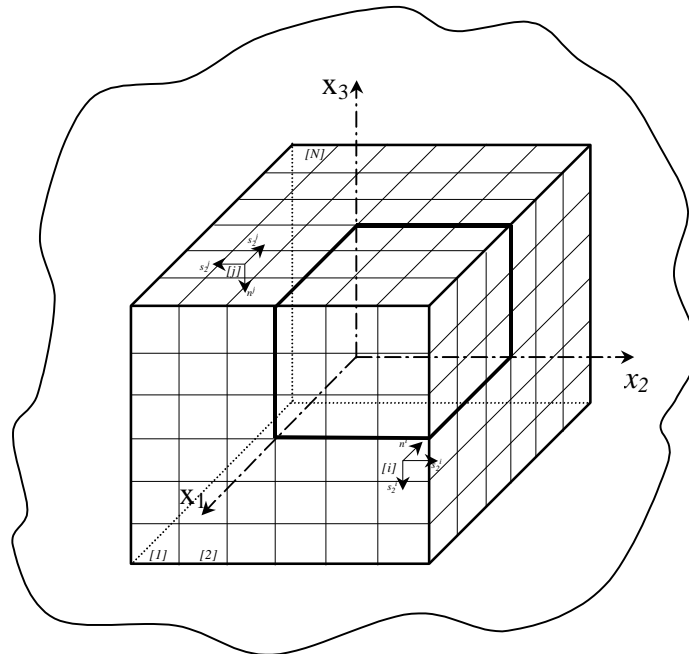


Figure 5 : Discretisation d'une cavité à triple symétrie dans un milieu infini.

2.5 Calcul du facteur d'intensité de contrainte

Le calcul numérique du facteur d'intensité de contrainte est basé dans notre étude sur la relation de Westergaard [10]. Elle donne l'expression de Facteur d'intensité de contrainte en fonction des déplacements relatifs des deux lèvres de la fissure :

$$\begin{aligned}
K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [D_n] \right) \\
K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [D_{s_1}] \right) \\
K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [D_{s_2}] \right)
\end{aligned} \tag{15}$$

Avec r : la distance entre le bout de fissure et le centre de l'élément voisinant (élément bout de fissure).

2.6 Code de calcul réalisé

Le code de calcul a été réalisé en Fortran90 (sous forme d'une Console-Application) et en C++ (sous forme d'un logiciel avec visualisation graphique par les fonctions OpenGL du maillage utilisé et des résultats trouvés). Le temps de calcul pour un maillage de 800 éléments par exemple en l'absence de symétrie est d'environ 40min pour la version Fortran90 et 11min pour la version C++ avec un PIII300MHZ.

3 TESTS NUMERIQUES

Dans cette partie, nous démontrons l'efficacité de notre approche pour l'analyse des contraintes à travers des exemples pratiques des milieux semi-infinis fréquemment rencontrés en mécanique de contact (exemple des paliers et roulements chargés radialement). Le modèle est testé pour des problèmes de singularité, notamment pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour des milieux contenant des fissures elliptiques intérieures et débouchantes simulant beaucoup de défauts internes et surfaciques souvent présents dans les structures métalliques.

3.1 Analyse des contraintes

Détermination du champ des contraintes pour un milieu semi-infini chargé sur une bande de largeur $2a$

Considérons le problème d'un milieu semi-infini, linéairement élastique et chargé sur une bande de largeur $2a$ (figure 6 (a)). On simule le problème physique par le modèle numérique de la figure 6(b). Le domaine à discrétiser doit être de très grandes dimensions et repose sur des appuis simples (pour simuler un milieu semi-infini). Ce modèle présente une double symétrie par rapport aux plans (Ox_1x_2) , (Ox_2x_3) . Ce qui va réduire la taille de la matrice globale du système (11) au quart en faisant une superposition des effets des éléments symétriques dans sa construction. Les caractéristiques du matériau, du chargement et les dimensions du problème sont : $E = 206 \text{ Mpa}$; $\nu = 0.3$; $p = 1000 \text{ Mpa}$; $a = 6.67 \text{ cm}$; $h = b = 3.10^2 a$; $e = 1.75 b$.

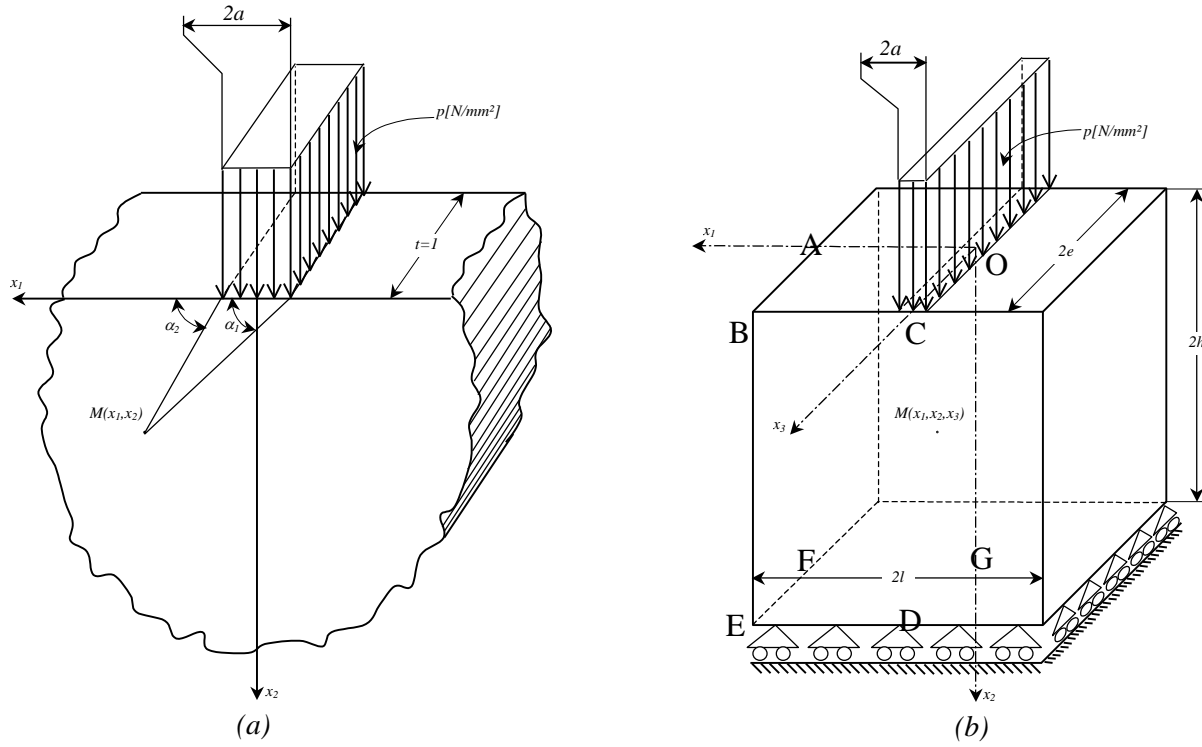


Figure 6 : Présentation d'un milieu semi-infini chargée sur une bande 2a.
 (a) : problème physique, (b) : modèle numérique

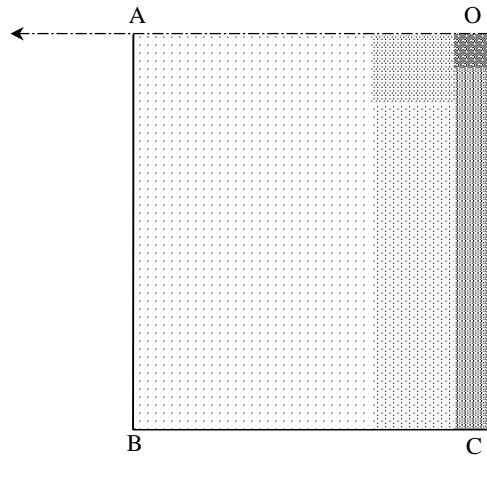


Figure 7 : Discrétisation de la face supérieure du modèle numérique.

En vue d'obtenir une bonne précision au voisinage du chargement (la partie la plus sollicitée), on raffine de plus en plus la face (O-A-B-C) en se rapprochant au centre O. La discrétisation du modèle numérique est donnée par la figure 7 et le tableau 1. Ce problème a été traité analytiquement comme

étant un problème en déformation plane tant que sa troisième dimension est grande (pour cela, on a pris « e » très grand dans le modèle numérique).

La face de frontière considérée	E-F-G-D	E-D-C-B	A-B-E-F	A-B-C-O					
Les conditions aux limites	$\sigma_{s1}=\sigma_{s2}=\sigma_n=0$	$\sigma_{s1}=\sigma_{s2}=\sigma_n=0$	$\sigma_{s1}=\sigma_{s2}=\sigma_n=0$	$\sigma_{s1}=0$ $\sigma_{s2}=0$ $\sigma_n=0$	$\sigma_{s1}=0$ $\sigma_{s2}=0$ $\sigma_n=0$	$\sigma_{s1}=0$ $\sigma_{s2}=0$ $\sigma_n=0$	$\sigma_{s1}=0$ $\sigma_{s2}=0$ $\sigma_n=-100$	$\sigma_{s1}=0$ $\sigma_{s2}=0$ $\sigma_n=-100$	$\sigma_{s1}=0$ $\sigma_{s2}=0$ $\sigma_n=-100$
Dimensions	e x l	l x 2h	e x 2h	3l/4 x e	9l/40 x 6e/7	9l/40 x e/7	7l/300 x 69e/70	l/600 x 69e/70	l/40 x e/70
Raffinage [élément]	8 x 6	6 x 6	8 x 6	6 x 12	3 x 18	7 x 8	2 x 60	1 x 40	15 x 15
Nombre total d'éléments	699 éléments								

Tableau 1 : Dimensions et discrétisation du modèle numérique.

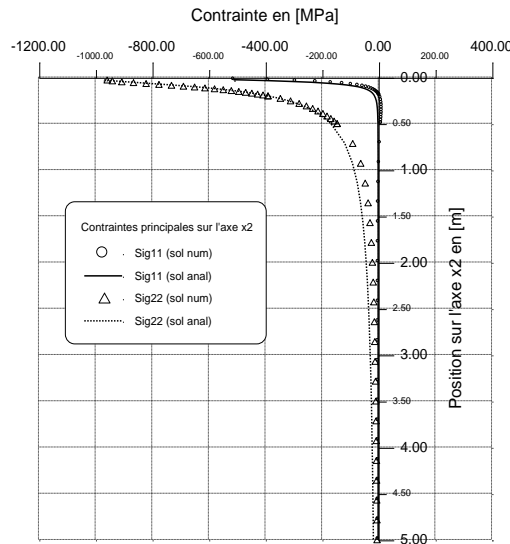


Figure 8 : Variation des contraintes σ_{11} et σ_{22} le long de l'axe x_2 .

La solution analytique est donnée par [11] :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= -\frac{f}{\pi} \left[\alpha_2 - \alpha_1 + \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) \right] \\
 \sigma_{22} &= -\frac{f}{\pi} \left[\alpha_2 - \alpha_1 - \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) \right] \\
 \sigma_{12} &= +\frac{f}{2\pi} (\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

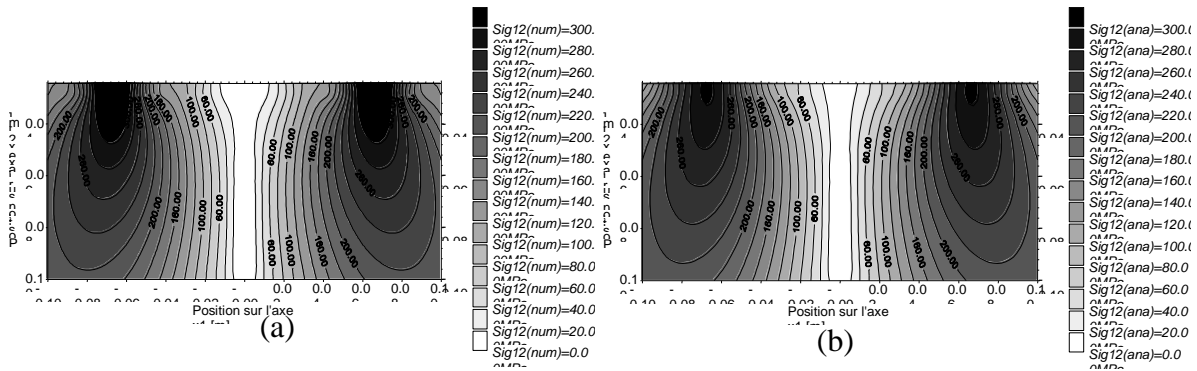


Figure 9 : Présentation du champ de contrainte σ_{12} dans le plan $(O x_1 x_2)$. (a) : Solution M.D.D. (b) : Solution analytique.

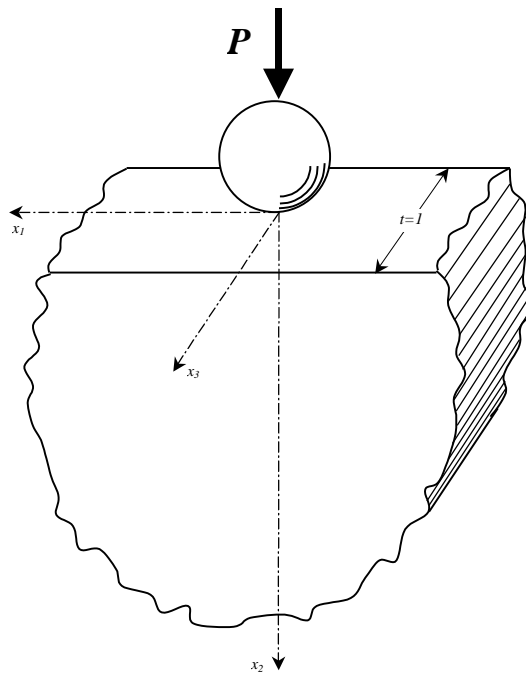


Figure 10 : Milieu semi-infini soumis à un chargement exercé par une bille.

D’après le graphe de la figure 8, nous constatons une bonne corrélation entre la solution numérique et la solution analytique, surtout en se rapprochant du plan de chargement où la condition $\sigma_{22}=p$ est vérifiée.

La figure 9 donne la répartition de la contrainte de cisaillement σ_{12} sur le plan (Ox_1x_2) qui prend sa valeur maximale au niveau des bornes de la bande du chargement ($x_1 = \pm a$). Nous remarquons la grande similitude entre la solution numérique donnée par la M.D.D et la solution analytique.

Détermination du champ de contraintes sous une bille exerçant une force P sur un milieu semi-infini

Nous présentons dans cet exemple un problème très pratique. C'est le problème de contact d'une bille rigide qui exerce un effort P sur un milieu semi-infini et linéairement élastique (figure 10). Pour modéliser ce problème,

Nous reprenons le même modèle utilisé dans l'exemple précédent avec les mêmes caractéristiques mécaniques, mais avec une répartition circulaire du chargement et une discrétisation de la face supérieure plus compatible avec le chargement. Nous supposons en première approximation que la répartition de pression sous la bille est uniforme $p=p_1$ (figure 11(a)). En seconde approximation, nous supposons - comme pour tout contact entre solides - que la répartition suit les lois de Hertz : la répartition des pressions sous la bille est semi-ellipsoïdale (figures 11(b) et 11(c)), c'est à dire, donnée par :

$$p(x_1, x_3) = p_2 \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{R}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{R}\right)^2} \quad (17)$$

avec : $p_2 = \frac{3P}{2\pi R^2}$

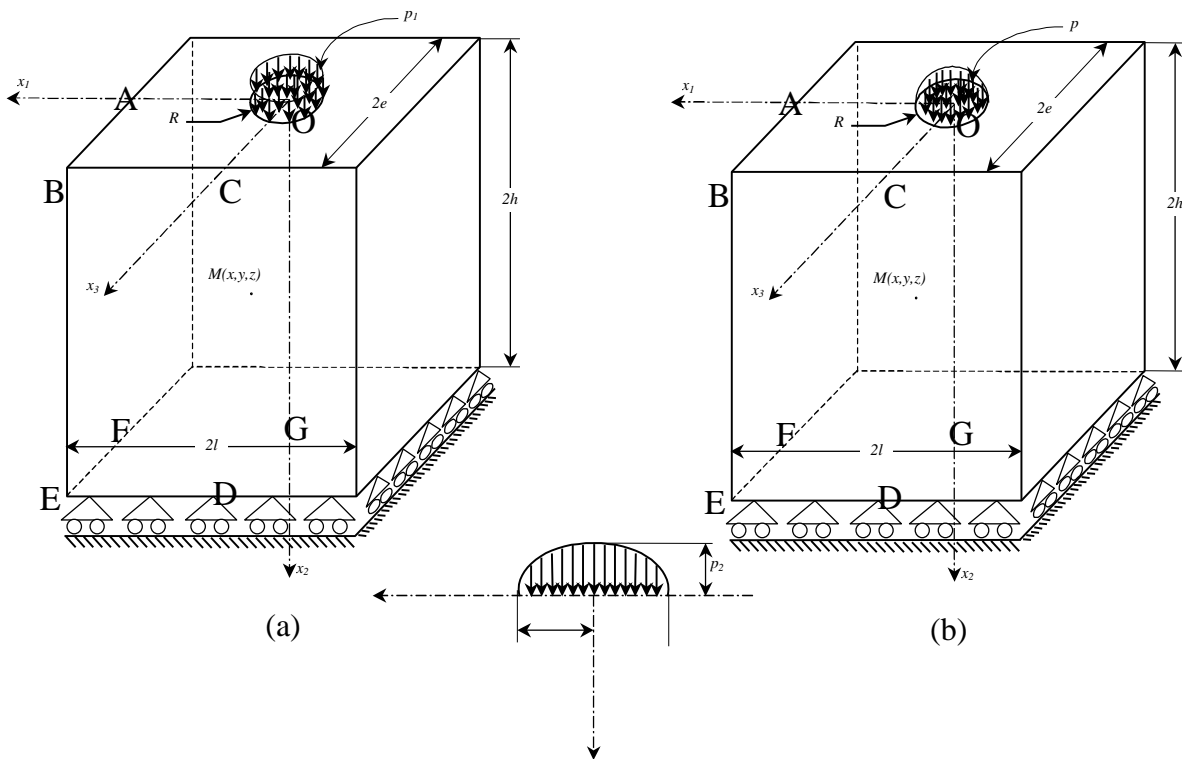


Figure 11 : Modèles numériques (a) : approximation avec un chargement uniforme, (b) : approximation avec un chargement semi-ellipsoïdal, (c) : projection du chargement semi-ellipsoïdal sur les plans (Ox_1x_2) et (Ox_2x_3)

Si dans cet exemple $R=0.5\text{cm}$ et $P=100\text{KN}$, nous trouvons d'après l'équation (17) :

$p_1=1273.23\text{MPa}$ et $p_2=1909.86\text{MPa}$. Pour ces données, nous calculons l'état de contrainte (σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12}) au plan (Ox_1x_2) pour les deux approximations. Les résultats sont illustrés sous la forme des graphes des figures 12, 13, 14 et 15.

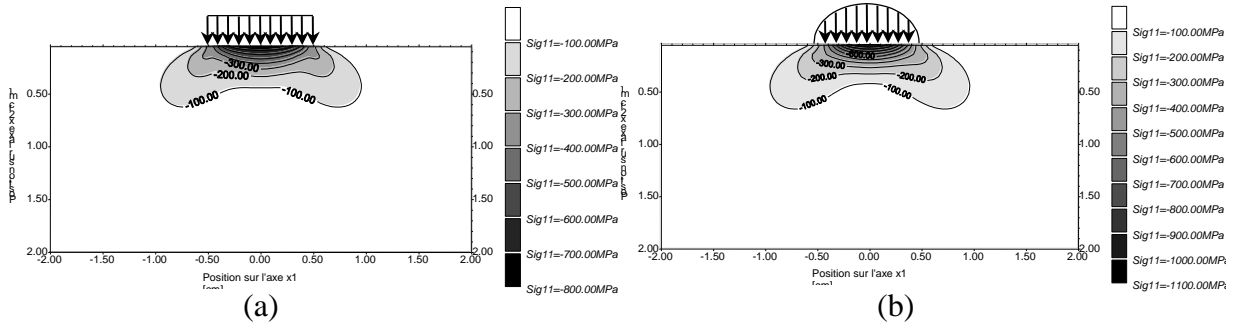


Figure 12 : Variation de σ_{11} dans le plan (Ox_1x_2) (a) : pression uniforme, (b) : pression semi-ellipsoïdale

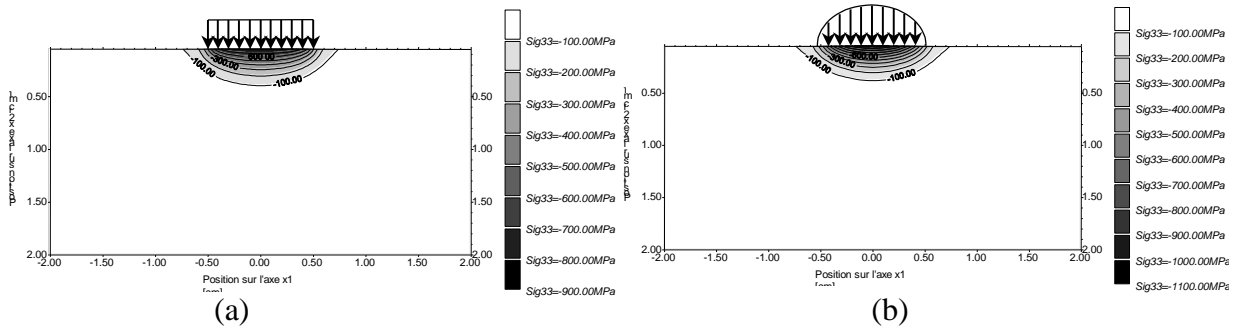


Figure 13 : Variation de la contrainte σ_{33} dans le plan (Ox_1x_2) (a) : pression uniforme, (b) : pression semi-ellipsoïdale

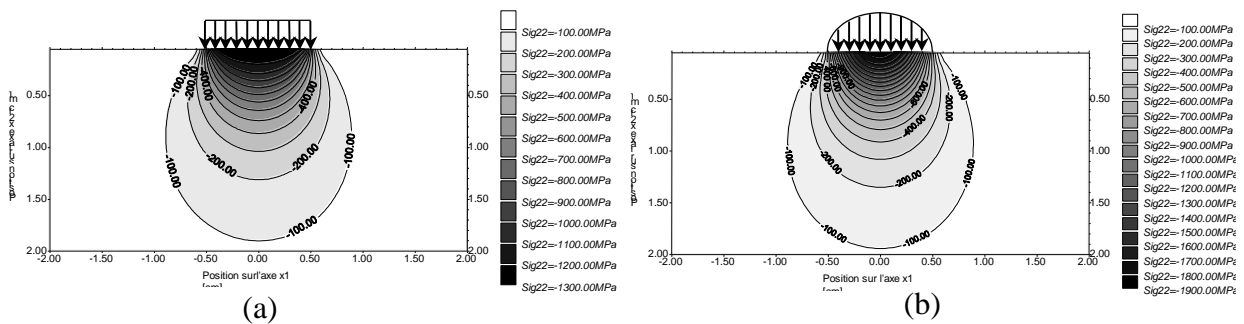


Figure 14 : Variation de la contrainte σ_{22} dans le plan (Ox_1x_2) (a) : pression uniforme, (b) : pression semi-ellipsoïdale

Dans la figure 12, la similitude d'allure de la variation de contrainte σ_{11} entre les deux approximations est claire. Nous constatons pour la deuxième approximation, une augmentation plus rapide des contraintes au voisinage de centre du chargement (-1100MPa contre -800MPa pour la 1^{re} approximation) à cause de la concentration du chargement au centre (O) de la deuxième approximation.

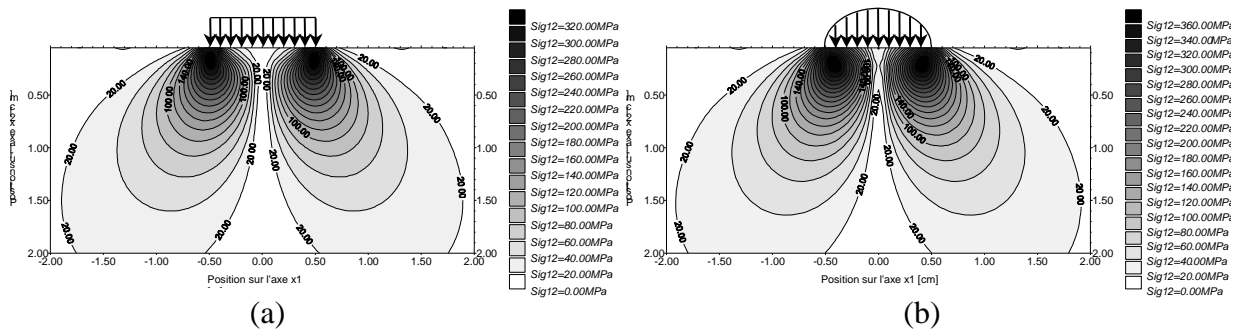


Figure 15 : Variation de la contrainte σ_{12} dans le plan $(O X_1 X_2)$ (a) : pression uniforme, (b) : pression semi-ellipsoïdale

Les mêmes remarques peuvent être tirées pour la variation de σ_{33} dans la figure 13. Ainsi, nous remarquons la coïncidence entre σ_{11} et σ_{33} le long de l'axe x_2 , axe de révolution du chargement appliqué.

Il est aussi à signaler que l'effet du chargement pour les deux contraintes σ_{11} et σ_{33} a une influence très locale (autour du chargement).

En ce qui concerne la répartition de la contrainte σ_{22} sur le plan $(O X_1 X_2)$. Nous constatons que l'influence du chargement semi-ellipsoïdal est plus importante que celle du chargement uniforme en se rapprochant du centre, à cause de la différence entre les conditions aux limites $p_1=1273.23\text{KPa}$ et $p_2=1909.86\text{KPa}$.

Pour la variation de la contrainte de cisaillement σ_{12} présenté sur la figure 15, la concentration de cisaillement est directement sous les deux extrémités du chargement pour le cas du chargement circulaire uniforme ce qui est logique. Par contre la concentration pour la deuxième approximation est déplacé vers l'intérieur. Cela est dû essentiellement au fait que le chargement aux extrémités du cercle est nul ($p(r=R)=0$). Nous remarquons aussi que pour le chargement semi-ellipsoïdal, la contrainte engendrée est plus importante relativement au cas du chargement uniforme.

Finalement, pour cet exemple, nous pouvons conclure que l'approximation avec un chargement semi-ellipsoïdal (qui est la plus proche du cas réel) provoque des effets plus importants. Ce qui impose que le calcul de résistance doit être fait selon les résultats trouvés en utilisant la deuxième approximation.

3.2 Calcul du facteur d'intensité de contrainte

Détermination du facteur d'intensité de contrainte sur le contour d'une fissure elliptique dans un milieu infini

Considérons un milieu infini, linéairement élastique et homogène contenant une fissure elliptique et soumis à un chargement de traction p à l'infini normal au plan de la fissure. Les caractéristiques mécaniques du matériau utilisé sont : $E=70000\text{MPa}$, $\nu=0,2$ et $\sigma_e=250\text{MPa}$.

Le chargement est : $p=200\text{MPa}$. Le problème possède deux plans de symétrie $(O X_1 X_3)$ et $(O X_2 X_3)$. Nous-nous intéressons donc au quart de l'ellipse en prenant $a=1\text{cm}$. La relation analytique qui donne l'expression du facteur d'intensité de contrainte est [12] :

$$K_{I(\text{anal})} = p \sqrt{\frac{\pi a}{Q} \left(\sin^2 \theta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^{1/4}} \quad (18)$$

Q est un paramètre qui est dépend des rapports a/c et p/σ_e , il est donné sous forme d'abaque [12].

Nous calculons le facteur d'intensité de contrainte sur le contour de l'ellipse en fixant $a/c = 0,6$. Les résultats obtenus sont illustrés sous la forme des graphes de la figure 17. Nous constatons que la courbe de variation du facteur d'intensité de contrainte obtenue par la M.D.D est de même forme que celle analytique. L'erreur relative varie en fonction de l'angle θ . Elle atteint ses valeurs maximales (environ 21%) pour θ appartenant à l'intervalle $[40^\circ, 60^\circ]$. Ceci peut être considéré logique, si on prend en considération l'incompatibilité de l'élément rectangulaire avec la courbure de la fissure (figure16(b)).

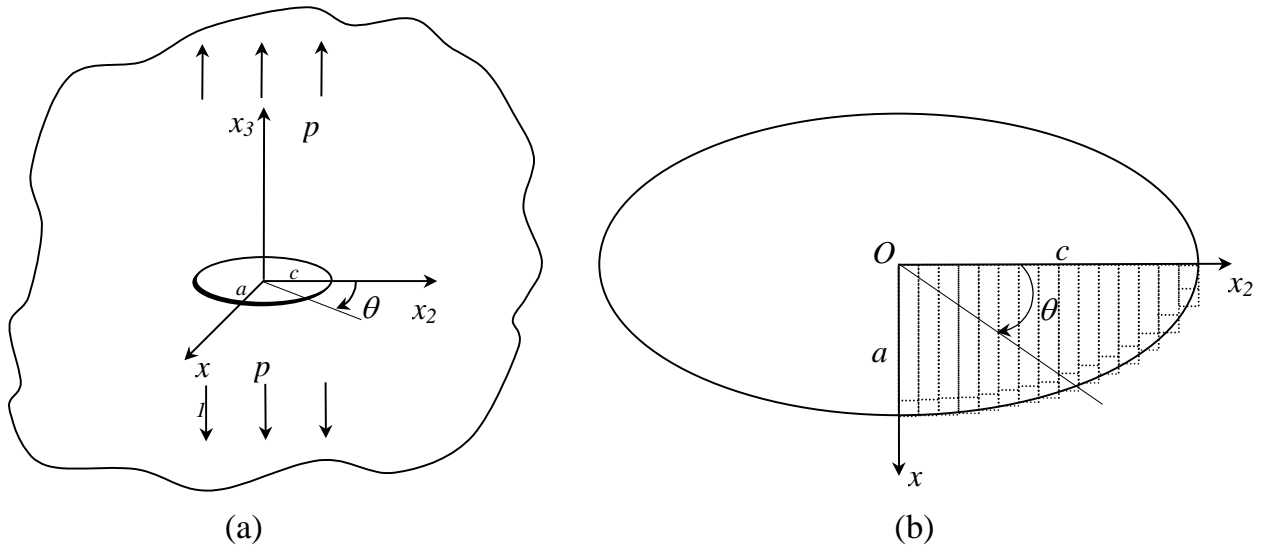


Figure 16 : Fissure elliptique dans un milieu chargé (a) : schéma du problème, (b) : discrétisation de la fissure

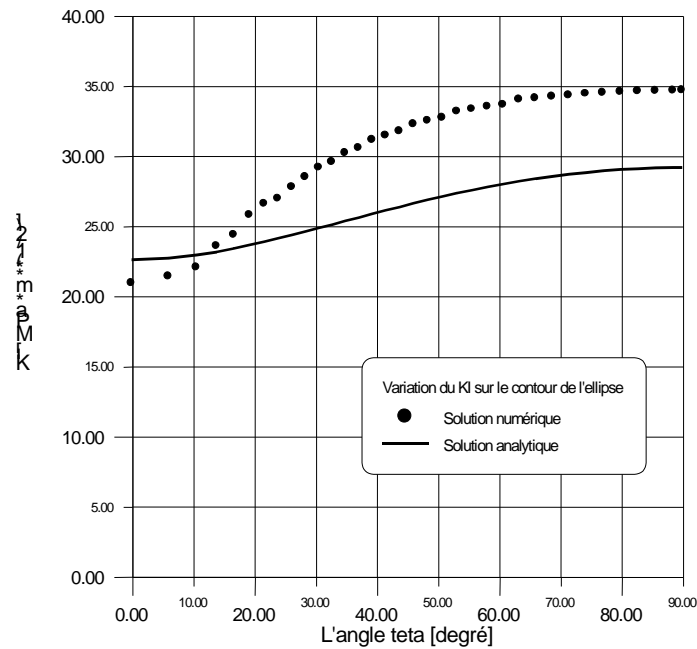


Figure 17 : Variation du facteur d'intensité sur le contour d'une fissure elliptique

Détermination du facteur d'intensité de contrainte pour un corps contenant une fissure semi-elliptique débouchante

Le présent exemple représente un parallélépipède linéairement élastique, homogène, chargé en traction et contenant une fissure semi-elliptique débouchante (figure 18). Ce type de fissure a été intensivement étudié car on le rencontre assez fréquemment dans les structures soudées. Le problème admet un plan de symétrie (Ox_1x_3), ce qui nous permet de considérer la moitié du corps. La discrétisation des faces de frontière et de fissure et les conditions aux limites du problème sont mentionnées sur le tableau 3.

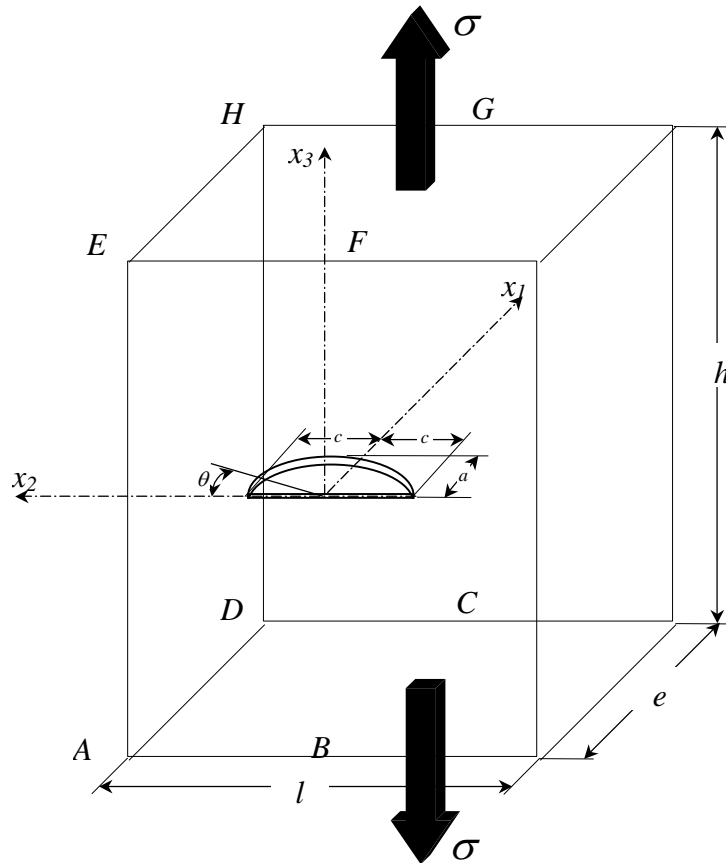


Figure 18 : Corps chargé en traction et contenant une fissure semi-elliptique débouchante

Nous prenons pour ce problème : $E=70000\text{MPa}$, $\nu=0,2$, $\sigma_e=250\text{MPa}$ et $\sigma=200\text{MPa}$; $a=1\text{cm}$, $a/e=0,6$, $h=2l=8e$.

L'expression analytique de K_I a la même forme que celle de l'exemple précédent, mais avec deux coefficients correcteurs. Le premier concerne les fissures extérieures et le deuxième est fonction du rapport a/e . L'expression analytique du facteur d'intensité de contrainte est [12] :

$$K_{I(\text{anal})} = 1.12\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \left(\sin^2 \theta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^{1/4} M_K \quad (19)$$

$$M_K = 1.0 + 1.2 \left(\frac{a}{e} - 0.5 \right) \tag{20}$$

La face de frontière considérée	A-B-C-D	D-C-G-H	H-G-F-E	E-F-B-A	A-D-H-E	La fissure	Le corps entier
Raffinage [élément]	6 x 3	2 x 8	6 x 3	6 x 24	3 x 24	300	570
Les conditions aux limites	$\sigma_{s1}=\sigma_{s2}=0$ $\sigma_n=\sigma$	$\sigma_{s1}=\sigma_{s2}=\sigma$ $\sigma_n=0$	$\sigma_{s1}=\sigma_{s2}=0$ $\sigma_n=\sigma$	$\sigma_{s1}=\sigma_{s2}=\sigma$ $\sigma_n=0$	$\sigma_{s1}=\sigma_{s2}=\sigma$ $\sigma_n=0$	$\sigma_{s1}=\sigma_{s2}=\sigma$ $\sigma_n=0$	-----

Tableau 1 : La discrétisation et les conditions aux limites des frontières et de la fissure.

Dans cet exemple nous calculons le facteur d'intensité de contrainte K_I sur le contour de la fissure pour un rapport $a/c=0,6$. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 19. D'après le graphe de la figure 19, nous constatons que la courbe de variation du facteur d'intensité de contrainte obtenue par la M.D.D est de même allure que celle trouvée analytiquement. Par rapport à l'exemple précédent, on constate :

- Un facteur d'intensité de contraintes plus grand, dû à une ouverture des lèvres de la fissure plus grande, par conséquent un risque de rupture fragile plus important.
- Une légère augmentation de l'erreur à cause de la présence des faces de frontière (effet de bord) et de la diminution du nombre d'éléments qui discrétisent la fissure (limitation par la taille maximale de la matrice globale du système).

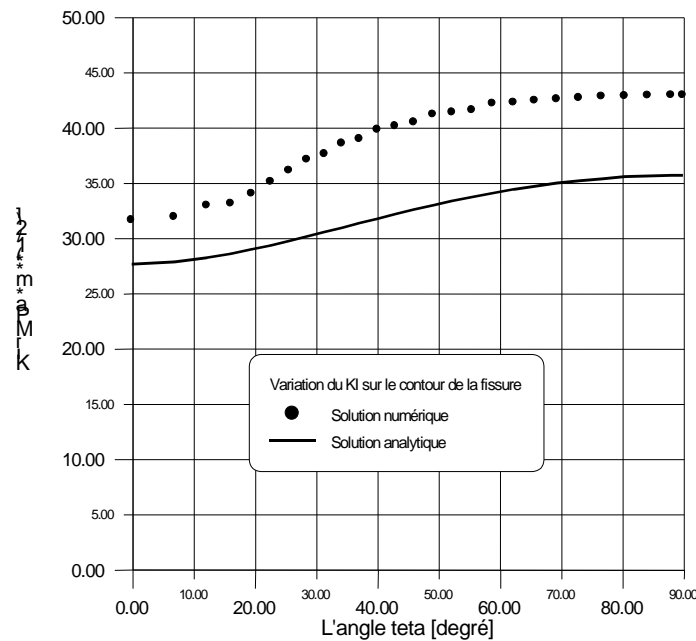


Figure 19 : Variation du facteur d'intensité de contrainte sur le contour d'une fissure semi-elliptique

4. CONCLUSION GENERALE

Dans cet article, la M.D.D en 3D avec l'utilisation des fonctions de Green a été développée. Nous aurions pu être tenté dans la formulation mathématique de la méthode, au regard de la forme des fonctions de Green, de procéder à des intégrations numériques en utilisant les différents algorithmes d'intégration numérique disponibles pour la totalité de l'étude. Cette solution pourrait faciliter le traitement du problème, mais nous mettrait en face des singularités et aurait démultiplié le temps machine douze fois au minimum pour une intégration numérique d'ordre 8 à titre d'exemple. Nous avons pu procéder à des intégrations analytiques, pour éviter les différentes singularités en $\frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^5}, \frac{1}{r^7}$

de l'intégration numérique. Les techniques utilisées pour le traitement de ce type de singularités constituent des contributions importantes et restent une grande préoccupation pour les chercheurs utilisant les techniques numériques.

Des structures tridimensionnelles continues et fissurées ont été discrétisées et implémentées dans le code de calcul réalisé en utilisant un élément surfacique de forme rectangulaire. Malgré la forme simple de l'élément, on a pu simuler les différents domaines étudiés.

Les applications traitées dans cette étude ont été divisées en deux catégories ; applications d'analyse de contraintes pour des problèmes de contact et applications de mécanique de la rupture. Ils ont tous montré la flexibilité et la puissance de la méthode de discontinuité de déplacement en tridimensionnel. Les résultats trouvés pour l'analyse des contraintes des milieux semi-infinis chargés sur une bande ou sous l'action d'une bille rigide sont très précis et très cohérents. Ce qui a permis de réaliser le dimensionnement et le choix du matériau de milieu étudié, qui constituent les préoccupations de l'ingénieur. Pour les applications liées à la mécanique de la rupture, nous étions intéressés par le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour des fissures de forme elliptiques, intérieure pour la première application et débouchant pour la deuxième. Ces deux applications simulent parfaitement des problèmes pratiques, tels que les milieux présentant des lacunes internes et les structures présentant des défauts de soudure. Les résultats trouvés pour cette catégorie sont moins précis que ceux de la première catégorie, mais ils restent acceptables vu la forme et l'ordre de l'élément utilisé dans la discrétisation. Nous avons donc opté de calculer le facteur d'intensité de contrainte en utilisant la discontinuité de déplacement normale. Le calcul aurait pu concerner le facteur d'intensité de contrainte en mode 2 et mode 3 en utilisant les deux discontinuités tangentielles en bout de fissure. Mais nous nous sommes limités au mode 1 car considéré en général le plus dangereux.

Le présent travail laisse encore un champ large à son application pour la discrétisation des structures en utilisant des éléments surfaciques gauches et d'ordre supérieur. Cet apport sera remarquable surtout dans le traitement des fissures elliptiques, pour mieux respecter les conditions de compatibilité.

RÉFÉRENCES

1. Crouch S.L., Starfield. A.M., Boundary element in solid mechanics G. Allen, Anwin., Winchester (1983).
2. Panasyuk Y.V, Savruk H.P., Datsyshyn A.D., A General Method of Solution of Two Dimensional Problems in the Theory of Cracks Eng. Fracture Mech. Vol. 9, pp. 489-497 (1977).
3. Bouhaddane A., Application de l'Intégrale de Cauchy à la Méthode des Discontinuités de Déplacement et Autres Méthodes de Collocation. Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, France (1987).
4. Miguez R., Belkacemi Y., Henry J.P., Higher Order Displacement Discontinuities in Complex Variables Application to the Description of Cracks Path with Friction. 3rd. Int. Conf. on Num.

- Meth. In Geom. NUMOG III, Niagara Falls, Canada, Elsevier Applied Sciences, pp. 447-454 (1989).
5. Belkacemi Y., Méthode des Discontinuités de Déplacement en Champ Complexe -Développements Analytiques et Numériques- Application aux Milieux Fissurés, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, France, (1990).
 6. Wiles T.D., Curran J.H., A General 3-D displacement discontinuity method, Proceeding of the 4th Int. Conf. Meth. in Geomechanics, Edmondson, Canada, Vol. 1, pp. 103-111, (1983).
 7. Hachi B.K., Contribution à l'application de la méthode de discontinuité de déplacement en tridimensionnel, Thèse de Magister, Département. Génie Mécanique, Ecole Nationale Polytechnique, Alger (2000).
 8. Guiggiani M., Gigante A., A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method, Transactions of the ASME J. App Mech. Vol. 57, pp. 906-915 (1990).
 9. Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolph T.J., Rizzo F.J., A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, Trans. of the ASME J. App Mech. Vol. 59, pp. 604-614 (1992).
 10. Lemaitre J., Chaboche J.L., Mécanique des matériaux solides, Ed Dunod, Paris, pp. 460-461 (1989).
 11. Durelli A.J., Philips E.A., Tsao C.H., Analysis of stress and strain, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York (1958).
 12. Barsom J.M., Rolfe S.T., Fracture and fatigue control in structures, Englewood cliffs New Jersey, pp. 47-50 (1987).

ANNEXE

Paramétrage : $\alpha = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}$ et $\beta = -\frac{3G}{4\pi(1-\nu)}$; $xd_1 = (x_1 - x'_1)$ et $xd_2 = (x_2 - x'_2)$; $C_{13} = [(x_1 - x'_1)^2 + (x_3)^2]$ et $C_{23} = [(x_2 - x'_2)^2 + (x_3)^2]$; $r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + x_3^2}$; ν : Coefficient de Poisson et G : module de cisaillement ;

$$F_{ij} = \left[F_{ij}^* \right]_{x'_1=-a}^{x'_1=a} \Big|_{x'_2=-b}^{x'_2=b} \quad \text{et} \quad G_{ijk} = \left[G_{ijk}^* \right]_{x'_1=-a}^{x'_1=a} \Big|_{x'_2=-b}^{x'_2=b} .$$

Les fonctions primitives concernant les déplacements.

$$\begin{array}{ll}
 F_{11}^* = \alpha \left[\frac{(xd_1)(xd_2)x_3}{C_{13}r} - 2(\nu-1) \arctan \left(\frac{(xd_1)(xd_2)}{x_3 r} \right) \right] & F_{31}^* = -\alpha \left(\frac{-(x_3)^2 xd_2}{C_{13}r} + (1-2\nu) \ln(r - xd_2) \right) \\
 F_{12}^* = F_{21}^* = 3\alpha \left(\frac{x_3}{3r} \right) & F_{32}^* = -\alpha \left(\frac{-(x_3)^2 xd_1}{C_{23}r} + (1-2\nu) \ln(r - xd_1) \right) \\
 F_{13}^* = -\alpha \left(\frac{x_3^2 (xd_2)}{C_{13}r} + (1-2\nu) \ln(r - xd_2) \right) & F_{33}^* = \begin{cases} \alpha r \frac{(x_3)xd_2}{xd_1} \left(\frac{1}{C_{23}} - \frac{(x_3)^2}{C_{13}r} \right) + 2(1-\nu) \arctan \left(\frac{(xd_1)(xd_2)}{x_3 r} \right) \\ \text{ou} \\ \alpha r \frac{(x_3)xd_1}{xd_2} \left(\frac{1}{C_{13}} - \frac{(x_3)^2}{C_{23}r} \right) + 2(1-\nu) \arctan \left(\frac{(xd_1)(xd_2)}{x_3 r} \right) \end{cases} \\
 F_{22}^* = \alpha \left[\frac{(xd_1)(xd_2)x_3}{C_{23}r} - 2(\nu-1) \arctan \left(\frac{(xd_1)(xd_2)}{x_3 r} \right) \right] & \\
 F_{23}^* = -\alpha \left(\frac{(x_3)^2 xd_1}{C_{23}r} + (1-2\nu) \ln(r - xd_1) \right) &
 \end{array}$$

Tableau A.1 : Fonctions primitives concernant les déplacements.

Les fonctions primitives concernant les contraintes

$G_{111}^* = \beta \left[\frac{x_3(xd_2)}{C_{13}r} \left(\frac{(xd_1)^2}{r^2} + \frac{(x_3)^2 + 3(xd_1)^2}{C_{13}} \right) \right]$ $G_{112}^* = 3\beta \left[\frac{x_3(xd_1)}{r} \left(\frac{-1}{r^2} + \frac{2\nu}{C_{23}} \right) \right]$ $G_{121}^* = \beta \frac{x_3(xd_1)}{r} \left(\frac{1-\nu}{C_{23}} - \frac{1}{r^2} \right)$ $G_{122}^* = \beta \frac{x_3(xd_2)}{r} \left(\frac{1-\nu}{C_{13}} - \frac{1}{r^2} \right)$ $G_{123}^* = \frac{\beta}{r} \left((1-2\nu) - \frac{(x_3)^2}{r^2} \right)$ $G_{132}^* = \frac{\beta}{r} \left(\nu - \frac{(x_3)^2}{r^2} \right)$ $G_{133}^* = \beta \frac{x_3(xd_2)}{rC_{13}} \left(\frac{(x_3)^2 - (xd_1)^2}{C_{13}} + \frac{(x_3)^2}{r^2} \right)$ $G_{221}^* = \beta \frac{x_3(xd_2)}{r} \left(\frac{2\nu}{C_{13}} - \frac{1}{r^2} \right)$ $G_{222}^* = \beta \frac{(x_3)(xd_1)}{C_{23}r^2} \left[\frac{(xd_2)^2}{r^2} + \frac{3(xd_2)^2 + (x_3)^2}{C_{23}} \right]$ $G_{231}^* = G_{132}^*$ $G_{233}^* = \beta \frac{(x_3)(xd_1)}{C_{23}r^2} \left[\frac{(x_3)^2}{r^2} + \frac{(x_3)^2 - (xd_2)^2}{C_{23}} \right]$ $G_{331}^* = G_{133}^* \text{ et } G_{332}^* = G_{233}^*$	$G_{113}^* = \begin{cases} \beta r(xd_2) \left[\frac{-2\nu}{(xd_1)C_{23}} + \frac{1}{C_{13}r^2} \left(\frac{xd_1(x_3)^2}{r^2} + \frac{(1+4\nu)(x_3)^2(xd_1)^2 + 2\nu(x_3)^4 - (1-2\nu)(xd_1)^4}{(xd_1)C_{13}} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \beta r \frac{xd_1}{xd_2} \left[\frac{1}{C_{13}} \left(\frac{2(x_3)^2}{C_{13}} - \frac{C_{23}}{(xd_2)^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{(1-2\nu)(xd_2)^4 + 2(x_3)^2(xd_2)^2 + (x_3)^4}{(xd_2)^2 C_{23}} - \frac{(x_3)^2}{r^2} \right) \right] \end{cases}$ $G_{131}^* = \begin{cases} \beta r(xd_2) \left[\frac{(\nu-1)}{C_{23}(xd_1)} + \frac{1}{C_{13}r^2} \left(\frac{(x_3)^2(xd_1)}{r^2} + \frac{(1-\nu)(x_3)^4 + (3-2\nu)(xd_1)^2(x_3)^2 - \nu(xd_1)^4}{(xd_1)C_{13}} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \beta r \frac{xd_1}{xd_2} \left[\frac{1}{C_{13}} \left(\frac{2(x_3)^2}{C_{13}} - \frac{C_{23}}{(xd_2)^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\nu(xd_2)^4 + 2(x_3)^2(xd_2)^2 + (x_3)^4}{(xd_2)^2 C_{23}} - \frac{(x_3)^2}{r^2} \right) \right] \end{cases}$ $G_{223}^* = \begin{cases} \beta r \frac{xd_2}{xd_1} \left[\frac{1}{C_{23}} \left(\frac{2(x_3)^2}{C_{23}} - \frac{C_{13}}{(xd_1)^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{(1-2\nu)(xd_1)^4 + 2(x_3)^2(xd_1)^2 + (x_3)^4}{(xd_1)^2 C_{13}} - \frac{(x_3)^2}{r^2} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \beta r(xd_1) \left[\frac{-2\nu}{(xd_2)C_{13}} + \frac{1}{C_{23}r^2} \left(\frac{xd_2(x_3)^2}{r^2} + \frac{(1+4\nu)(x_3)^2(xd_2)^2 + 2\nu(x_3)^4 - (1-2\nu)(xd_2)^4}{(xd_2)C_{23}} \right) \right] \end{cases}$ $G_{232}^* = \begin{cases} \beta r(xd_1) \left[\frac{(\nu-1)}{C_{13}(xd_2)} + \frac{1}{C_{23}r^2} \left(\frac{(x_3)^2(xd_2)}{r^2} + \frac{(1-\nu)(x_3)^4 + (3-2\nu)(xd_2)^2(x_3)^2 - \nu(xd_2)^4}{(xd_1)C_{23}} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \beta r \frac{xd_2}{xd_1} \left[\frac{1}{C_{23}} \left(\frac{2(x_3)^2}{C_{23}} - \frac{C_{13}}{(xd_1)^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\nu(xd_1)^4 + 2(x_3)^2(xd_1)^2 + (x_3)^4}{(xd_1)^2 C_{13}} - \frac{(x_3)^2}{r^2} \right) \right] \end{cases}$ $G_{333}^* = \begin{cases} \beta r \frac{xd_2}{xd_1} \left[\frac{1}{C_{23}} \left(\frac{(x_3)^2 - (xd_1)^2}{(xd_1)^2} - \frac{2(x_3)^2}{C_{23}} \right) + \frac{(xd_3)}{C_{13}r^2} \left(\frac{(xd_3)^2}{r^2} - \frac{2(xd_1)^2 + (xd_1)^2(x_3)^2 + (x_3)^4}{(xd_1)^2 C_{13}} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \beta r \frac{xd_1}{xd_2} \left[\frac{1}{C_{13}} \left(\frac{(x_3)^2 - (xd_2)^2}{(xd_2)^2} - \frac{2(x_3)^2}{C_{13}} \right) + \frac{(xd_3)}{C_{23}r^2} \left(\frac{(xd_3)^2}{r^2} - \frac{2(xd_2)^2 + (xd_2)^2(x_3)^2 + (x_3)^4}{(xd_2)^2 C_{23}} \right) \right] \end{cases}$
--	---

Tableau A.2 : Fonctions primitives concernant les contraintes.

Fonction	Voisinage	Expression de la limite	
		$ x_2 < b$	$ x_2 > b$
$F_{13} = -F_{31}$	$x_1 \rightarrow -a$	$-\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\sqrt{4a^2 + xd_2^2} - xd_2 \right) xd_2 \right]_{-b}^{+b}$	$-\alpha(1-2\nu) \ln \left[\frac{\left(\sqrt{4a^2 + xd_2^2} - xd_2 \right)}{xd_2} \right]_{-b}^{+b}$
	$x_1 \rightarrow a$	$\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\sqrt{4a^2 + xd_2^2} - xd_2 \right) xd_2 \right]_{-b}^{+b}$	$\alpha(1-2\nu) \ln \left[\frac{\left(\sqrt{4a^2 + xd_2^2} - xd_2 \right)}{xd_2} \right]_{-b}^{+b}$
$F_{23} = -F_{32}$	$x_2 \rightarrow -b$	$-\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\sqrt{4b^2 + xd_1^2} - xd_1 \right) xd_1 \right]_{-a}^{+a}$	$-\alpha(1-2\nu) \ln \left[\frac{\left(\sqrt{4b^2 + xd_1^2} - xd_1 \right)}{xd_1} \right]_{-a}^{+a}$
	$x_2 \rightarrow b$	$\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\sqrt{4b^2 + xd_1^2} - xd_1 \right) xd_1 \right]_{-a}^{+a}$	$\alpha(1-2\nu) \ln \left[\frac{\left(\sqrt{4b^2 + xd_1^2} - xd_1 \right)}{xd_1} \right]_{-a}^{+a}$
F_{33}	$ x_1 \rightarrow a$ et $ x_2 \rightarrow b$	$\alpha \left(\frac{8abx_3(2(a^2+b^2)+x_3^2)}{(4b^2+x_3^2)(4a^2+x_3^2)\sqrt{4a^2+4b^2+x_3^2}} + 2(1-\nu) \arctan \left[\frac{4ab}{x_3\sqrt{4a^2+4b^2+x_3^2}} \right] \right)$	

Tableau A.3 : Les limites des intégrales concernant les déplacements.

Fonction	Expression de la limite	
	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow a$	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_2 \rightarrow b$
G_{113}	$\beta \left[\frac{1}{2a} \left(\frac{32va^4 + 4a^2(1+2v)(xd_2)^2 + (xd_2)^4}{xd_2(\sqrt{4a^2 + (xd_2)^2})^3} \right) \right]_{-b}^b$	$\beta \left[-\frac{1}{2b} \left(\sqrt{xd_1^2 + 4b^2} \left[\frac{(1-2v)xd_1}{xd_1^2 + 4b^2} - \frac{1}{xd_1} \right] \right) \right]_{-a}^a$
	<i>pour</i> $ x_1 \rightarrow a$ et $ x_2 \rightarrow b$	
	$\frac{8\beta ab \left[32a^2(b^2[b^2 + (1+2v)a^2] + 2va^4) + 8(-b^4 + [(1+6v)a^2 + 4vb^2]a^2)x_3^2 + 2(2v(b^2 + 3a^2) - (3b^2 + a^2))x_3^4 - (1-v)x_3^6 \right]}{\left[(4b^2 + x_3^2)(4a^2 + x_3^2)(4b^2 + 4a^2 + x_3^2) \right]^{\frac{3}{2}}}$	
G_{131}	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow a$	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_2 \rightarrow b$
	$\beta \left[\frac{1}{2a} \left(\frac{16(1-v)a^4 + 4a^2(2-v)(xd_2)^2 + (xd_2)^4}{xd_2(\sqrt{4a^2 + (xd_2)^2})^3} \right) \right]_{-b}^b$	$\beta \left[-\frac{1}{2b} \left(\sqrt{xd_1^2 + 4b^2} \left[\frac{vxd_1}{xd_1^2 + 4b^2} - \frac{1}{xd_1} \right] \right) \right]_{-a}^a$
	<i>pour</i> $ x_1 \rightarrow a$ et $ x_2 \rightarrow b$	
$\frac{4\beta ab \left[64a^2(b^2[b^2 + (2-v)a^2] + (1-v)a^4) + 16[(4-3v)a^2 + 2(1-v)vb^2]a^2 - b^4 \right]x_3^2 + (8(a^2 - b^2) - 4v(b^2 + 3a^2))x_3^4 - (1+v)x_3^6}{\left[(4b^2 + x_3^2)(4a^2 + x_3^2)(4b^2 + 4a^2 + x_3^2) \right]^{\frac{3}{2}}}$		
G_{223}	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow a$	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_2 \rightarrow b$
	$\beta \left[-\frac{1}{2a} \left(\sqrt{xd_2^2 + 4a^2} \left[\frac{(1-2v)xd_2}{xd_2^2 + 4a^2} - \frac{1}{xd_2} \right] \right) \right]_{-b}^b$	$\beta \left[\frac{1}{2b} \left(\frac{32vb^4 + 4b^2(1+2v)(xd_1)^2 + (xd_1)^4}{xd_1(\sqrt{4b^2 + (xd_1)^2})^3} \right) \right]_{-a}^a$
	<i>pour</i> $ x_1 \rightarrow a$ et $ x_2 \rightarrow b$	
$\frac{8\beta ab \left[32b^2(a^2[a^2 + (1+2v)b^2] + 2vb^4) + 8(-a^4 + [(1+6v)b^2 + 4va^2]b^2)x_3^2 + 2(2v(a^2 + 3b^2) - (3a^2 + b^2))x_3^4 - (1-v)x_3^6 \right]}{\left[(4a^2 + x_3^2)(4b^2 + x_3^2)(4b^2 + 4a^2 + x_3^2) \right]^{\frac{3}{2}}}$		
G_{232}	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow a$	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_2 \rightarrow b$
	$\beta \left[-\frac{1}{2a} \left(\sqrt{xd_2^2 + 4a^2} \left[\frac{vxd_2}{xd_2^2 + 4a^2} - \frac{1}{xd_2} \right] \right) \right]_{-b}^b$	$\beta \left[\frac{1}{2b} \left(\frac{16(1-v)b^4 + 4b^2(2-v)(xd_1)^2 + (xd_1)^4}{xd_1(\sqrt{4b^2 + (xd_1)^2})^3} \right) \right]_{-a}^a$
	<i>pour</i> $ x_1 \rightarrow a$ et $ x_2 \rightarrow b$	
$\frac{4\beta ab \left[64b^2(a^2[a^2 + (2-v)b^2] + (1-v)b^4) + 16[(4-3v)b^2 + 2(1-v)va^2]b^2 - a^4 \right]x_3^2 + (8(b^2 - a^2) - 4v(a^2 + 3b^2))x_3^4 - (1+v)x_3^6}{\left[(4a^2 + x_3^2)(4b^2 + x_3^2)(4a^2 + 4b^2 + x_3^2) \right]^{\frac{3}{2}}}$		
G_{333}	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow a$	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_2 \rightarrow b$
	$\beta \left[\frac{1}{2a} \left(\frac{16a^4 + 8a^2(xd_2)^2 + (xd_2)^4}{xd_2(\sqrt{4a^2 + (xd_2)^2})^3} \right) \right]_{-b}^b$	$\beta \left[\frac{1}{2b} \left(\frac{16b^4 + 8b^2(xd_1)^2 + (xd_1)^4}{xd_1(\sqrt{4b^2 + (xd_1)^2})^3} \right) \right]_{-a}^a$
	<i>pour</i> $ x_1 \rightarrow a$ et $ x_2 \rightarrow b$	
$\frac{-32\beta ab \left[(22x_3^4 + 32a^2b^2)(a^2 + b^2)^2 + 24(a^2 + b^2)^3x_3^2 + 8(a^2 + b^2)x_3^6 + x_3^8 \right]}{\left[(4b^2 + x_3^2)(4a^2 + x_3^2)(4b^2 + 4a^2 + x_3^2) \right]^{\frac{3}{2}}}$		

Tableau A.4 : Les limites des intégrales concernant les contraintes.