

Perturbation optimale pour une couche limite bidimensionnelle de Falkner-Skan

S. Saintlos

Université Paul Sabatier

Institut de Mécanique des Fluides, UMR 5502 INP/UPS CNRS
Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France.

Email: saintlos@imft.fr

J. Bretteville

Université Paul Sabatier

Institut de Mécanique des Fluides, UMR 5502 INP/UPS CNRS
Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France.

Email: brette@imft.fr

Résumé

L'étude de la croissance de perturbations infinitésimales est réalisée pour un écoulement stationnaire dans une couche limite bidimensionnelle de Blasius et de Falkner-Skan. Deux modèles significatifs sont établis, un premier modèle valable pour l'écoulement de Blasius et un second valable pour celui de Blasius et de Falkner-Skan. Les perturbations optimales locales et globales sont mises en évidence pour chacun des modèles à l'aide de méthodes adjointes. Les gains obtenus pour des incidences négatives sont supérieurs à ceux du cas de Blasius et a fortiori pour des incidences positives. On montre que le cas bidimensionnel est singulier par rapport au cas tridimensionnel et qu'une seule classe significative de perturbations optimales peut être envisagée pour laquelle le gain reste de l'ordre de l'unité.

Abstract

The infinitesimal perturbations growth has been studied for steady flow in a two-dimensional boundary layer for Blasius and Falkner-Skan flows. Two significant models have been established, a first one available for Blasius flow and a second one for Blasius and Falkner-Skan flows. Local and global optimal perturbations have been put in evidence for each model with the aid of adjoint methods. For negative incidences, the gains obtained are more important than those obtained for Blasius and, of course, for positive incidences. We show that the two-dimensional case is singular with regard to three-dimensional one. One only significant class of optimal perturbations can be considered for which the gain is of order unity.

1. INTRODUCTION

Le but ultime de ces études est de comprendre les mécanismes conduisant à la déstabilisation d'un écoulement. Pour cela, on cherche à étudier la croissance de perturbations infinitésimales dans un écoulement laminaire. La transition de l'écoulement vers la turbulence peut s'effectuer par une croissance modale des perturbations mais, dans certains cas, la transition se produit par une croissance transitoire importante, ce dernier phénomène peut se produire même si l'écoulement est stable au sens de la stabilité linéaire. Ceci est dû à la non normalité des opérateurs linéaires; il y a alors interaction

entre divers modes qui conduit à une amplification sélective des perturbations. Il se produit un transfert de l'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation [1], [2], [3]. Suivant l'importance de cette croissance transitoire, plusieurs scénarios conduisant à la transition peuvent se produire. En résumé, si elle n'est pas trop importante, la transition a en fait lieu par le mécanisme de croissance modale des perturbations. Inversement, on peut avoir une transition dite by-pass par l'intermédiaire d'instabilités secondaires. Pour ces études, nous recherchons la perturbation la plus dangereuse, c'est à dire celle qui induit la plus grande croissance énergétique en régime sous critique, c'est ce que l'on appelle la perturbation optimale.

On se propose d'étudier la croissance de perturbations infinitésimales dans une couche limite bidimensionnelle stationnaire de Blasius et de Falkner-Skan. Sur un intervalle en x donné, on cherche tout d'abord en une abscisse initiale, la perturbation optimale locale, celle qui maximise une certaine fonctionnelle en l'abscisse finale. La perturbation optimale dite globale est, parmi l'ensemble des perturbations optimales locales, celle qui induit le gain maximum. Tout en restant dans un cadre linéaire, une perturbation est superposée à l'écoulement de base de couche limite classique dépendant des deux variables d'espace de sorte que l'approximation d'écoulements parallèles n'est pas faite. On associe à cette perturbation une fonctionnelle énergie à maximiser et on est conduit à la résolution d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle sous contraintes.

2. FORMULATION DU PROBLEME

On considère l'écoulement stationnaire plan d'un fluide newtonien incompressible sur une plaque plane faisant un angle φ par rapport à l'écoulement uniforme amont. Les équations adimensionnelles du problème s'écrivent sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ \text{Re} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= -\text{Re} \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \text{Re} \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= -\text{Re} \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{aligned}$$

où v_x et v_y désignent respectivement les composantes longitudinale et transversale de la vitesse, π la pression et Re le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement. Nous introduisons le petit paramètre ε lié au nombre de Reynolds $\varepsilon = \text{Re}^{-1/2}$.

2.1. Problème de couche limite

On recherche les développements asymptotiques suivants dans les équations de Navier-Stokes avec Y la variable de couche limite telle que $y = \varepsilon Y$:

$$\begin{aligned} v_x &= U_0(x, Y) + \varepsilon U(x, Y, \varepsilon) \\ v_y &= \varepsilon [V_0(x, Y) + \varepsilon V(x, Y, \varepsilon)] \\ \pi &= P_0(x, Y) + \Delta(\varepsilon) P(x, Y, \varepsilon) \end{aligned}$$

Le problème de couche limite de Falkner-Skan s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial Y} = 0$$

$$U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial Y} = -\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial Y^2}; \quad \frac{\partial P_0}{\partial Y} = 0$$

où U_0, V_0, P_0 est la solution du problème de couche limite:

$$U_0(x, Y) = \mu_0(x)f'(\eta) \quad ; \quad V_0(x, Y) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0(x)}{x}} [(n+1)f(\eta) + (n-1)\eta f'(\eta)] \quad ;$$

$$P_0(x, Y) = P_0(x) = -\frac{1}{2} \mu_0^2(x)$$

avec

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0(x)}{x}} Y \quad ; \quad \mu_0(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \quad ; \quad n = \frac{\varphi}{\pi - \varphi}$$

f satisfait au problème:

$$f'''(\eta) + \frac{n+1}{2} f f'' + n(1-f'^2) = 0 \quad ; \quad f(0) = 0 \quad ; \quad f'(0) = 0 \quad ; \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1$$

Le comportement de $f(\eta)$ lorsque $\eta \rightarrow 0$ conduit à:

$$U_0(x, Y) \underset{Y \rightarrow 0}{=} \lambda_n \frac{\mu_0^{3/2}(x)}{x^{1/2}} Y - \frac{n}{2} \frac{\mu_0^2(x)}{x} Y^2 + O(Y^4)$$

$$V_0(x, Y) \underset{Y \rightarrow 0}{=} -\frac{3n-1}{4} \lambda_n \frac{\mu_0^{3/2}(x)}{x^{3/2}} Y^2 + \frac{n(2n-1)}{6} \frac{\mu_0^2(x)}{x^2} Y^3 + O(Y^5)$$

avec $\lambda_n = f''(0)$, et celui de $f(\eta)$ quand $\eta \rightarrow \infty$: $f(\eta) = \eta + v_n + \exp$, où \exp désigne des termes exponentiellement petits, conduit à:

$$U_0(x, Y) \underset{Y \rightarrow \infty}{=} \mu_0(x) \quad \text{et} \quad V_0(x, Y) \underset{Y \rightarrow \infty}{=} -n \frac{\mu_0(x)}{x} \varepsilon Y - \frac{n+1}{2} v_n \varepsilon \sqrt{\frac{\mu_0(x)}{x}}.$$

L'étude au premier ordre montre que l'on a: $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$.

2.2. Problèmes de perturbation dans la couche limite

On se propose de rechercher une perturbation de la solution de base de couche limite. Pour cela, tout en restant dans un cadre linéaire, on superpose à la solution de base une perturbation dont l'amplitude est d'ordre de grandeur de χ pour la vitesse et χ' pour la pression. Les développements suivants sont alors considérés:

$$\begin{aligned}v_x(x, Y) &= U_0(x, Y) + \chi \hat{u}(x, Y) \\v_y(x, Y) &= \varepsilon(V_0(x, Y) + \chi \hat{v}(x, Y)) \\\pi(x, Y) &= P_0(x) + \varepsilon^2 P_0^*(x, Y) + \chi' \hat{p}(x, Y)\end{aligned}$$

où $(\chi\hat{u}, \chi\hat{v}, \chi'\hat{p})$ désignent respectivement les perturbations en vitesse et pression de l'écoulement de base. En reportant ces développements dans les équations de Navier –Stokes, on obtient les équations linéarisées pour la perturbation:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial Y} &= 0 \\U_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial Y} + \hat{v} \frac{\partial U_0}{\partial Y} &= -\frac{\chi'}{\chi} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial Y^2} \\U_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial Y} + \hat{v} \frac{\partial V_0}{\partial Y} &= -\frac{\chi'}{\varepsilon^2 \chi} \frac{\partial \hat{p}}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial Y^2}\end{aligned}$$

avec P_0^* déterminé par la relation:

$$\frac{\partial P_0^*}{\partial Y} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial Y^2} - U_0 \frac{\partial V_0}{\partial x} - V_0 \frac{\partial V_0}{\partial Y}$$

L'étude de la couche limite perturbée permet de mettre en évidence deux problèmes physiques significatifs pour la perturbation, un premier modèle valable pour l'écoulement de Blasius en l'absence de gradient de pression longitudinal et un second modèle avec gradient de pression longitudinal valable pour les écoulements de Blasius et de Falkner-Skan. En effet, on note que suivant l'ordre de grandeur de la perturbation de pression par rapport à celle de la vitesse, deux cas significatifs distincts apparaissent.

2.2.1. Modèle sans gradient de pression longitudinal (Modèle 1)

Un premier modèle significatif apparaît si $\chi' = \chi \varepsilon^2$ auquel cas la perturbation en pression est négligeable devant celle de vitesse. Ce modèle ne fait pas apparaître le gradient de pression longitudinal pour la perturbation et s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial Y} &= 0 \\U_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial Y} + \hat{v} \frac{\partial U_0}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial Y^2} \\U_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial Y} + \hat{v} \frac{\partial V_0}{\partial Y} &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial Y^2}\end{aligned} \tag{1}$$

Ce problème étant découpé en vitesse et pression, l'équation de continuité et l'équation du mouvement longitudinale sont résolues indépendamment de l'équation transversale du mouvement ; le calcul de la pression se déduisant de cette dernière équation.

On note que ce modèle n'est pas valable pour l'écoulement de base de Falkner-Skan. En effet, du fait des comportements de la solution de base lorsque Y tend vers l'infini, la cohérence de l'équation longitudinale du mouvement ne peut être satisfaite excepté si l'on tient compte d'un gradient de pression longitudinal pour la perturbation. Pour l'écoulement de Blasius, le comportement de l'équation longitudinale du mouvement à l'infini conduit à une condition suffisante pour la perturbation : $\frac{\partial \hat{u}}{\partial Y}(x, Y \rightarrow \infty) = 0$. Cette condition sera reprise pour l'écoulement de Falkner-Skan.

Ce modèle conduit à rechercher une perturbation sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} v_x(x, Y) &= U_0(x, Y) + u(x, Y) \\ v_y(x, Y) &= \varepsilon[V_0(x, Y) + v(x, Y)] \\ \pi(x, Y) &= P_0(x) + \varepsilon^2[P_0^*(x, Y) + p(x, Y)] \end{aligned}$$

où la perturbation (u, v, p) est bien indépendante du nombre de Reynolds. Ce problème correspond au modèle présenté par P. Luchini et A. Bottaro [4] en négligeant les effets de courbure de la paroi et en supposant l'écoulement bidimensionnel.

2.2.2. Modèle avec gradient de pression longitudinal (Modèle 2)

Dans le cas où l'on suppose que la perturbation de pression est du même ordre de grandeur que celle de vitesse, c'est à dire $\chi' = \chi$, un second modèle significatif apparaît:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial Y} &= 0 \\ U_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial Y} + \hat{v} \frac{\partial U_0}{\partial Y} &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial Y} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Cela revient à rechercher une perturbation sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} v_x(x, Y) &= U_0(x, Y) + u(x, Y) \\ v_y(x, Y) &= \varepsilon[V_0(x, Y) + v(x, Y)] \\ \pi(x, Y) &= P_0(x) + p(x, Y) \end{aligned}$$

où la perturbation (u, v, p) est bien indépendante du nombre de Reynolds.

Ce modèle est maintenant réaliste pour l'écoulement de Falkner-Skan et a fortiori pour celui de Blasius. Par ailleurs, la structure de ce modèle, de par la présence du gradient de pression longitudinal, permet d'envisager la possibilité de décollement de la couche limite [5]. On note ici que les équations

aux perturbations sont du même type que celle de l'écoulement de base à l'ordre zéro contrairement au premier modèle. Les conditions aux limites de ces problèmes perturbés sont l'adhérence et l'imperméabilité du fluide à la paroi: $u(x,0) = v(x,0) = 0$ ainsi que la condition à l'infini :

$$\frac{\partial u}{\partial Y}(x, Y \rightarrow \infty) = 0. \text{ Une condition initiale est nécessaire, on peut choisir de se donner en entrée : } u(x_e, Y).$$

2.3. Introduction de la fonctionnelle gain

On note que ces problèmes sont évolutifs dans le sens des x croissants et on se propose de les résoudre d'une abscisse initiale $x = x_e$ à une abscisse finale $x = x_f$. La recherche, dans la couche limite, de la perturbation optimale est effectuée en choisissant la solution de Falkner-Skan comme solution de base. La composante longitudinale de la vitesse de perturbation en une abscisse initiale est déterminée en maximisant une fonction gain en une abscisse finale donnée. Ce gain est généralement défini à partir des énergies locales de perturbation aux abscisses finale et initiale et la perturbation optimale dépend du choix effectué. L'énergie locale de perturbation $e_{loc}(x, Y)$ est définie (cf. Annexe) comme l'énergie de l'écoulement de base perturbé à laquelle est soustraite l'énergie de l'écoulement de base, à savoir:

$$e_{loc} = \left| U_0 u + \frac{u^2}{2} + \varepsilon^2 \left(p + V_0 v + \frac{v^2}{2} \right) \right| \quad \text{pour le Modèle 1;}$$

$$e_{loc} = \left| p + U_0 u + \frac{u^2}{2} + \varepsilon^2 \left(V_0 v + \frac{v^2}{2} \right) \right| \quad \text{pour le Modèle 2.}$$

S'il est généralement classique de travailler avec l'énergie cinétique, la pression est introduite dans l'énergie locale pour assurer l'évanescence quand $Y \rightarrow \infty$ de l'énergie de perturbation choisie.

Le problème de perturbation optimale consiste à maximiser le gain $G(x_e, x_f)$ défini comme le rapport des énergies dans la section finale et la section initiale:

$$G(x_e, x_f) = \frac{\int_0^\infty e_{loc}(x_f, Y) dY}{\int_0^\infty e_{loc}(x_e, Y) dY}$$

On rappelle qu'en tridimensionnel ou en instationnaire, lorsqu'on recherche des solutions périodiques en temps ou en espace selon la variable z , les termes de couplage provenant des doubles produits entre la perturbation et l'écoulement de base dans l'énergie de l'écoulement perturbé s'annulent après intégration sur une période. Si cette hypothèse de périodicité n'est pas faite, ces termes de couplage subsistent et conduisent à des intégrales non bornées. De ce fait, nous définissons dans le cadre bidimensionnel stationnaire une énergie locale de perturbation ne prenant pas en compte ces termes de couplage, à savoir les termes $U_0 u$ et $V_0 v$.

L'énergie locale de perturbation $e_{loc}(x, Y)$ devient:

$$e_{loc} = \left| \frac{u^2}{2} + \varepsilon^2 \left(p + \frac{v^2}{2} \right) \right| \quad \text{pour le Modèle 1;}$$

$$e_{loc} = \left| p + \frac{u^2}{2} + \varepsilon^2 \frac{v^2}{2} \right| \quad \text{pour le Modèle 2.}$$

P. Luchini dans [3] montre, dans le cas tridimensionnel, que des gains de l'ordre du nombre de Reynolds sont obtenus lorsque la perturbation d'entrée ne fait intervenir que les composantes transversales de la vitesse de perturbation. Dans le cas contraire, les gains restent de l'ordre de l'unité. Ainsi, deux grandes classes de perturbations optimales sont mises en évidence par P. Luchini.

Dans le cas bidimensionnel, on montre que, quelque soit le modèle significatif étudié (Modèle 1 ou Modèle 2) les gains ne peuvent être que de l'ordre de l'unité.

En effet, du fait du caractère bidimensionnel, la vitesse transversale de perturbation n'étant pas nulle lorsque $Y \rightarrow \infty$, l'énergie dans la section initiale devient infinie. On montrera en Annexe 2 que, dans le cas du Modèle 1, même si cette vitesse de perturbation s'annulait à l'infini, on ne peut obtenir des gains de l'ordre du nombre de Reynolds.

De plus, pour le second modèle, l'absence de termes en $\frac{\partial v}{\partial x}$ dans les équations aux perturbations

interdit de rechercher une perturbation optimale portant sur la vitesse transversale de perturbation v .

Ainsi, le gain est de l'ordre de l'unité. Il s'écrit respectivement $G_1(x_e, x_f)$ pour le Modèle 1 et

$G_2(x_e, x_f)$ pour le Modèle 2 sous la forme:

$$G_1(x_e, x_f) = \frac{\int_0^\infty u^2(x_f, Y) dY}{\int_0^\infty u^2(x_e, Y) dY} ; \quad G_2(x_e, x_f) = \frac{\int_0^\infty \left| p(x_f) + \frac{u^2}{2}(x_f, Y) \right| dY}{\int_0^\infty \left| p(x_e) + \frac{u^2}{2}(x_e, Y) \right| dY}$$

Du comportement de l'équation longitudinale du mouvement (2) quand $Y \rightarrow \infty$, on déduit compte tenu des hypothèses effectuées que:

$$p(x) = -\frac{u^2(x, Y \rightarrow \infty)}{2}. \quad \text{Ainsi, } G_2(x_e, x_f) = \frac{\int_0^\infty (u^2(x_f, Y) - u^2(x_f, Y \rightarrow \infty)) dY}{\int_0^\infty (u^2(x_e, Y) - u^2(x_e, Y \rightarrow \infty)) dY}$$

2.4. Formulation variationnelle

2.4.1. Modèle sans gradient de pression longitudinal (Modèle 1)

Compte tenu du caractère linéaire de la perturbation, la majoration du gain $G_1(x_e, x_f)$ revient à

majorer l'énergie de sortie $E(u) = \int_0^\infty \frac{u^2}{2}(x_f, Y) dY$ en imposant la condition de normalisation:

$\int_0^\infty \frac{u^2}{2}(x_e, Y) dY = 1$. Ceci conduit à l'étude de la fonctionnelle:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = & E(\mathbf{u}) - \int_0^\infty \left\{ \int_{x_e}^{x_f} \mathbf{a}(x, Y) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial Y} \right) dx \right\} dY \\
& - \int_0^\infty \left\{ \int_{x_e}^{x_f} \mathbf{b}(x, Y) \left(\frac{\partial(\mathbf{U}_0 \mathbf{u})}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial Y} + \mathbf{V}_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial Y} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial Y^2} \right) dx \right\} dY \\
& - \int_0^\infty \left\{ \int_{x_e}^{x_f} \mathbf{c}(x, Y) \left(\mathbf{U}_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial x} + \mathbf{V}_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial Y} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial Y} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial Y} - \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial Y^2} \right) dx \right\} dY \\
& - \mathbf{d} \left(\int_0^\infty \mathbf{e}(x_e, Y) dY - 1 \right)
\end{aligned}$$

dans laquelle \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} sont les multiplicateurs de Lagrange liés aux contraintes du problème, à savoir l'équation de conservation de la masse, les équations du mouvement auxquelles on ajoute la contrainte de normalisation de l'énergie d'entrée.

La recherche de la perturbation optimale dans le sens de la maximisation de E s'obtient en écrivant que $\overline{\text{Grad}}_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}}(L) = \vec{0}$.

Les dérivations par rapport aux variables \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} redonnent les équations du problème physique (problème direct) sans autre condition particulière et la condition de normalisation.

L'annulation des dérivées respectivement par rapport aux variables \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{p} conduisent après intégrations par parties à:

$$\begin{aligned}
\partial L_{\delta \mathbf{u}} = & \int_0^\infty [\mathbf{u}(x, Y) - (\mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{U}_0)]_{x_f} \delta \mathbf{u}_{x_f} dY - \int_0^\infty [d \mathbf{u}(x, Y) - (\mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{U}_0)]_{x_e} \delta \mathbf{u}_{x_e} dY \\
& + \int_{x_e}^{x_f} \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{U}_0) - \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} (\mathbf{b} \mathbf{V}_0) + \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial Y^2} - \mathbf{c} \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial x} \right] \delta \mathbf{u} dY dx \\
& - \int_{x_e}^{x_f} \left[(\mathbf{b} \mathbf{V}_0 + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial Y}) \delta \mathbf{u} - \mathbf{b} \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial Y} \right]_{Y=0}^{Y=\infty} dx = 0 \\
\partial L_{\delta \mathbf{v}} = & \int_0^\infty [c \mathbf{U}_0 \delta \mathbf{v}]_{x_e}^{x_f} dY - \int_{x_e}^{x_f} \int_0^\infty \left[-\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial Y} + \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial x} (c \mathbf{U}_0) - \frac{\partial}{\partial Y} (c \mathbf{V}_0) + c \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial Y} - \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2} \right] \delta \mathbf{v} dY dx \\
& - \int_{x_e}^{x_f} \left[(\mathbf{a} + c \mathbf{V}_0 + \frac{\partial c}{\partial Y}) \delta \mathbf{v} \right]_{Y=0}^{Y=\infty} - \left[c \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial Y} \right]_{Y=0}^{Y=\infty} dx = 0 \\
\partial L_{\delta \mathbf{p}} = & \int_{x_e}^{x_f} \int_0^\infty \frac{\partial c}{\partial Y} \delta \mathbf{p} dY dx - \int_{x_e}^{x_f} [c \delta \mathbf{p}]_{Y=0}^{Y=\infty} dx = 0
\end{aligned}$$

Ces relations doivent être vérifiées quelques soient les accroissements $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{v}$, $\delta \mathbf{p}$ moyennant les restrictions déduites des conditions aux limites sur le problème direct, à savoir:

$$\delta \mathbf{u}(x, 0) = 0 \quad ; \quad \delta \mathbf{v}(x, 0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow \infty} = 0.$$

Par ailleurs, la présence du groupement $(a + bU_0)$ conduit à l'introduction d'une nouvelle variable adjointe $A(x, Y) = a(x, Y) + b(x, Y)U_0(x, Y)$ permettant d'écrire les conditions de passage entre les problèmes direct et adjoint:

$$A(x_f, Y) = u(x_f, Y) \quad \text{et} \quad u(x_e, Y) = \frac{A(x_e, Y)}{d}$$

Ces égalités doivent être entendues au sens faible puisqu'elles sont déduites de relations intégrales. On peut donc admettre en certains points des discontinuités sur les fonctions adjointes, ceci n'étant pas possible pour les variables physiques.

Pour le problème adjoint, les conditions aux limites s'écrivent:

$$a(x, Y \rightarrow \infty) = 0 ; b(x, Y \rightarrow \infty) = 0 ; b(x, 0) = 0 ; c(x, Y \rightarrow \infty) = 0 ; c(x, 0) = 0$$

Le problème dual est parabolique dans le sens rétrograde de x_f à x_e :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (a + bU_0) - b \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} (bV_0) + \frac{\partial^2 b}{\partial Y^2} &= c \frac{\partial V_0}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial Y} - b \frac{\partial U_0}{\partial Y} &= - \frac{\partial}{\partial x} (cU_0) - \frac{\partial}{\partial Y} (cV_0) + c \frac{\partial V_0}{\partial Y} - \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial c}{\partial Y} &= 0 \end{aligned}$$

Puisque la variable c ne dépend pas de Y , et d'après les conditions aux limites sur c , il vient $c(x, Y) = 0$. Compte tenu de la condition de normalisation:

$$d = \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^\infty A^2(x_e, Y) dY}$$

la condition d'entrée du problème direct s'écrit:

$$u(x_e, Y) = \frac{A(x_e, Y)}{\sqrt{\frac{1}{2} \int_0^\infty A^2(x_e, Y) dY}}$$

Pour assurer l'adhérence du fluide à la paroi, $u(x, 0) = 0$, et compte tenu des conditions de passage entre les problèmes direct et adjoint, on doit avoir $A(x_e, 0) = 0$ et $A(x_f, 0) = 0$. Par continuité en x , on impose la condition aux limites : $A(x, 0) = 0 ; x_e \leq x \leq x_f$. Le problème adjoint peut être écrit en fonction des variables A et b sous la forme:

$$\frac{\partial A}{\partial x} - b \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} (bV_0) + \frac{\partial^2 b}{\partial Y^2} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial A}{\partial Y} - 2b \frac{\partial U_0}{\partial Y} - U_0 \frac{\partial b}{\partial Y} = 0 \quad (4)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$A(x, Y \rightarrow \infty) = 0 ; A(x, 0) = 0 ; b(x, Y \rightarrow \infty) = 0 ; b(x, 0) = 0 .$$

On remarque que le comportement de l'équation adjointe (4) lorsque Y tend vers l'infini conduit à une condition suffisante $\left. \frac{\partial A}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow \infty} = 0$ analogue à celle écrite pour $\left. \frac{\partial u}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow \infty}$ sur le problème direct. On

note que l'équation adjointe (3) nécessite $\left. \frac{\partial b}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow \infty} = 0$ puisque $V_0|_{Y \rightarrow \infty} \neq 0$. Il est intéressant de noter que l'équation (3) peut être réécrite compte tenu de (4) sous la forme:

$$U_0 \frac{\partial A}{\partial x} + V_0 \frac{\partial A}{\partial Y} + \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} = 2b \left(U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial Y} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial Y^2} \right) + 3 \frac{\partial b}{\partial Y} \frac{\partial U_0}{\partial Y} .$$

Ceci montre que A joue le rôle dual de la perturbation u , l'équation de continuité étant ici dans le problème adjoint remplacée par l'équation (4) qui permet de déterminer la fonction b pour un x donné après détermination de A .

On notera, comme signalé précédemment, que seule la recherche d'une condition initiale pour u est effectuée, compte tenu du comportement de la vitesse transversale de perturbation à l'infini.

En faisant l'hypothèse d'évanescence de cette vitesse transversale à l'infini et même si ce Modèle 1 laisse présumer une possibilité de choix d'une vitesse transversale initiale pour une perturbation de vitesse longitudinale nulle en entrée, on montre que ce choix est impossible puisqu'on retrouve la dégénérescence des équations adjointes avec $c(x, Y) = 0$ ce qui conduit à une vitesse transversale initiale nulle (cf. Annexe 2).

Le gain défini par P. Luchini [3] dans le cas tridimensionnel instationnaire pour un écoulement de Blasius, lequel est alors du même ordre de grandeur que le nombre de Reynolds, n'est pas applicable au cas bidimensionnel du fait de cette dégénérescence des équations adjointes. Le cas bidimensionnel stationnaire est donc singulier ce qui est conforme avec les tendances des résultats de P. Luchini pour des écoulements faiblement tridimensionnels.

2.4.2. Modèle avec gradient de pression longitudinal (Modèle 2)

De même que pour le Modèle 1, la majoration du gain $G_2(x_e, x_f)$ revient à la majoration de l'énergie

de sortie $E(u, p) = \int_0^\infty \left(p(x_f) + \frac{u^2}{2}(x_f, Y) \right) dY$ et conduit à l'étude de la fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned} L(u, v, p, a, b, c, d) = & E(u, p) - \int_0^\infty \left\{ \int_{x_e}^{x_f} a(x, Y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) dx \right\} dY \\ & - \int_0^\infty \left\{ \int_{x_e}^{x_f} b(x, Y) \left(\frac{\partial(U_0 u)}{\partial x} + v \frac{\partial U_0}{\partial Y} + V_0 \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) dx \right\} dY \\ & - \int_0^\infty \left\{ \int_{x_e}^{x_f} c(x, Y) \frac{\partial p}{\partial Y} dx \right\} dY - d \left(\int_0^\infty e(x_e, Y) dY - 1 \right) \end{aligned}$$

La recherche de la perturbation optimale dans le sens de la maximisation de E conduit aux relations :

$$\begin{aligned} \partial L_{\delta u} &= \int_0^{\infty} [u(x, Y) - (a + bU_0)]_{x_f} \delta u_{x_f} dY - \int_0^{\infty} [du(x, Y) - (a + bU_0)]_{x_e} \delta u_{x_e} dY \\ &+ \int_{x_e}^{x_f} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} (a + bU_0) - b \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} (bV_0) + \frac{\partial^2 b}{\partial Y^2} \right] \delta u dY dx \\ &- \int_{x_e}^{x_f} \left[(bV_0 + \frac{\partial b}{\partial Y}) \delta u - b \frac{\partial \delta u}{\partial Y} \right]_{Y=0}^{Y=\infty} dx = 0 \end{aligned}$$

$$\partial L_{\delta v} = \int_{x_e}^{x_f} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial a}{\partial Y} - b \frac{\partial U_0}{\partial Y} \right] \delta v dY dx - \int_{x_e}^{x_f} [a \delta v]_{Y=0}^{Y=\infty} dx = 0$$

$$\begin{aligned} \partial L_{\delta p} &= \int_0^{\infty} [1 - b]_{x_f} \delta p_{x_f} dY - \int_0^{\infty} [d - b]_{x_e} \delta p_{x_e} dY + \int_{x_e}^{x_f} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial Y} \right] \delta p dY dx \\ &- \int_{x_e}^{x_f} [c \delta p]_{Y=0}^{Y=\infty} dx = 0 \end{aligned}$$

Ces relations doivent être vérifiées quelques soient les accroissements δu , δv , δp moyennant les restrictions déduites des conditions aux limites sur le problème direct, à savoir:

$$\delta u(x, 0) = 0; \delta v(x, 0) = 0; \left. \frac{\partial \delta u}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow \infty} = 0$$

En introduisant le groupement $A(x, Y) = a(x, Y) + b(x, Y)U_0(x, Y)$ les conditions d'entrée des problèmes direct et adjoint s'écrivent :

$$A(x_f, Y) = u(x_f, Y) \quad \text{et} \quad u(x_e, Y) = \frac{A(x_e, Y)}{d}$$

$$b(x_f, Y) = 1 \quad \text{et} \quad d = b(x_e, Y)$$

Les conditions aux limites s'écrivent:

$$a(x, Y \rightarrow \infty) = 0; b(x, Y \rightarrow \infty) = 0; b(x, 0) = 0; c(x, Y \rightarrow \infty) = 0; c(x, 0) = 0$$

Le problème dual s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} + U_0 \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} (bV_0) + \frac{\partial^2 b}{\partial Y^2} &= 0 \\ \frac{\partial a}{\partial Y} - b \frac{\partial U_0}{\partial Y} &= 0 \\ \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial Y} &= 0 \end{aligned}$$

Compte tenu de la condition de normalisation:

$$d = \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{1}{2} (A^2(x_e, Y) - A^2(x_e, Y \rightarrow \infty)) dY}$$

la condition d'entrée du problème direct s'écrit:

$$u(x_e, Y) = \frac{A(x_e, Y)}{\sqrt{\int_0^{\infty} \frac{1}{2} (A^2(x_e, Y) - A^2(x_e, Y \rightarrow \infty)) dY}}$$

D'après l'adhérence du fluide à la paroi, on a $u(x_e, 0) = 0$, et donc $A(x_e, 0) = 0$. Comme précédemment, par prolongement par continuité, on impose $A(x, 0) = 0$.

Le problème adjoint peut être écrit en variable A, b, et c:

$$\frac{\partial A}{\partial x} - b \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} (bV_0) + \frac{\partial^2 b}{\partial Y^2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial A}{\partial Y} - 2b \frac{\partial U_0}{\partial Y} - U_0 \frac{\partial b}{\partial Y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial Y} = 0 \quad (5)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} A(x, Y \rightarrow \infty) = 0; A(x, 0) = 0; b(x, Y \rightarrow \infty) = 0; b(x, 0) = 0 \\ c(x, Y \rightarrow \infty) = 0; c(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

On peut donc résoudre le système des équations (3) et (4) indépendamment de (5). La résolution de l'équation (4) en $x=x_f$ conduit à la détermination de la fonction $b(x_f, Y)$, qui est a priori incompatible avec la condition $b(x_f, Y) = 1$. Cependant, la recherche de solutions faibles pour les fonctions adjointes permet d'abandonner cette dernière condition.

3. METHODE DE RESOLUTION ET RESULTATS

Pour le traitement numérique du problème adjoint, deux méthodes de résolution sont généralement envisageables. Une première conduit à considérer l'opérateur adjoint du problème direct discrétisé. La seconde, qui est mise en œuvre dans ce travail, consiste à résoudre le problème adjoint par discrétisation des équations correspondantes.

Les deux problèmes, direct et adjoint, sont résolus à l'aide d'une méthode de discrétisation d'ordre 2, basée sur le schéma de Schlichting [7]. Des conditions aux limites de Neumann, compatibles avec les équations des problèmes considérés et moins contraignantes que celles de Dirichlet, sont utilisées lorsque Y tend vers l'infini pour les fonctions u, A et b.

La résolution du problème direct, en partant d'une condition initiale arbitraire à l'itération zéro sur $u^0(x_e, Y)$, permet d'obtenir la condition initiale du problème adjoint en x_f . Après résolution de ce dernier, on obtient une nouvelle condition initiale $u^1(x_e, Y)$ pour le problème direct. L'obtention de la perturbation optimale en $x=x_e$ se fait pas itérations successives.

La convergence est obtenue entre deux itérations successives lorsque la précision sur le gain est suffisamment petite :

$$\begin{aligned} \left| G_2^{k+1}(x_e, x_f) - G_2^k(x_e, x_f) \right| &\leq 10^{-10} && \text{pour l'écoulement de base de Blasius} \\ \left| G_2^{k+1}(x_e, x_f) - G_2^k(x_e, x_f) \right| &\leq 10^{-5} && \text{pour l'écoulement de base de Falkner-Skan.} \end{aligned}$$

Tous les résultats seront présentés en choisissant $x_e=1$. Si un autre choix était fait, les résultats seraient similaires puisque l'écoulement de base est obtenu à partir de solutions auto-semblables.

3.1. Ecoulement de Blasius

Les deux modèles permettent de retrouver les mêmes gains pour différentes valeurs de x_f (figure 1). La comparaison entre ces modèles est effectuée en considérant l'énergie

$$e = \frac{1}{2} \left(u^2(x, Y) - u^2(x, Y \rightarrow \infty) \right).$$

Si ce choix s'impose pour le Modèle 2, il est compatible avec le Modèle 1 puisque dans le cas de Blasius, u s'annule à l'infini.

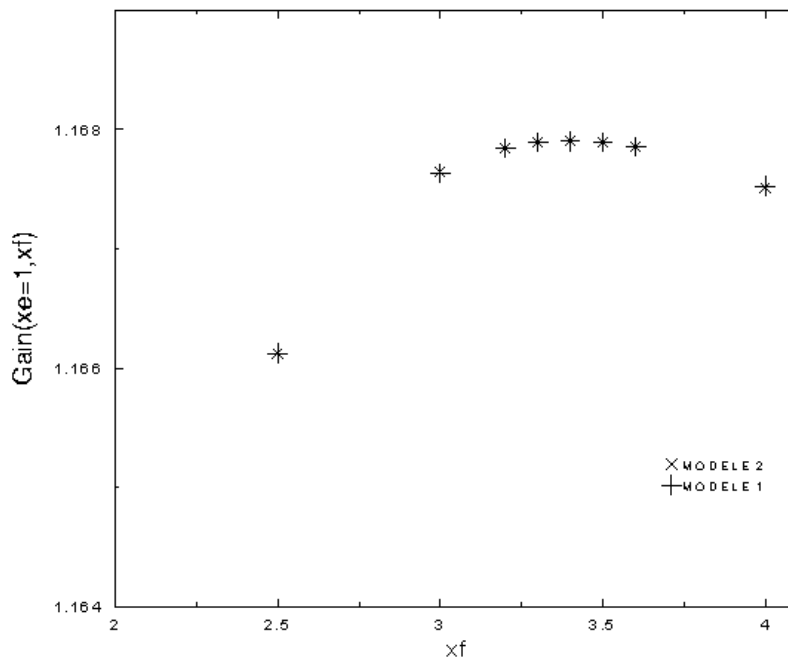


Figure 1: Comparaison des gains obtenus selon les modèles (1) et (2) pour $\varphi = 0^\circ$.

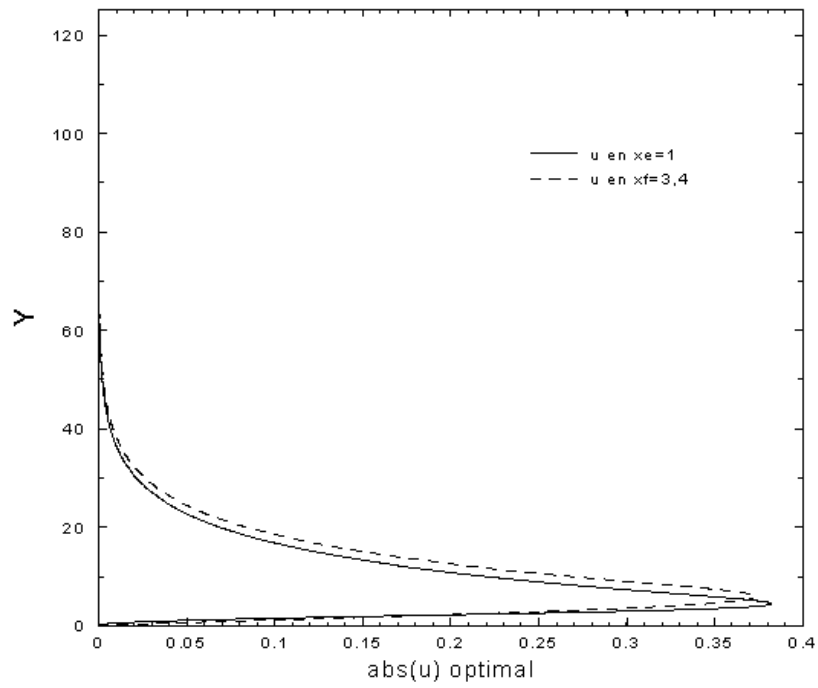


Figure 2: Perturbation optimale globale pour $\varphi = 0^\circ$.

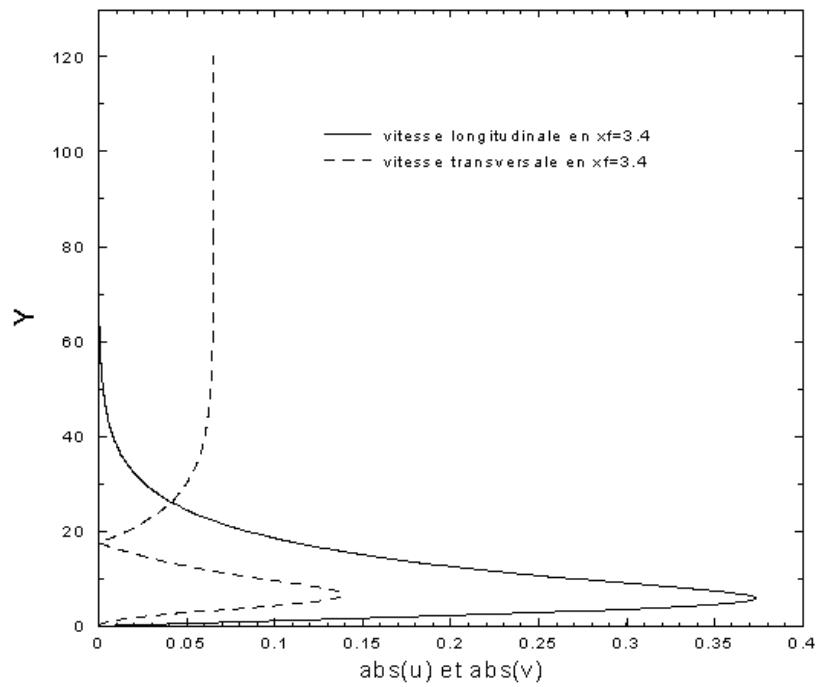


Figure 3: Réponse de l'écoulement à la perturbation optimale globale pour $\varphi = 0^\circ$.

La perturbation optimale globale dans le cas de l'écoulement de Blasius est obtenue quelque soit le modèle pour l'abscisse $x_f = 3.4$ avec un gain de 1.1679.

La représentation de la perturbation optimale globale et la composante longitudinale de la perturbation induite en $x_f = 3.4$ illustre l'amplification de cette perturbation (figure 2).

La réponse de l'écoulement à cette perturbation optimale globale à l'abscisse finale est représentée sur la figure 3.

3.2. Ecoulement de Falkner-Skan

Les perturbations optimales sont recherchées en $x_c = 1$ à l'aide du modèle avec gradient de pression longitudinal pour diverses incidences.

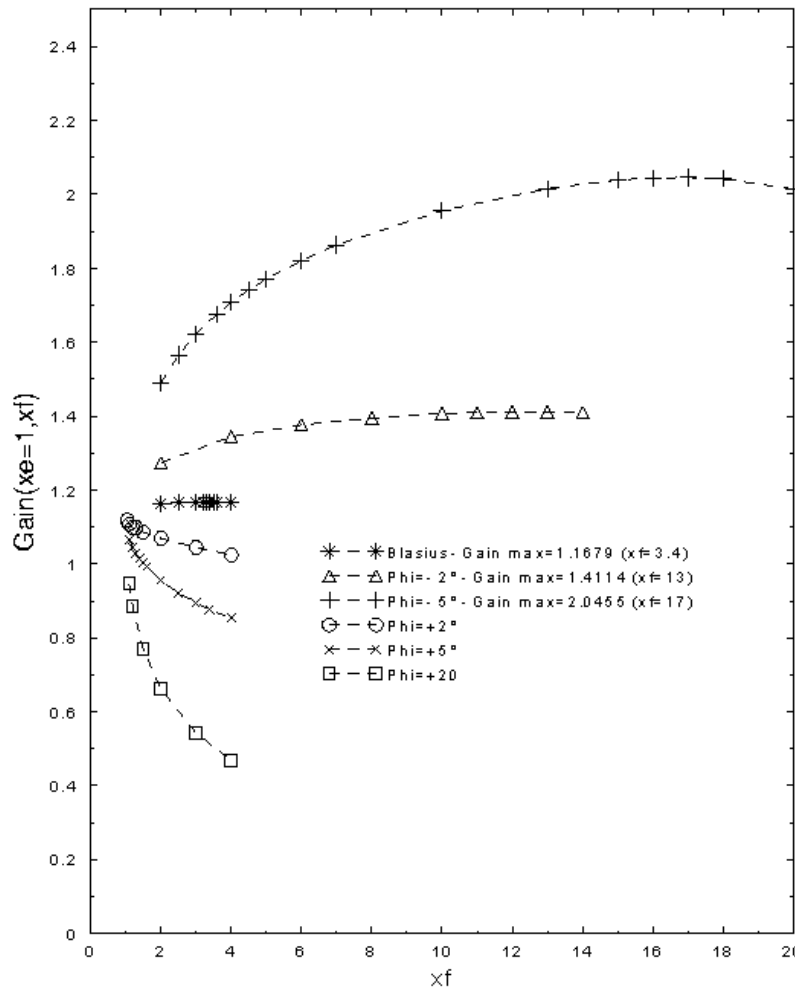


Figure 4: Influence de l'incidence sur les gains en fonction de x_f pour $\varphi = -2^\circ, \varphi = -5^\circ, \varphi = 0^\circ, \varphi = 2^\circ, \varphi = 5^\circ, \varphi = 20^\circ$.

On obtient, d'une manière générale, pour une incidence donnée et pour une abscisse finale choisie, la perturbation optimale locale, c'est à dire la perturbation optimale initiale qui induit le plus grand gain en l'abscisse x_f choisie et pour l'incidence donnée.

On recherche, dans un deuxième temps, pour une incidence donnée, l'abscisse finale pour laquelle l'amplification d'une perturbation initiale est maximale, c'est à dire la perturbation optimale globale pour une incidence donnée. La croissance énergétique est représentée sur la figure 4 en fonction des incidences et des abscisses.

Différents choix de l'incidence sont effectués respectivement à -2° , -5° , 0° , 2° , 5° , 20° (figure 4). Lorsque l'incidence est positive, l'écoulement de base est accéléré et le gain décroît lorsque l'incidence croît. Les plus grands gains sont obtenus au voisinage de x_e . Néanmoins, il n'a pas été possible de trouver la perturbation optimale globale pour les incidences positives considérées. Pour des faibles incidences $\varphi = 2^\circ$ et $\varphi = 5^\circ$, des gains supérieurs à l'unité sont obtenus. Par contre, pour une incidence de 20° , les résultats montrent qu'il y a atténuation de la perturbation quelque soit x_f , le gain étant toujours inférieur à l'unité.

Lorsque l'écoulement de base est décéléré ($\varphi < 0$), il est plus facile de déstabiliser l'écoulement et on trouve alors que l'amplification induite est d'autant plus importante que l'incidence augmente en valeur absolue. Ce phénomène d'amplification se conserve sur des distances d'autant plus éloignées de la section d'entrée que l'écoulement de base est décéléré.

On note que dans le cas d'une incidence de -5° , le gain maximal correspondant à la perturbation optimale globale trouvée en $x_f = 17$ est de 2,0455 ; son amplification et la réponse de l'écoulement à cette perturbation sont illustrées respectivement sur les figures 5 et 6.

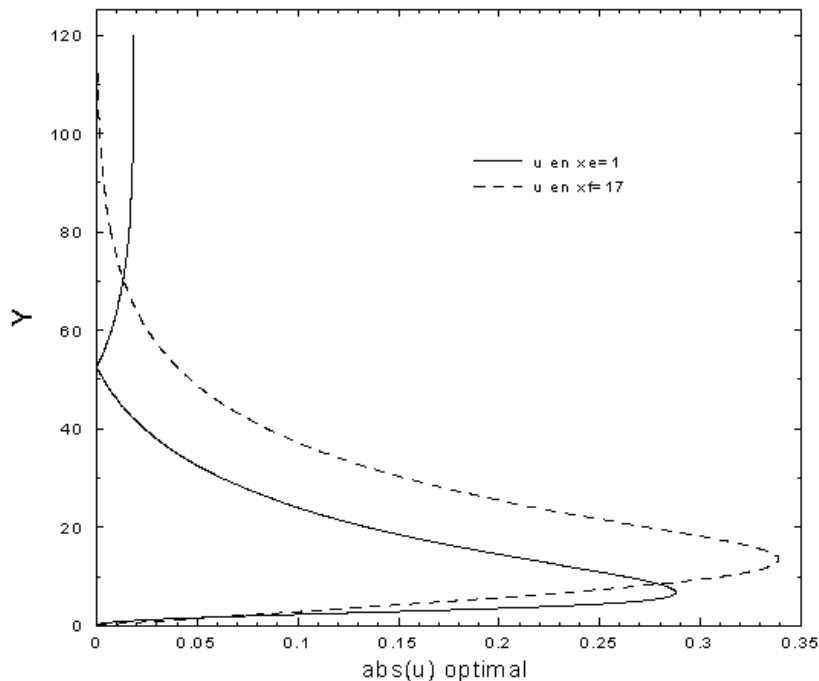


Figure 5: Perturbation optimale globale pour $\varphi = -5^\circ$.

Les figures 7 et 8 représentent après optimisation pour l'abscisse $x_f = 4$, la perturbation optimale locale obtenue pour la vitesse longitudinale en entrée pour différentes incidences. La figure 7 montre que pour un écoulement de base décéléré ($\varphi = 0^\circ, -2^\circ, -5^\circ$), la perturbation optimale locale croît lorsque l'incidence augmente en valeur absolue et donc l'écoulement de base fournit de l'énergie à la perturbation ce qui explique que les gains obtenus croissent. Dans le cas d'un écoulement de base

accélééré ($\varphi = 2^\circ, 5^\circ, 20^\circ$) (figure 8), c'est la perturbation qui restitue de l'énergie à l'écoulement principal.

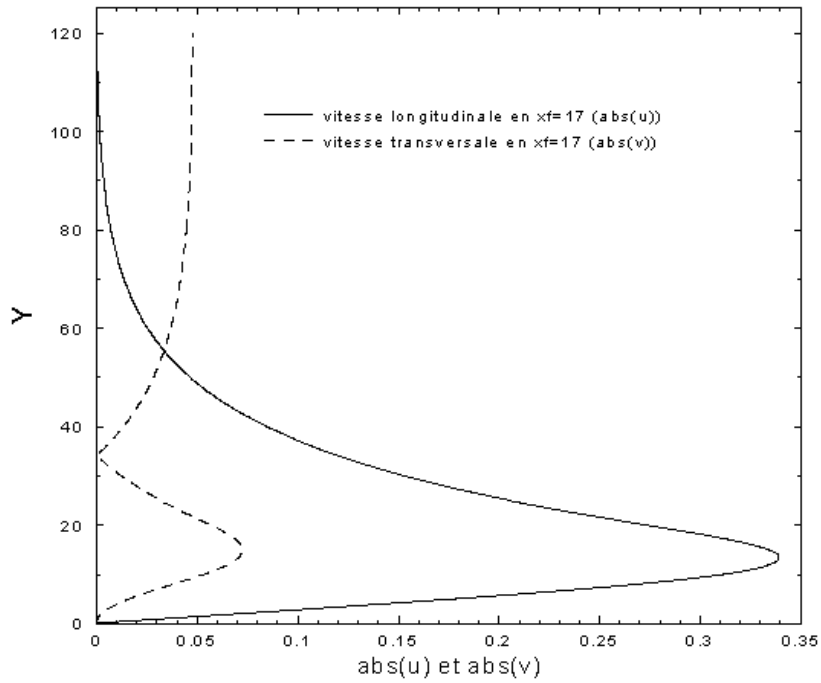


Figure 6: Réponse de l'écoulement à la perturbation optimale globale pour $\varphi = -5^\circ$.

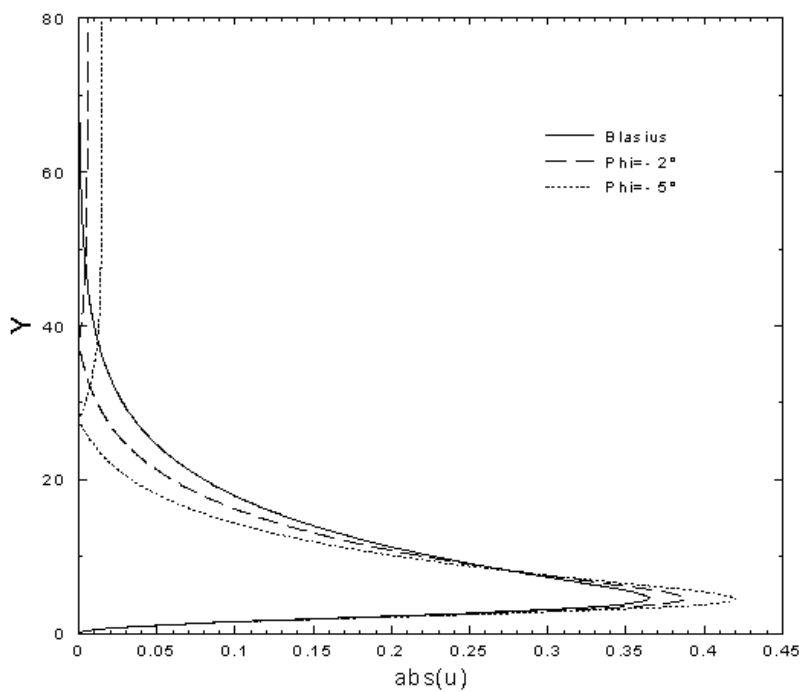


Figure 7: Perturbations optimales locales pour $x_f = 4$ et pour $\varphi = 0^\circ, \varphi = -2^\circ, \varphi = -5^\circ$.

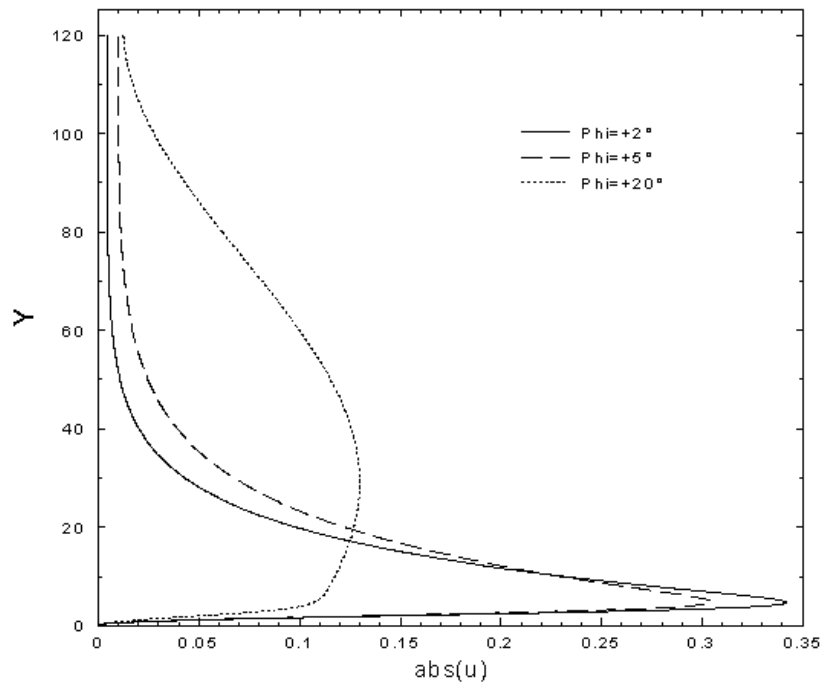


Figure 8: Perturbations optimales locales pour $x_f=4$ et pour $\varphi = 2^\circ$, $\varphi = 5^\circ$, $\varphi = 20^\circ$.

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Des deux Modèles 1 et 2 significatifs de perturbations mis en évidence pour l'écoulement de Blasius, seul celui avec gradient de pression longitudinal (Modèle 2), est à retenir pour l'écoulement de Falkner-Skan. Nous avons cherché à optimiser une fonctionnelle liée à l'énergie locale de perturbation. Une fois ce choix effectué, les perturbations optimales locales sont obtenues et la perturbation optimale globale, si elle existe, est déterminée pour ces écoulements.

L'étude montre qu'il existe des difficultés propres au caractère bidimensionnel, du fait, entre autre, que la vitesse transversale de perturbation ne s'annule à la sortie de la couche limite. On montre, par ailleurs, que le cas bidimensionnel est singulier par rapport au tridimensionnel conformément aux tendances des résultats dans un écoulement faiblement tridimensionnel [3], dans la mesure où seuls des gains de l'ordre de l'unité peuvent être établis.

On se propose de reprendre le problème sur la base d'une solution uniformément valable dans tout le domaine de l'écoulement à l'ordre Re^{-1} , établie à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés, au lieu de la solution auto-semblable de couche limite classique. Il est envisagé sur le problème de recherche de perturbation optimale, à l'aide de cette nouvelle solution, d'étudier s'il est alors ainsi possible d'induire des gains de l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds.

REFERENCES

1. Ellingsen T., Palm E., Stability of linear flow, Physics of fluids, vol. 18, n° 4, pp.487-488, (1975).

2. Landhal M.T., A note on an algebraic instability of the boundary layer over a flat surface, J. Fluid Mech., vol. 98, pp. 243-251, (1980).
3. Luchini P., Reynolds-number-independant instability of the boundary layer over a flat surface : optimal perturbations, J. Fluid Mech., vol. 404, pp. 289-309, (2000).
4. Luchini P., Bottaro A., Görtler vortices : a backward-in-time approach of receptivity problem, J. Fluid Mech., vol. 363, pp. 1-23, (1998).
5. Bretteville J., Saintlos S., Théories multicouches pour l'écoulement de Falkner-Skan, C. R. Acad. Sci, Paris, t. 329, Série II b, pp. 19-25, (2001).
6. Corbett P., Bottaro A., Optimal perturbations for boundary layers subject to stream-wise pressure gradient, Physics of Fluids, vol. 12, n° 1, pp. 120-130, (2000).
7. Schlichting H., Boundary layer Theory, Mc Graw-Hill, New York, (1979).

ANNEXE 1 : Choix de la fonctionnelle à maximiser

On a montré que l'écoulement potentiel est valable jusqu'à l'ordre ε et que la solution s'écrit :

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= \tilde{u}_b(x, y) + O(\varepsilon^2) = \tilde{u}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{u}_1(x, y) + O(\varepsilon^2) \\ v_y(x, y) &= \tilde{v}_b(x, y) + O(\varepsilon^2) = \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{v}_1(x, y) + O(\varepsilon^2) \\ \pi(x, y) &= \tilde{p}_b(x, y) + O(\varepsilon^2) = \tilde{p}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{p}_1(x, y) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie de base : $\tilde{e}_b = \tilde{p}_b + \frac{\tilde{u}_b^2 + \tilde{v}_b^2}{2} = 0$.

Toute autre forme d'énergie ne contenant pas l'ensemble de ces termes ne serait pas bornée à l'infini ce qui ne serait pas physiquement admissible.

Une perturbation $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})$ de l'écoulement de base qui conserve son caractère irrotationnel est telle que son énergie est donnée par :

$$\tilde{e}_p = \tilde{p}_b + \tilde{p} + \frac{(\tilde{u}_b + \tilde{u})^2 + (\tilde{v}_b + \tilde{v})^2}{2} = 0.$$

L'énergie locale de perturbation définie dans tout l'écoulement est obtenue comme différence en valeur absolue de ces deux énergies :

$$\tilde{e}_{loc} = |\tilde{e}_p - \tilde{e}_b| = \left| \tilde{p} + \tilde{u}_b \tilde{u} + \tilde{v}_b \tilde{v} + \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} \right|.$$

Puisque dans la couche limite les composantes de la vitesse \tilde{u}_b, \tilde{v}_b deviennent respectivement $U_0, \varepsilon V_0$ et la perturbation $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})$ devient respectivement $(u, \varepsilon v, \varepsilon^2 p)$ pour le Modèle 1 et $(u, \varepsilon v, p)$ pour le modèle (2), l'énergie \tilde{e}_{loc} s'écrit, dans la couche limite, selon le modèle considéré sous la forme :

$$e_{loc} = \left| U_0 u + \frac{u^2}{2} + \varepsilon^2 \left(p + V_0 v + \frac{v^2}{2} \right) \right| \quad \text{pour le Modèle 1,}$$

$$e_{loc} = \left| p + U_0 u + \frac{u^2}{2} + \varepsilon^2 \left(V_0 v + \frac{v^2}{2} \right) \right| \quad \text{pour le Modèle 2,}$$

Lorsque les termes de couplage ne sont pas pris en compte, l'énergie locale s'écrit :

$$e_{\text{loc}} = \frac{u^2}{2} + \varepsilon^2 \left(p + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{u^2}{2} + O(\varepsilon^2) \quad \text{pour le Modèle 1,}$$

$$e_{\text{loc}} = p + \frac{u^2}{2} + \varepsilon^2 \frac{v^2}{2} = p + \frac{u^2}{2} + O(\varepsilon^2) \quad \text{pour le Modèle 2.}$$

ANNEXE 2

Dans cette annexe, on se propose de compléter la formulation variationnelle pour le Modèle 1 au cas où l'énergie locale de perturbation dépend également de la vitesse transversale de perturbation v .

On a vu en Annexe 1 que l'énergie de perturbation définie comme différence de l'énergie de l'écoulement perturbé et de l'écoulement principal fait intervenir les trois composantes de perturbation u , v et p .

Dans le cas du Modèle 1, on est donc amené, en toute généralité, à la recherche du maximum de l'énergie de sortie $E(u, v, p) = \int_0^\infty e(x_f, Y) dY$ et donc à l'étude de la fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned} L(u, v, p, a, b, c, d) = & E(u, v, p) - \int_0^\infty \left\{ \int_{x_e}^{x_f} a(x, Y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) dx \right\} dY \\ & - \int_0^\infty \left\{ \int_{x_e}^{x_f} b(x, Y) \left(\frac{\partial(U_0 u)}{\partial x} + v \frac{\partial U_0}{\partial Y} + V_0 \frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) dx \right\} dY \\ & - \int_0^\infty \left\{ \int_{x_e}^{x_f} c(x, Y) \left(U_0 \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial V_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial v}{\partial Y} + v \frac{\partial V_0}{\partial Y} + \frac{\partial p}{\partial Y} - \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) dx \right\} dY \\ & - d \left(\int_0^\infty e(x_e, Y) dY - 1 \right) \end{aligned}$$

dans laquelle a , b , c , d sont les multiplicateurs de Lagrange liés aux contraintes du problème, à savoir l'équation de conservation de la masse, les équations du mouvement auxquelles on ajoute la contrainte de normalisation de l'énergie d'entrée.

La recherche de la perturbation optimale s'obtient en écrivant que $\overline{\text{Grad}}_{u,v,p,a,b,c,d}(L) = \vec{0}$.

L'annulation des dérivées respectivement par rapport aux variables u , v , p conduisent après intégrations par parties à :

$$\begin{aligned} \delta L_{\delta u} = & \int_0^\infty \left[\frac{\partial e}{\partial u} - (a + bU_0) \right]_{x_f} \delta u_{x_f} dY - \int_0^\infty \left[d \frac{\partial e}{\partial u} - (a + bU_0) \right]_{x_e} \delta u_{x_e} dY \\ & + \int_{x_e}^{x_f} \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial x} (a + bU_0) - b \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} (bV_0) + \frac{\partial^2 b}{\partial Y^2} - c \frac{\partial V_0}{\partial x} \right] \delta u dY dx \\ & - \int_{x_e}^{x_f} \left[(bV_0 + \frac{\partial b}{\partial Y}) \delta u - b \frac{\partial \delta u}{\partial Y} \right]_{Y=0}^{Y=\infty} dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial L_{\delta v} &= \int_0^\infty \left[\frac{\partial e}{\partial v} - cU_0 \right]_{x_f} \delta v_{x_f} dY - \int_0^\infty \left[d \frac{\partial e}{\partial v} - cU_0 \right]_{x_e} \delta v_{x_e} dY - \\
 &\int_{x_e}^{x_f} \int_0^\infty \left[-\frac{\partial a}{\partial Y} + b \frac{\partial U_0}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial x} (cU_0) - \frac{\partial}{\partial Y} (cV_0) + c \frac{\partial V_0}{\partial Y} - \frac{\partial^2 c}{\partial Y^2} \right] \delta v dY dx \\
 &- \int_{x_e}^{x_f} \left[\left(a + cV_0 + \frac{\partial c}{\partial Y} \right) \delta v \right]_{Y=0}^{Y=\infty} - \left[c \frac{\partial \delta v}{\partial Y} \right]_{Y=0}^{Y=\infty} dx = 0 \\
 \partial L_{\delta p} &= \int_0^\infty \left[\frac{\partial e}{\partial p} \right]_{x_f} \delta p_{x_f} dY - d \int_0^\infty \left[\frac{\partial e}{\partial p} \right]_{x_e} \delta p_{x_e} dY + \int_{x_e}^{x_f} \int_0^\infty \frac{\partial c}{\partial Y} \delta p dY dx \\
 &- \int_{x_e}^{x_f} \left[c \delta p \right]_{Y=0}^{Y=\infty} dx = 0
 \end{aligned}$$

Ces relations doivent être vérifiées quelques soient les accroissements δu , δv , δp moyennant les restrictions déduites des conditions aux limites sur le problème direct, à savoir :

$$\delta u(x,0) = 0 \quad ; \quad \delta v(x,0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \delta u}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow \infty} = 0.$$

Les conditions d'entrée des problèmes dual et direct s'écrivent respectivement pour la variable c :

$$c(x_f, Y)U_0 = \frac{\partial e}{\partial v}(x_f, Y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial e}{\partial v}(x_e, Y) = \frac{c(x_e, Y)U_0}{d}$$

La troisième équation de Lagrange : $\partial L_{\delta p} = 0$ conduit à $\frac{\partial c}{\partial Y} = 0$ avec les conditions limites déduites

de la deuxième équation : $c(x, Y \rightarrow \infty) = 0$; $c(x, 0) = 0$, si bien que $c(x, Y) = 0$ en tout point (x, Y) . Par conséquent, même si ce Modèle 1 laisse présumer une possibilité de choix d'une vitesse transversale initiale pour une perturbation de vitesse longitudinale nulle en entrée, la condition d'entrée du problème direct conduit alors à $v(x_e, Y) = 0$ puisque l'énergie locale est définie par :

$$e_{loc} = \frac{u^2}{2} + \varepsilon^2 \left(p + \frac{v^2}{2} \right) \quad (\text{cf. Annexe 1}). \quad \text{On a alors dégénérescence du problème et ceci confirme}$$

qu'il est impossible dans le cas du Modèle 1 d'obtenir des gains de l'ordre du nombre de Reynolds pour des écoulements bidimensionnels.