

Modélisation de l'endommagement des matériaux hétérogènes: Application au béton sous flexion statique à trois points

L. Fatmi

Laboratoire de Mécanique et Structures, Université du 8 mai 45, 24000 Guelma, Algérie,

J. M. Berthelot

Institut d'Acoustique et de Mécanique, Groupe Composites et Structures Mécanique, Université du Maine,
Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, France,

Abstract

The damage analysis in the case of the 3-points flexural tests lead to a non uniform stress state. The initiation and propagation of the damage results from the interaction between the stress field induced by the test and the distribution of fracture stresses. The damage is initiated at more than one point on the face opposite to the load, leading gradually to the progression of one or more macrofissures within the test specimen. The ultimate fracture stress measured on the test simulated curves vary from 1,60 to 3,20 σ_{\min} according to the fracture stress distribution.

Résumé

L'analyse de l'endommagement dans le cas des essais de flexion 3-points conduit à un état de contraintes fortement inhomogènes. L'initiation et la propagation sont les résultats de l'interaction entre le gradient du champ des contraintes induit par l'essai et la répartition des contraintes à la rupture. L'initiation se produit ainsi en un ou plusieurs endroits de la face opposée au chargement, conduisant peu à peu à la progression d'une ou plusieurs macro fissures au sein de l'éprouvette. Les contraintes à la rupture, mesurées sur les courbes de simulation des essais, varient de 1,60 à 3,20 σ_{\min} selon l'intervalle de distribution des contraintes à la rupture.

1. INTRODUCTION

Ce travail a pour origine l'ensemble des travaux effectués, au sein du Laboratoire Centrale des Ponts et Chaussées en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique Productive et Matériaux, sur l'analyse de l'endommagement du béton par émission acoustique [1, 2, 3]. Divers essais ont été considérés (essais de traction, essais de flexion 3-points, essais CT- compact tension) et adaptés à cette analyse. Seuls les résultats correspondant à la simulation de la flexion 3-points seront présentés dans ce papier. L'ensemble des résultats obtenus a permis de mettre en évidence diverses phases de comportement mécanique à l'échelle des éprouvettes: un comportement linéaire pour les faibles charges, puis lorsque la charge augmente un endommagement diffus associé à une rigidité décroissante de l'éprouvette, suivi d'un endommagement localisé conduisant à la rupture de l'éprouvette. Par ailleurs les résultats obtenus font apparaître que les phénomènes d'initiation et de propagation de l'endommagement sont fortement influencés par la répartition statistique des hétérogénéités du béton étudié. Parallèlement à ces travaux, nous avons mis au point des moyens d'analyse de structures par éléments finis. La méthode des éléments finis est l'outil usuel d'analyse du comportement mécanique des structures: analyse dans le domaine élastique des structures complexes,

analyse du comportement élasto-plastique déduit du comportement local des matériaux, analyse de l'endommagement par modélisation de la fissure à l'aide des éléments situés à la surface de contact des éléments ayant servis à la discrétisation de la structure [4], ou par modélisation stochastique de l'endommagement [5]. L'ensemble des résultats obtenus par simulation numérique, montre l'aptitude de la modélisation considérée, à décrire les phénomènes de comportements et d'endommagements des matériaux hétérogènes, sollicités en flexion trois points statique, et leurs concordances à ceux obtenus par expérience [7].

2. PROBLEME POSE

Considérons une structure en élément finis (i), soumise aux conditions aux limites suivantes: encastrement d'un coté et chargement en force ou déplacement imposé de l'autre coté figure 1.

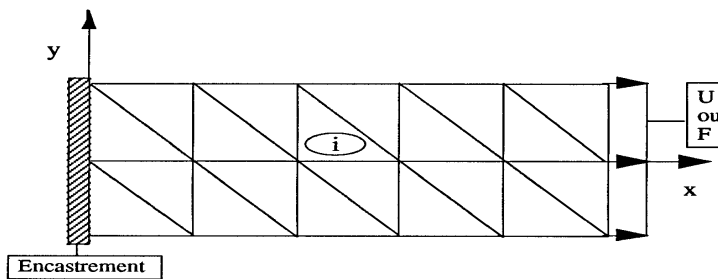


Figure 1: Structure et conditions aux limites

A chaque élément (i) est attribué une résistance locale aléatoire $\sigma_u(i)$. Le calcul de la structure, sous l'une des deux conditions aux limites, donne les champs de contraintes $\sigma(i)$ et de déformations $\varepsilon(i)$. La localisation de l'élément le plus sollicité de la structure est déterminée par la recherche du maximum de $(\sigma(i) \ x, \ y, \ xy) / (\sigma_u(i) \ x, \ y, \ xy)$ et donc de la direction de rupture $x, \ y$ ou xy de l'élément (i). On modifie ces caractéristiques mécaniques locales et on recalcule la structure de nouveau. Ce processus continu jusqu'à la rupture finale de l'éprouvette.

Le comportement global de la structure peut être décrit par le tracé de la courbe enveloppe des différents points obtenus au cours du calcul de la structure selon l'un des deux schémas de la figure 2.

3. DISCRETISATION DE LA STRUCTURE

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes limités à traiter le problème à deux dimensions et à étudier la faisabilité de la méthode. Des éléments 2D de types triangle à trois nœuds (trim3) et quadrilatère à quatre nœuds (quam4) ont été utilisés pour la discrétisation de la structure.

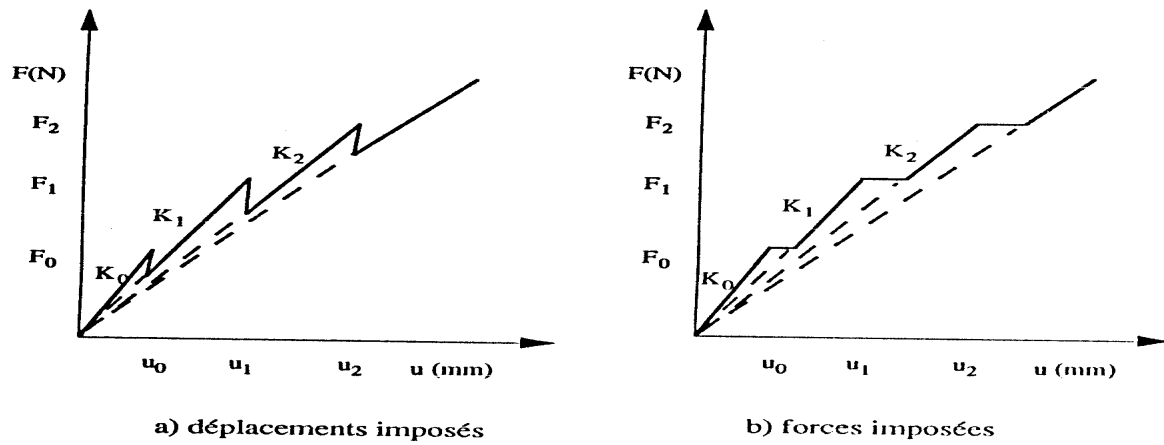


Figure 2: Modèles de comportements

4. CARACTERISTIQUES ELASTIQUES DU MATERIAU

Dans un schéma élastique à deux dimensions (1, 2) le comportement élastique d'un matériau relie les contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} aux déformations ε_{11} , ε_{22} et ε_{12} . Dans le cas où le matériau est isotrope, le comportement élastique du matériau est caractérisé par son module d'Young (E) et par son coefficient de Poisson (ν). Pour un état de contraintes planes, la relation contrainte-déformation s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

et dans le cas d'un état de déformations planes, elle s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

5. MODELISATION DE L'HETEROGENEITE DU MATERIAU

Pour tenir compte de l'existence des micro fissures, des porosités et des hétérogénéités des constituants du matériau (natures, formes et répartition etc.), nous avons considéré que la contrainte à la rupture, selon les axes principaux σ_{11u} , σ_{22u} et σ_{12u} de chaque élément, est répartie d'une manière statistique entre deux valeurs limites σ_{inf} et σ_{sup} .

6. MODES D'ENDOMMAGEMENT

Trois modes de ruptures ont été considérés: rupture longitudinale, rupture transversale et rupture par cisaillement. La rupture longitudinale d'un élément se produit lorsque la contrainte moyenne de l'élément $\overline{\sigma_{11}}$ atteint la contrainte à la rupture σ_{11u} . Après rupture, l'élément ne peut transmettre les contraintes longitudinales et le comportement de l'élément se réduit dans le cas d'un schéma de contraintes planes, à:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3)$$

La rupture transversale se produit lorsque la contrainte moyenne de l'élément $\overline{\sigma_{22}}$ atteint la contrainte à la rupture σ_{22u} de l'élément. Après rupture, l'élément ne peut transmettre les contraintes transversales et le comportement de l'élément se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

La rupture en cisaillement d'un élément se produit lorsque la contrainte moyenne de l'élément $\overline{\sigma_{12}}$ atteint la contrainte à la rupture σ_{12u} de l'élément. Après rupture, l'élément ne peut plus transmettre ni contraintes longitudinales, ni contraintes transversales. La matrice de rigidité de l'élément est réduite à zéro.

7. RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME

Avant modification locale de la matrice de rigidité, la relation chargement F en fonction des déplacements U s'écrit sous la forme :

$$F = KU \quad (5)$$

où K est la matrice de rigidité globale de la structure. Soit dK une variation de K provoquant une variation dU de U , sans que F soit affectée. Il vient :

$$(K + dK)(U + dU) = F \quad (6)$$

Le développement de (6) conduit à:

$$KU + KdU + dKU + dKdU = F \quad (7)$$

En retranchant (5) de (7) on a:

$$KdU + dKU + dKdU = 0 \quad (8)$$

d'où

$$KdU = -dK(U + dU) \quad (9)$$

L'expression (9) est analogue à (5) avec K connue, dK connue, U connue et dU inconnue. Elle est résolue par une méthode itérative avec un critère d'arrêt des itérations de la forme:

$$\frac{\|dU_{n+1} - dU_n\|}{\|dU_n\|} \leq \varepsilon \quad (10)$$

où n et $n + 1$ désignent les indices correspondant à deux itérations successives, et ε un critère de précision.

8. APPLICATION A LA FLEXION 3-POINTS STATIQUE

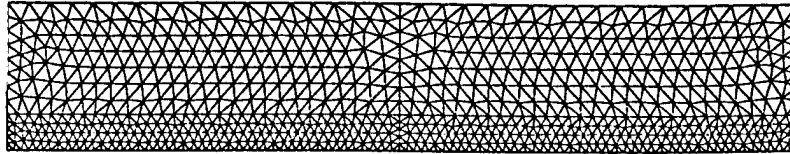
La simulation de la flexion 3-points statique est réalisée sur des éprouvettes de dimensions $105 \times 20 \times 10 \text{ cm}^3$. Les constantes élastiques C_{ij} sont calculées à partir des caractéristiques mécaniques du béton [4]: $E = 33,3 \text{ GPa}$ et $\nu = 0,2$. L'éprouvette est soumise à un déplacement initial imposé, et discrétisée en éléments triangulaires à trois nœuds avec affinement de la partie sollicitée en traction de manière à avoir une description plus fine de l'endommagement dans cette zone.

L'étude est menée avec trois intervalles de contraintes à rupture :

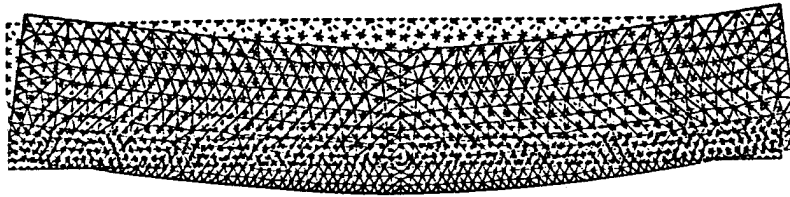
$$[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}] = [0,5 ; 3,5 \text{ MPa}], \quad [0,75 ; 3,5 \text{ MPa}] \quad \text{et} \quad [1,0 ; 3,5 \text{ MPa}]$$

Pour chaque intervalle, quatre répartitions différentes des contraintes à la rupture dans l'éprouvette sont considérées, ces distributions sont générées à l'aide d'une fonction temps liée à l'heure du début de calcul, d'où chaque lancement de calcul correspond à une distribution particulière.

La figure 3 illustre la structure de l'éprouvette avant et après chargement.



a- Maillage utilisé



b- Déformée de l'éprouvette

Figure 3: Structure avant et après chargement en flexion 3-points statique

9. ANALYSE DES RESULTATS DE LA SIMULATION

9.1 Courbes de comportement

Les courbes de comportement mécanique charge-déplacement, dans le cas de la simulation des essais de flexion 3-points, sont reportées sur les figures 4.1 à 4.3. Ces courbes correspondent aux intervalles et aux distributions des contraintes à la rupture étudiés. Les localisations cumulées des endommagements obtenus à la fin de la simulation des essais sont illustrées sur les figures 5.1 à 5.3. Sur ces courbes, nous avons indiqué les valeurs:

- 1- de la contrainte σ_e , correspondant à la fin du comportement sans endommagement (première rupture d'un élément de l'éprouvette);
- 2- de la contrainte σ_{u1} , que nous appellerons contrainte de première rupture, correspondant à la première rupture mesurable sur la courbe d'essai (première chute de la charge);
- 3- de la contrainte σ_u , que nous appellerons contrainte à la rupture, correspondant à la charge maximale atteinte.

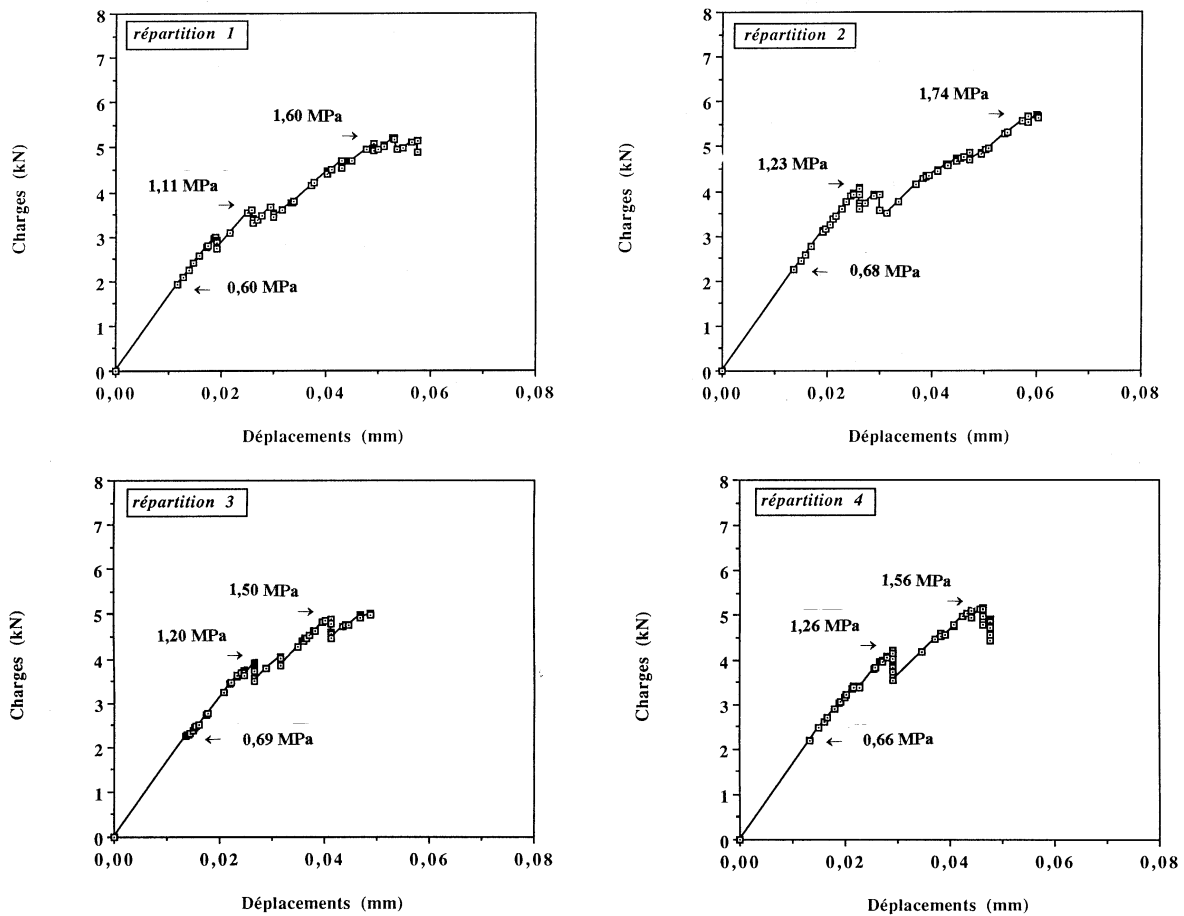


Figure 4.1: Courbes de comportements charge-déplacement d'une éprouvette en flexion 3-points statique pour $0,5 \leq \sigma_u(i) \leq 3,5$ Mpa

Les valeurs des contraintes reportées sur les courbes de comportements simulées (figure 4.1 à 4.3), pour les diverses distributions étudiées, ont été calculées, en utilisant la relation de la résistance des matériaux donnant la contrainte de traction maximum en fonction de la charge exercée P , de l'entre appui L , de l'épaisseur b et de la hauteur h de l'éprouvette.

$$\sigma = \frac{3PL}{bh^2} \quad (11)$$

σ est la contrainte normale de flexion.

Cette relation est utilisée par un expérimentateur effectuant des mesures standards des contraintes de rupture, dans le cas des essais de flexion 3-points.

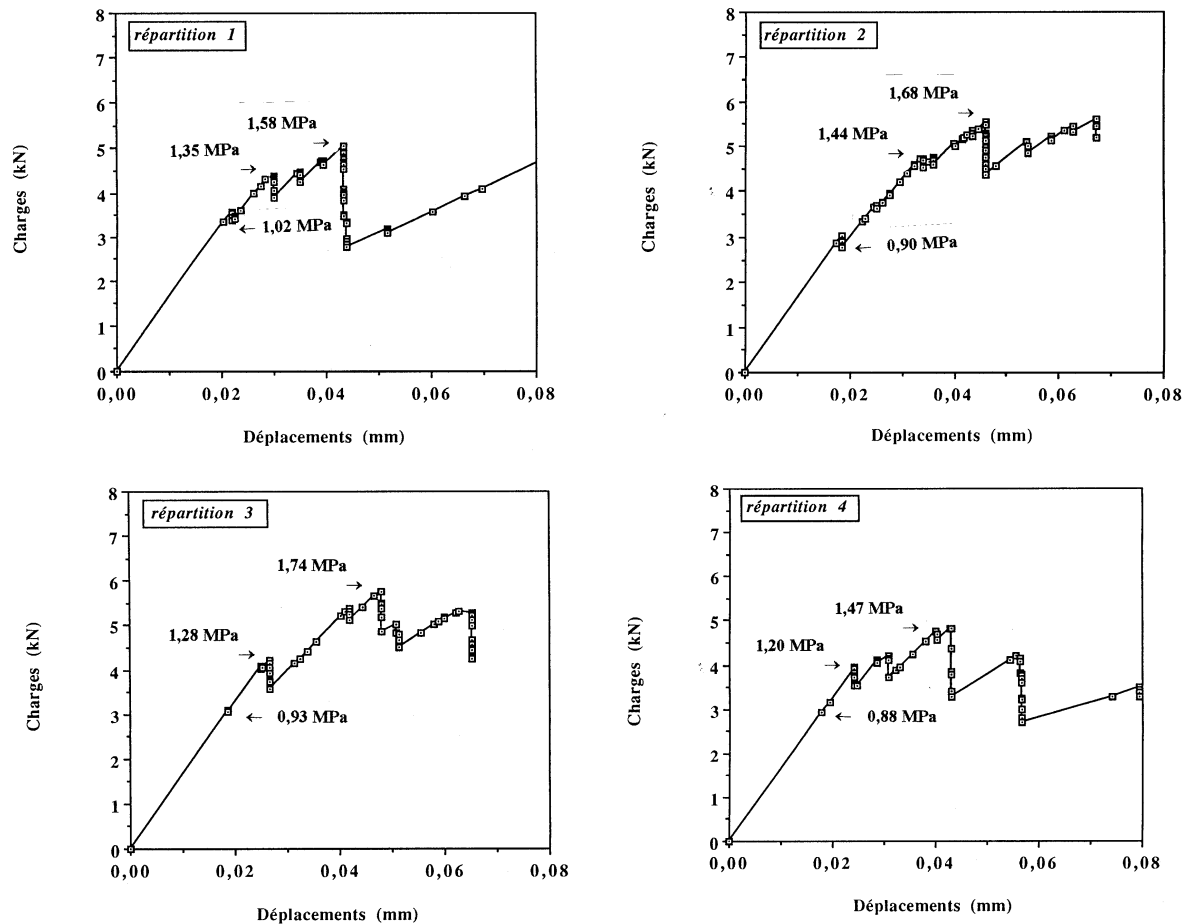


Figure 4.2 Courbes de comportements charge-déplacement d'une éprouvette en flexion 3-points statique pour $0,75 \leq \sigma_u(i) \leq 3,5$ MPa

Notons d'abord que si la valeur de σ_e est facilement accessible sur ces courbes par l'indication de la valeur de la contrainte calculée pour le premier élément endommagé, cette valeur n'est pratiquement pas accessible à l'expérimentateur. Dans la plus part des cas, il accède uniquement à la valeur σ_{u1} à la première rupture, et à la valeur σ_u à la rupture.

Les valeurs des contraintes calculées à partir des courbes de comportements (figures 4.1 à 4.3) montrent d'abord que la contrainte σ_e est toujours supérieure à la valeur inférieure σ_{\min} de l'intervalle des contraintes à la rupture, due à l'influence du gradient du champ de contrainte induit par le type d'essai.

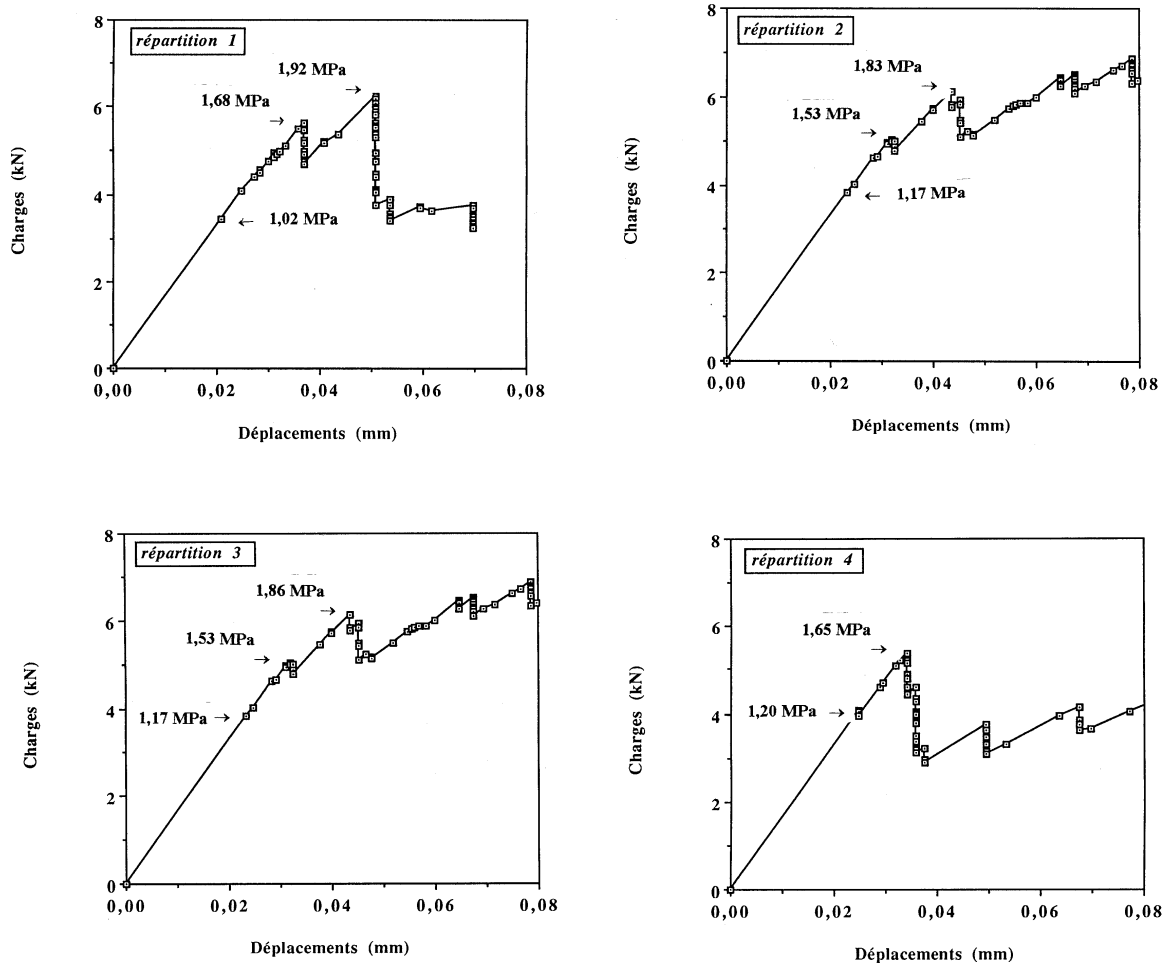


Figure 4.3: Courbes de comportements charge-déplacement d'une éprouvette en flexion 3-points statique pour $1,0 \leq \sigma_u(i) \leq 3,5$ MPa

Elle dépend relativement peu des répartitions des contraintes pour un intervalle donné et décroît légèrement lorsque σ_{\min} augmente.

$$\sigma_e / \sigma_{\min} = 1,32 \quad \text{pour } \sigma_{\min} = 0,5 \text{ MPa;}$$

$$\sigma_e / \sigma_{\min} = 1,20 \quad \text{pour } \sigma_{\min} = 0,75 \text{ MPa;}$$

$$\sigma_e / \sigma_{\min} = 1,14 \quad \text{pour } \sigma_{\min} = 1,0 \text{ MPa.}$$

La contrainte σ_e ne peut être égale à σ_{\min} que dans le cas (à probabilité très faible) où l'élément opposé au chargement a une contrainte à rupture égale à σ_{\min} . L'examen des valeurs des quotients σ_e/σ_{\min} et de $\sigma_{u1}/\sigma_{\min}$ montre que les valeurs de la contrainte à la première rupture et de la contrainte à la rupture sont plus sensibles d'une part à la répartition des contraintes à la rupture et d'autre part elles diminuent nettement lorsque la valeur de la contrainte à la rupture σ_{\min} croît.

$$\begin{aligned} \sigma_{u1}/\sigma_{\min} = 2,40 \quad \text{et} \quad \sigma_u/\sigma_{\min} = 3,20 \quad \text{pour } \sigma_{\min} = 0,5 \text{ MPa;} \\ \sigma_{u1}/\sigma_{\min} = 1,76 \quad \text{et} \quad \sigma_u/\sigma_{\min} = 2,16 \quad \text{pour } \sigma_{\min} = 0,75 \text{ MPa;} \\ \sigma_{u1}/\sigma_{\min} = 1,60 \quad \text{et} \quad \sigma_u/\sigma_{\min} = 1,82 \quad \text{pour } \sigma_{\min} = 1,00 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

Ces résultats montrent qu'un expérimentateur mesure, dans un essai de flexion, des contraintes de rupture correspondant à des phénomènes d'endommagements nettement différenciés par rapport aux essais de traction. En effet dans un essai de traction, l'expérimentateur mesure une contrainte correspondant à un état proche de la première rupture d'un élément (ou pas trop éloigné). D'où une contrainte à la rupture mesurée sur la courbe d'essai allant de 1,0 à 1,40 σ_{\min} [6], suivant l'échelle de l'éprouvette. Par contre, dans le cas d'un essai de flexion, le gradient des contraintes associé à une répartition statistique des contraintes à la rupture conduit à une valeur qui ne peut être mesurée sur la courbe d'essai, que lorsque l'endommagement de l'éprouvette est déjà notable. D'où des contraintes à rupture variant de 1,40 à 2,40 σ_{\min} pour la première rupture (selon l'intervalle de distribution des contraintes à la rupture), et de 1,82 à 3,20 σ_{\min} pour la contrainte de rupture. Ces valeurs montrent que l'écart entre les valeurs des contraintes à la rupture calculées dans les deux types d'essais (traction et flexion) peut varier, dans notre étude selon un rapport pouvant aller de 1,4 à 3,20. Ces résultats expliquent les écarts observés entre les valeurs des contraintes à la rupture mesurées dans des essais de traction et de flexion. Notamment ceux de A. Bascoul et J.C. Maso [7] trouvant un rapport (σ_{uf}/σ_{ut}), entre les valeurs des contraintes mesurées à la rupture en flexion (σ_{uf}) et les valeurs des contraintes mesurées à la rupture en traction (σ_{ut}), allant de 1,60 à 2,30. Il paraît ainsi que, contrairement à ce qui est admis dans la littérature, ces écarts ne peuvent être attribués à l'effet d'échelle, prise au sens de la statistique de Weibull.

9.2 Analyse de l'endommagement

Les figures 5.1 à 5.3 montrent les endommagements cumulés obtenus pour les trois intervalles étudiés des contraintes à la rupture : $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}] = [0,5 ; 3,5 \text{ MPa}]$, $[0,75 ; 3,5 \text{ MPa}]$ et $[1,0 ; 3,5 \text{ MPa}]$. Pour chaque intervalle, quatre répartitions différentes des contraintes dans l'éprouvette ont été analysées. Par ailleurs, la figure 6 montre l'évolution de l'endommagement pendant la simulation de l'essai de flexion, dans le cas d'une répartition particulière. Le rapport d'élancement, choisi pour l'essai, conduit à une initiation de l'endommagement par rupture en traction sur la face opposée au chargement. Dans le cas d'une répartition uniforme des contraintes à la rupture dans l'éprouvette, le premier élément cassé serait l'élément situé au milieu de cette face. Les premiers éléments endommagés sont le résultat de l'interaction entre le gradient du champ de contraintes et la répartition

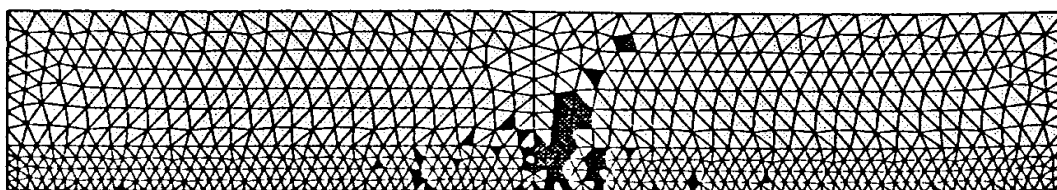
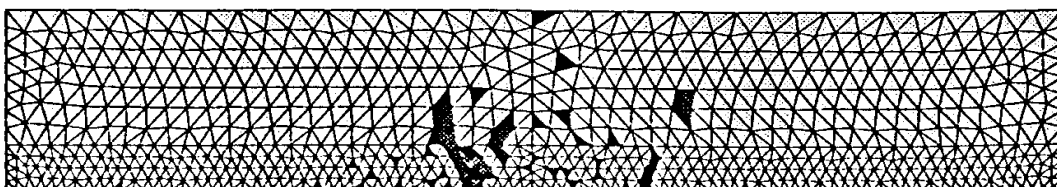
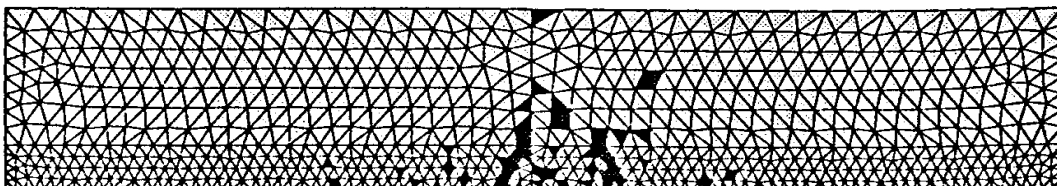
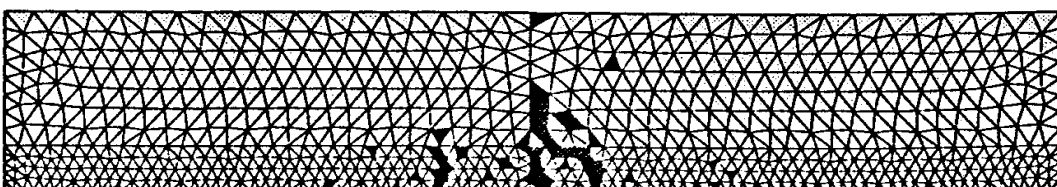
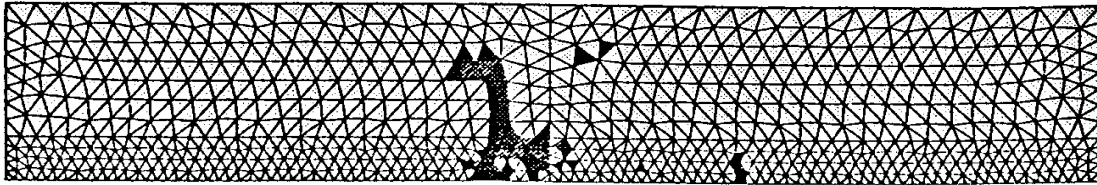
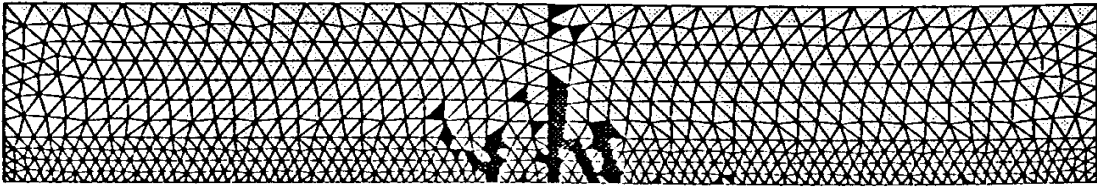
*Répartition 1**Répartition 2**Répartition 3**Répartition 4*

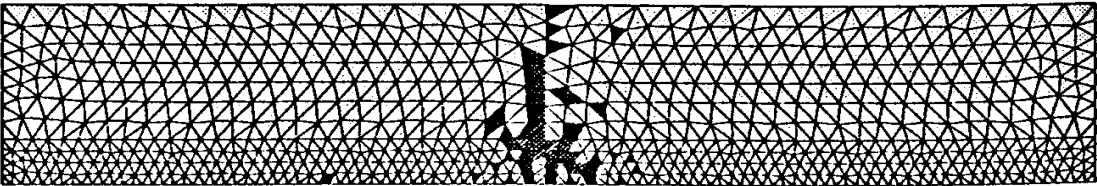
Figure 5.1. Cartes d'éléments endommagés dans un essai de flexion 3-points statique pour $0,5 \leq \sigma_u(i) \leq 3,5$ MPa.



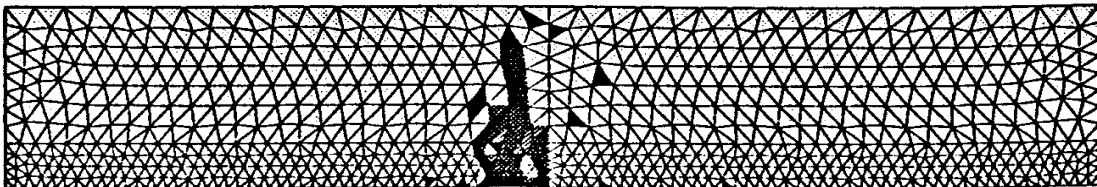
Répartition 1



Répartition 2



Répartition 3



Répartition 4

Figure 5.2: Cartes d'éléments endommagés dans un essai de flexion 3-points statique pour $0,75 \leq \sigma_u(i) \leq 3,5$ MPa.

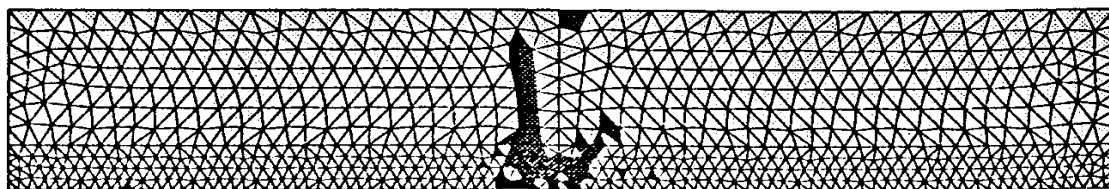
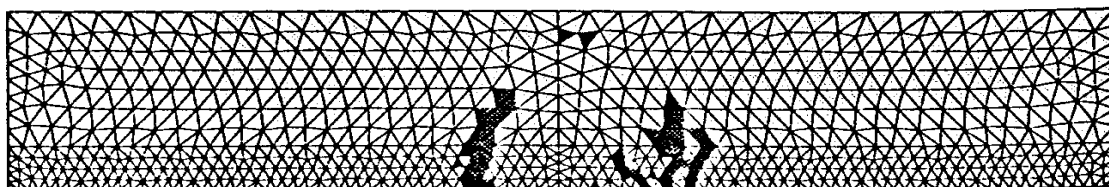
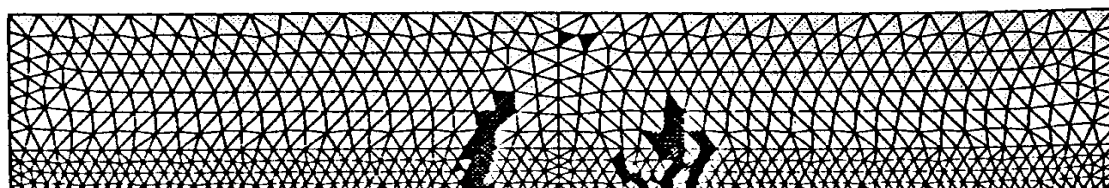
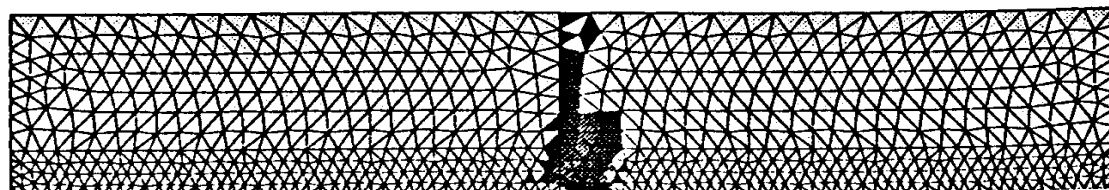
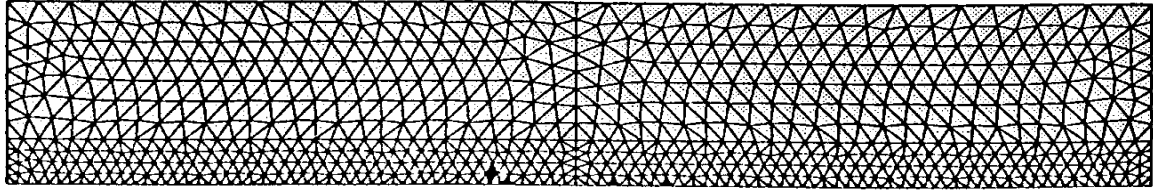
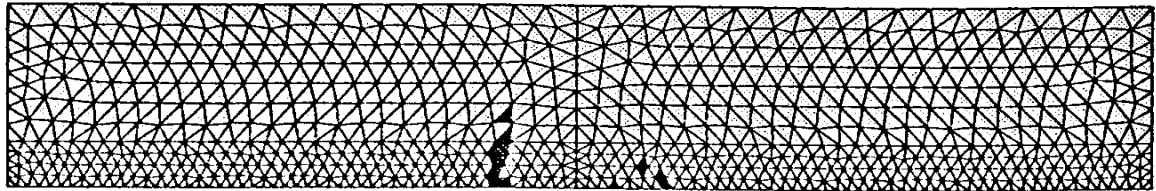
*Répartition 1**Répartition 2**Répartition 3**Répartition 4*

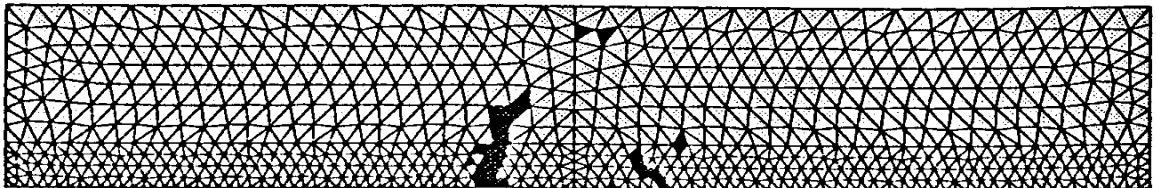
Figure 5.3: Cartes d'éléments endommagés dans d'un essai de flexion 3-points statique pour $1,0 \leq \sigma_{II}(i) \leq 3,5$ MPa.



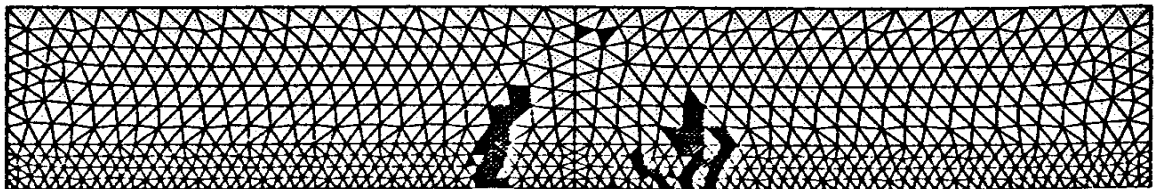
Eléments endommagés [0-5]



Eléments endommagés [0-20]



Eléments endommagés [0-40]



Eléments endommagés [0-70]

Figure 6: Evolution de l'endommagement pendant la simulation d'un essai de flexion 3-points statique (répartition 3 de la figure 5.3 pour $1,0 \leq \sigma_{II}(i) \leq 3,5$ MPa).

des contraintes à la rupture. La figure 6 illustre ce résultat: initiation en un ou plusieurs endroits de part et d'autre de la face opposée au chargement. Ce schéma se poursuit, et est ensuite influencé par la concentration de contraintes induites par les éléments endommagés, conduisant peu à peu à la progression d'une ou plusieurs macros fissures au sein de l'éprouvette. Un écart $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ plus élevé des contraintes à la rupture favorise un endommagement plus diffus (figure 5.1), tout au moins au début de l'essai. Par ailleurs, le gradient du champ de contraintes introduit par l'essai de flexion associé à la distribution aléatoire des contraintes à la rupture, favorisent la progression de plusieurs macros fissures (figures 5.1 à 5.3). Ce phénomène est régulièrement observé dans le cas des essais de flexion sur des matériaux hétérogènes.

10. CONCLUSIONS

L'analyse de l'endommagement, dans le cas de la simulation des essais de flexion 3-points, a mis en évidence les caractéristiques des phénomènes d'endommagements associés à l'existence d'un champ de contraintes non homogène en liaison avec une distribution statistique des contraintes à la rupture. L'endommagement, dans la zone de contraintes maximales en traction, est initié d'une manière diffuse et se propage suivant une ou plusieurs macros fissures, selon la répartition des contraintes à la rupture. Les courbes de comportements mécanique conduisent à des valeurs de contraintes à la rupture calculées variant de 1,60 à 3,20 σ_{\min} . Ces résultats concordent avec ceux obtenus expérimentalement par A. Bascoul et J. C. Maso [7] donnant un rapport σ_{ur}/σ_{ut} , allant de 1,60 à 2,30.

RÉFÉRENCES

1. Berthelot. J. M., Robert. J. L. Damage evaluation of concrete test specimens related to failure analysis, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, 3, pp. 587-604, (1987).
2. Bensouda. M. Contribution à l'analyse par émission acoustique de l'endommagement dans le béton, Thèse de Doctorat, Université de Maine France (1990).
3. Feknous. N. Etude à l'aide de la technique d'émission acoustique des mécanismes de détérioration des contacts roche-coulis de ciment, Thèse de Doctorat es Sciences, Université de Sherbrooke Québec, Canada (1991).
4. Rossi. P., Richer. S. Numerical modelling of concrete cracking based on a stochastic approach, *Materials and Structures*, Vol. 20, pp. 334-337, (1987).
5. Breysse. D. Numerical study of the effect of inhomogeneities and boundary conditions on the tensile strength of concrete, *ACI, Materials Journal*, Vol. 88, 5, pp. 489-497, (1991).
6. Fatmi. L. Modélisation de l'endommagement des matériaux hétérogènes par réanalyse après modification locale de la matrice de rigidité, Thèse de Doctorat, Université de Maine France, (1994).
7. Bascoul A., Maso. J. C. Influence du gradient spatial de déformation sur l'état limite de fissuration du béton, *Colloque International Toulouse, France*, (1982).