

# PROCESSUS ITERATIF D'HOMOGENEISATION APPLIQUE AUX COMPOSITES A RENFORTS SPHERIQUES

L.Ouissaden <sup>1</sup>, A.Lekhder <sup>1</sup>, H. Dumontet <sup>2</sup>, A. Benhamida <sup>2</sup>, M.O.Bensalah <sup>1</sup>

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique et des Matériaux Faculté des Sciences – Agdal, B.P.1014 - Rabat – Maroc

<sup>3</sup> Laboratoire de Modélisation, Matériaux et Structures, Université Paris VI, CC 161, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

## 1. INTRODUCTION

Nous cherchons à caractériser le comportement hygroscopique des matériaux composites à inclusions sphériques. Le choix de la matrice, des inclusions qui peuvent être pleines ou creuses, et de leurs taux de remplissages, définit les propriétés mécaniques des matériaux hétérogènes : légereté, résistance, etc.

Ces matériaux sont très appréciés dans le domaine de la construction navale, pour leurs propriétés de bonne tenue à la pression et de flottabilité. Ils apparaissent également comme des matériaux intéressants pour des applications d'isolation thermique et hygroscopique, Uraduct [1], F.Jacquemin et al [2]. Le but de ce travail est de déterminer le comportement hygroscopique équivalent de ces matériaux, en tenant compte du rôle préférentiel que jouent les interfaces inclusions/matrice dans l'infiltration de l'humidité au sein du composite, en utilisant le modèle des distributions diluées couplé ou non au processus itératif d'homogénéisation, A.N.Nouris [3], A.Brini [4]. Ces deux approches seront comparées entre eux et avec la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques obtenue en utilisant la méthode des éléments finis, A.Benhamida et al [5], G.Duvaut [6].

## 2. LE MODELE DES DISTRIBUTIONS DILUEES

L'approche des distributions diluées suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les inclusions, et le problème se ramène à l'étude du comportement d'une seule hétérogénéité noyée dans un milieu infini dont les propriétés sont celles de la matrice. On notera ainsi par  $Y$  la cellule de base,  $Y_f$  la partie du volume occupée par l'inclusion,  $Y_m$  la partie occupée par la matrice,  $\Gamma$  l'interface entre l'inclusion et la matrice et  $Y_0$  la partie occupée par la cavité de bord  $\Gamma_0$  dans le cas d'une inclusion creuse figure 1.

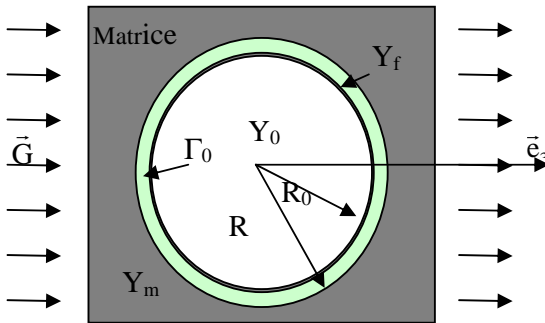


Figure 1 : Approche des distributions diluées

Le chargement macroscopique choisi est imposé sous la forme de la condition aux limites suivante :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \overline{\text{grad } c} = \vec{G}, \quad (1)$$

Le problème cellulaire à résoudre est constitué par l'ensemble des équations suivantes :

$$\text{div } \vec{q}(y) = 0, \quad \text{dans } Y_f \cup Y_m \quad (2)$$

$$\vec{q}(y) = -\text{ID}(y) \overline{\text{grad } c(y)}, \quad \text{dans } Y_f \cup Y_m \quad (3)$$

$$[[c]] = 0, \quad \text{sur } \Gamma \quad (4)$$

$$[[\vec{q} \cdot \vec{n}]] = R \tilde{D} \Delta_T c, \quad \text{sur } \Gamma \quad (5)$$

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (6)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \overline{\text{grad } c} = \vec{G}, \quad \vec{G} \text{ donné}$$

Où le vecteur  $\vec{q}(y)$  désigne le flux d'humidité,  $c(y)$  la concentration d'humidité,  $\text{ID}(y)$  le tenseur du second ordre de diffusion,  $\tilde{D}$  le coefficient de diffusion interfaciale,  $\Delta_T c$  le laplacien surfacique de la concentration et  $\vec{n}$  la normale extérieure à l'inclusion. La notation  $[[f]] = f^m - f^f$  désigne le saut de la quantité  $f$  à travers une interface.

Les relations (4) et (5) désignent la loi d'interface qui tient compte du rôle que jouent les interfaces dans la propagation de l'humidité dans les composites, A.Benhamida et al [5].

Dans le cas où le comportement des constituants est isotrope et vu la symétrie sphérique des inclusion, le comportement équivalent est également isotrope F.Léné [7], un seul chargement en gradient de concentration suffit alors pour obtenir ce comportement. Le problème cellulaire correspondant se résout analytiquement et on vérifie aisément que la solution du problème cellulaire est de la forme :

$$\begin{cases} c^f(r, \theta) = (A^f r + \frac{B^f}{r^2}) \cos \theta, & \text{dans l'inclusion} \\ c^m(r, \theta) = (A^m r + \frac{B^m}{r^2}) \cos \theta, & \text{dans la matrice} \end{cases} \quad (7)$$

Les quatres constantes  $A^f$ ,  $B^f$ ,  $A^m$ , et  $B^m$  sont solutions d'un système linéaire traduisant la loi d'interface et les conditions aux limites du problème.

Le comportement diffusif équivalent  $\text{ID}^h$  du matériau est alors défini par la relation suivante entre les moyennes :

$$\langle \vec{q}(y) \rangle_Y = -\text{ID}^h \langle \overline{\text{grad } c(y)} \rangle_Y = -\text{ID}^h \vec{G} \quad (8)$$

En tenant compte de la discontinuité du flux normal à l'interface inclusion / matrice, on aura :

$$\langle \bar{q}(y) \rangle_Y = \langle \bar{q}(y) \rangle_{Y/\Gamma} + \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma} [\bar{q} \cdot \bar{n}] \bar{y} \, ds \quad (9)$$

En introduisant la fraction volumique de l'inclusion  $\tau_f$ , le coefficient de diffusion homogénéisé dans le cas d'une inclusion creuse est donné par :

$$D^h = D^m + \tau_f (D^f - D^m) \langle \overline{\text{grad}} c^f \rangle_{Y^f} + \frac{\tau_f D^m}{|Y^f|} \int_{\Gamma_0} c n_3 \, ds - \frac{\tau_f}{|Y^f|} \int_{\Gamma} (R \tilde{D} \Delta_T c)_{Y_3} \, ds \quad (10)$$

### Remarques :

- Dans le cas d'une inclusion pleine, ce coefficient se réduit à :

$$D^h = D^m + \tau_f (D^f - D^m) \langle \overline{\text{grad}} c^f \rangle_{Y^f} - \frac{\tau_f}{|Y^f|} \int_{\Gamma} (R \tilde{D} \Delta_T c)_{Y_3} \, ds$$

- Si on plus on ne tient pas compte de la diffusion interfaciale  $\tilde{D} = 0$ , on retrouve les travaux de A.Brini [4] en thermique et le coefficient de diffusion devient :

$$D^h = D^m + \tau_f \left[ (D^f - D^m) A^f \right]$$

### 3. PROCESSUS ITERATIF D'HOMOGENEISATION

Le processus itératif que nous proposons d'introduire reprend l'idée même d'élaboration du matériau au cours de laquelle le milieu est enrichi progressivement en hétérogénéités. S'inspirant dans son principe de la méthode d'homogénéisation dite schéma différentiel A.N.Norris [3], J.Aboudi [8], ce processus itératif est applicable à tout milieu hétérogène.

Considérons tout d'abord un composite biphasé de taux de renfort  $\tau_f$ , pour homogénéiser ce matériau, on passe par l'élaboration successive de n composites intermédiaires obtenus par ajout d'une fraction de renfort  $\Delta \tau_j$  telle que

$$\sum_{j=1}^n \Delta \tau_j = \tau_f \text{ au composite qui est issu de l'étape précédente. Le comportement du composite intermédiaire à une étape } i, \text{ noté } D^{h(i)} \text{ sera déterminé par une méthode quelconque d'homogénéisation.}$$

A cette étape les constituants du composite intermédiaire i sont la matrice constituée par le composite intermédiaire de l'étape i-1 et les renforts dont la proportion est :

$$\tau_f^{(i)} = \frac{\Delta \tau_f^{(i)}}{1 - \tau_f + \sum_{j=1}^N \Delta \tau_f^{(j)}} \quad (11)$$

Le comportement équivalent en terme de diffusion de ce composite intermédiaire à l'étape i est obtenu par la relation suivante :

$$D^{h(i)} \bar{G} = D^{h(i-1)} \bar{G} + \tau_f^{(i)} \left[ D^f - D^{h(i-1)} \right] \overline{\text{grad}} c^{f(i)} \bar{n}_{Y^f} + \tau_f^{(i)} \frac{D^{h(i-1)}}{|Y^f|} \int_{\Gamma_0} c \bar{n} \, ds - \frac{\tau_f^{(i)}}{|Y^f|} \int_{\Gamma} [\bar{q} \cdot \bar{n}] \bar{y} \, ds \quad (12)$$

où  $c^{f(i)}$  est la concentration d'humidité qui règne dans le renfort à la ième étape du processus itératif associé à la méthode d'homogénéisation retenue. Le terme de moyenne  $\langle \overline{\text{grad}} c^{f(i)} \rangle_{Y^f}$  est la moyenne du gradient de concentration d'humidité à l'étape i sur le volume occupé par le renfort à cette étape. Ce processus itératif prend fin dès que le taux global de renfort voulu  $\tau_f$  est atteint, c'est-à-dire à l'itération n figure 2.

Notons qu'à la différence du schéma différentiel, la taille du volume représentatif évolue au cours des itérations et le gradient de concentration d'humidité dans le renfort est réactualisé à chaque itération. La mise en œuvre numérique de ce processus itératif a été faite en pratique sous Matlab.

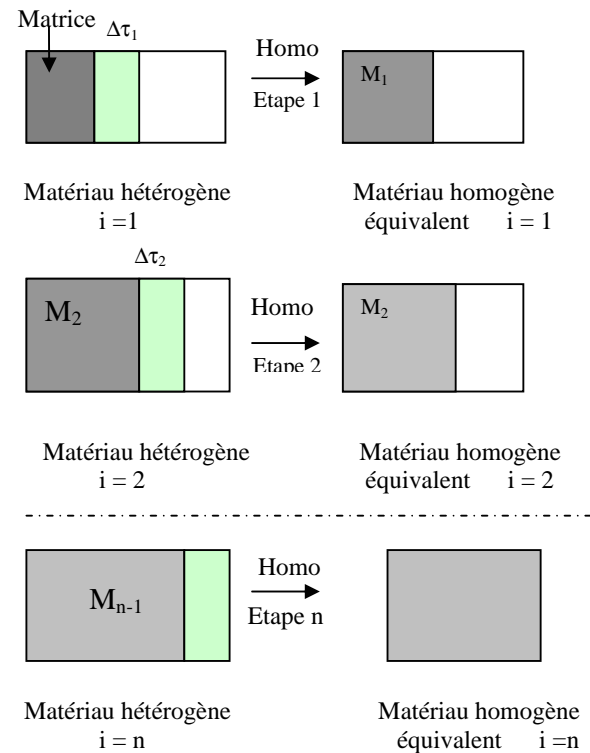


Figure 2 : Principe du processus itératif d'homogénéisation

### 4. RESULTATS:

Pour déterminer le comportement de diffusion équivalent des mousses syntactiques en présence d'interfaces diffusives, nous allons appliquer ce processus itératif d'homogénéisation en l'associant à l'approche des distributions diluées. Les mousses étudiées sont constituées de micro charges sphériques de verre, supposées de même taille, intégralement noyées dans une matrice organique de résine. La valeur maximale de la fraction volumique en microbille dans le cas de l'homogénéisation des milieux périodiques est de 60%, ce qui correspond à la valeur limite

accessible avec une répartition périodique de microsphères dans un réseau cubique, A.Benhamida et al [5] .

Sur la figure 3 a été reportée l'évolution du coefficient de diffusion équivalent de la mousse, par la méthode des distributions diluées, en fonction du nombre d'itérations  $n$  utilisé dans le processus itératif, pour un  $\bar{D}$  assez important. Nous observons que le coefficient de diffusion homogénéisé converge avec le nombre d'itération vers une courbe limite en fonction du taux de remplissage.

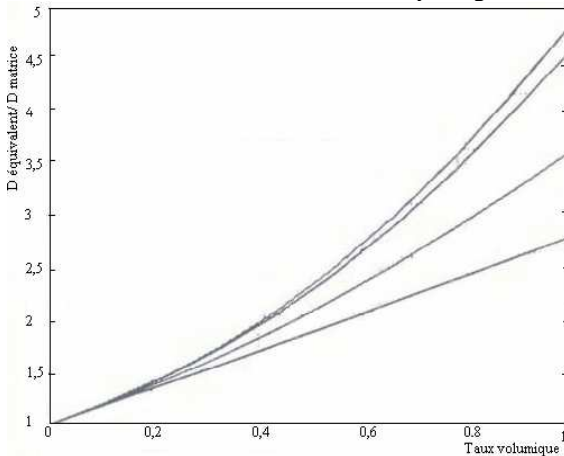


Figure 3 : Coefficient de diffusion équivalent normalisé par  $D_m$  pour différentes itérations par la méthode des distributions diluées

Les résultats obtenus par la méthode des distributions diluées enrichie ou non par le processus itératif y sont confrontés à ceux fournis par l'homogénéisation périodique. Nous avons reporté sur la Figure 4 pour un  $\bar{D}$  donné le coefficient de diffusion équivalent normalisé de la mousse en fonction du taux de remplissage. Nous observons le rapprochement très significatif des résultats du processus itératif de ceux issus de l'homogénéisation périodique et ceci quelque soit le taux de renforts.

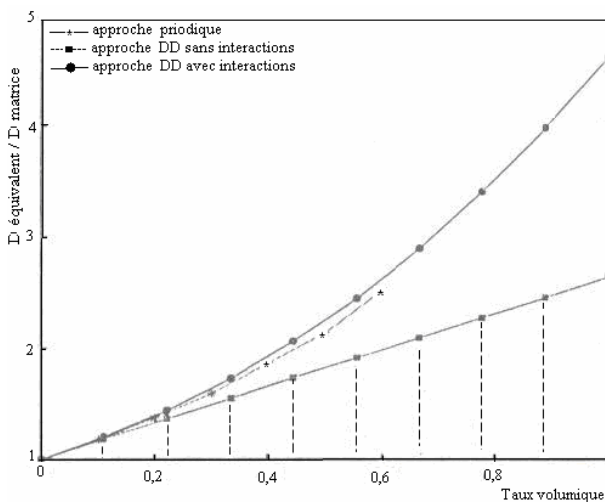


Figure 4 : Coefficient de diffusion équivalent normalisé par  $D_m$  avec la méthode des distributions diluées couplée ou non au processus itératif. Comparaison avec l'approche périodique.

## 5. CONCLUSION

Le processus itératif d'homogénéisation est applicable à tout milieu hétérogène et peut-être couplé avec n'importe quelle méthode d'homogénéisation. Ces différentes approches sont alors utilisées dans leur domaine de validité, dans la mesure où chaque itération, l'homogénéisation s'effectue avec un faible taux de renforts. Notons enfin que cette méthode itérative présentée ici dans le cadre de la diffusion s'applique également en élasticité.

## 6. REFERENCES

- [1] **Uractus**, Cable and flowline protection crp marine. Technical report, Engineering excellence in a global market, GPR Group Inc. 2901 Wilerest, suite 285, Houston. TX 77042. USA. Springer/summer, 2001.
- [2] **F.Jacquemin and A.Vautrin**. Contraintes internes dans les tubes composites épais soumis à des conditions hygrométriques cycliques, XVème Congrès Français de Mécanique, Nancy. France.Sept. 2001.
- [3] **A.N.Norris**, A differential schema for the effective moduli of composites, *Mechanics of Materials*, 4 : 1-16, 1985.
- [4]**A.Brini**. Modélisation multi-échelles du comportement et du vieillissement des mousses syntactiques immergés. Thèse de doctorat, Université P. et M. Curie, 2004.
- [5] **A.Benhamida, H.Dumontet, A.Lekhder**, Un modèle de Comportement hygrosopique des mousses syntactiques, *Revue des Composites et des matériaux avancés*, Ed. Hermes, Vol 8, N°1, 1998.
- [6] **G.Duvaut**, Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus. Application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique. North-Holland Publication Company, 1976.
- [7] **F.Léné**, Contribution à l'étude des milieux composites et de leur endommagement, Thèse d'Etat, Université P et M. Curie,Paris,1984.
- [8] **J.Aboudi**, Micromechanical analysis of composites by the method of cells, *Appl, Mech, Rev*, 42(7) : 103-128, 1989.