

**H. BELHADJ\* , D. OUAZAR\*\***

\* Univ. Abdelmalek Essaadi, FSTT, Dept de Math, Route de Ziaten, BP 416, Tanger, Maroc  
hb\_fstt@yahoo.com

\*\* Univ. Mohammed V, EMI, Dépt Génie civil, Avenue Ibn Sina, BP 765, Agdal, Rabat, Maroc

## Résumé

On s'intéresse dans cet article à la modélisation de la propagation d'ondes de submersion provoquées par une rupture de barrage.

Ce problème est modélisé à l'aide des équations des écoulements à surface libre en eau peu profonde dites équations de Saint Venant (SV) (ou Shallow Water Equations). Nous proposons de résoudre le système (SV) par une méthode des volumes finis sur maillage non structuré. Le terme convectif est discrétisé à l'aide d'un solveur approché de Riemann (schéma de Roe) et les termes diffusifs sont discrétisés par une interpolation de type Green-Gauss.

Une application à un cas académique de rupture de barrage est présentée. Les résultats montrent les profils de la hauteur de la surface libre ainsi que la distribution des vitesses en différents temps de la simulation.

### 1-Système d'équations à résoudre

Les équations aux dérivées partielles qui

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = R_x + R_y + S \text{ on } \Omega \times [0, T] \\ W(x, y, 0) = W_0(x), \quad \text{for } x \in I \end{cases}$$

gouvernent les écoulements à surface libre sont les équations de Saint Venant (SV). Elles sont obtenues par une réduction à deux dimensions des équations tridimensionnelles de Navier-Stokes [1].

Avec

$$W = (H, UH, VH)^T = (H, Q_x, Q_y)^T$$

U est la vitesse suivant le sens de l'écoulement

H est l'élevation moyenne de l'eau

$Q_x = HU$  et  $Q_y = HV$  sont les débits suivant Ox et Oy

Fonction flux :

$$F(W) = (HU, HU^2 + g \frac{H^2}{2}, HUV)^T$$

$$G(W) = (HV, HUV, HV^2 + g \frac{H^2}{2})^T$$

Terme source :

$$S(W) = (0, gH(S_{0x} - S_{fx}), gH(S_{0y} - S_{fy}))^T$$

$S_0, S_f$  sont les pentes de frottement au fond et à la surface

$$S_f = \frac{m^2 U |U|}{H^{4/3}} \quad \text{où } m \text{ est le coefficient de}$$

manning

Termes diffusifs :

$$R_x(W) = (0, \frac{\partial}{\partial x}(v \frac{\partial HU}{\partial x}), \frac{\partial}{\partial x}(v \frac{\partial HV}{\partial x}))^T$$

$$R_y(W) = (0, \frac{\partial}{\partial y}(v \frac{\partial HU}{\partial y}), \frac{\partial}{\partial y}(v \frac{\partial HV}{\partial y}))^T$$

## 2. Formulation volumes finis

### 2.1 Maillage

Le domaine est un canal ayant la forme de la figure 1. Le maillage du domaine utilise des volumes finis de type cell-center. Les variables d'état sont calculées aux barycentres des cellules. La discrétisation est effectuée avec 980 éléments et 544 nœuds (cf figure 2).

### 2.2 Formulation volumes finis

Par intégration des équations sur le volume fini  $I_i$

$\times T_n$  on obtient

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (W(x, t_{n+1}) - W(x, t_n)) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (F(Wx_{i+\frac{1}{2}}, t) - F(Wx_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} S(W) dt dx$$

Soient les notations

$$W_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t_n) dx,$$

$$IF_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(Wx_{i+\frac{1}{2}}, t) dt \text{ et}$$

$$S_i^n = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} S(W) dt dx$$

$IF_{i+\frac{1}{2}}, IF_{i-\frac{1}{2}}$  sont les flux numériques. Ces

derniers sont calculés par un solveur approché de Riemann [3]. Dans ce travail nous avons choisi le schéma de Roe [1,2,3,6].

Compte tenu de ce qui précède, le schéma numérique s'écrit alors

$$W_i^{n+1} = W_i^n - r(IF_{i+\frac{1}{2}} - IF_{i-\frac{1}{2}}) + \Delta t S_i^n$$

Afin d'assurer la stabilité de ce schéma numérique, nous avons utilisé une limitation du pas de temps l'aide de la condition CFL (Courant Friedrichs and Levy).

exprimée à l'aide des valeurs propres de la matrice

$$CFL = \Delta t \cdot \text{Max}(q_i \left| \lambda_{ij}^k \right| / \text{Area}(C_i)) \leq 1$$

de Roe par :

### 3- Intégration des termes de diffusion

On utilise les cellules décalées (figure 3).

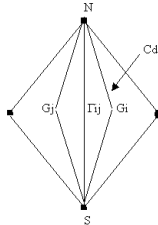


figure 3 : cellule décalée

On doit évaluer des termes de type

$$\int_{\Gamma_{ij}} a' \frac{\partial a}{\partial x} n_x d\sigma$$

On utilise une interpolation de Green-Gauss en écrivant l'approximation

$$\int_{\Gamma_{ij}} a' \frac{\partial a}{\partial x} n_x d\sigma = a' |_{\Gamma_{ij}} \frac{\partial a}{\partial x} |_{\Gamma_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} n_x d\sigma$$

où

$$a' |_{\Gamma_{ij}} = \frac{l_i(a')_i + l_j(a')_j}{l_i + l_j}$$

Le terme dérivé sur l'interface est approché en utilisant le co-volume  $C_d$  (figure ) par :

$$\frac{\partial a}{\partial x} |_{\Gamma_{ij}} \approx \frac{1}{\text{Area}(C_d)} \sum_{\varepsilon \in \partial C_d} a |_{\varepsilon} \int_{\varepsilon} \varepsilon n_{x\varepsilon} d\sigma$$

### 4. Expérience numérique

L'exemple traité ici représente un cas-test important pour tester la validité et la consistance du modèle et du code numérique développé. On considère le cas d'une rupture de barrage dans un réservoir à géométrie complexe. Le canal considéré possède une contraction. Le barrage est positionné au niveau de la contraction. (figure 1)

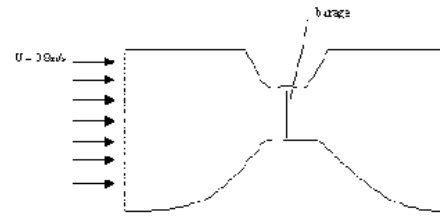


Fig. 1 : barrage au niveau de la contraction

Un cas-test identique a été traité dans la thèse de L. Menthe [4] pour simuler une rupture de barrage. Dans cette thèse, l'auteur a traité ce cas-test par volumes finis sur un maillage structuré non orthogonal.

Cet exemple a également été étudié par J. Fennema et H. Chaudry [5].

#### \* Description du cas-test

En entrée, on suppose un débit entrant de vitesse constante  $V = 0.8$  m/s. On cherche le champ des vitesses et le profil de la hauteur  $H$  à différents instants.

#### \* Données de simulation

Maillage : Non structuré de type Cell Center

Nombre d'éléments/Noeuds : 980/544

Pas de temps :  $DT = 0.1$

Viscosité :  $\nu = 0.000001$  m<sup>2</sup>/s

Coefficient de Manning : 0.

#### \* Conditions initiales

On suppose qu'initialement l'eau contenue dans le réservoir est au repos et à une hauteur constante de 5 m en amont et de 1.5 m en aval.  $H1 = 5$  m,  $H2 = 1.5$  m et à  $t=0$ ,  $U=V=0$  partout.

#### \* Conditions aux limites

A l'entrée de l'écoulement sur la face ouest, on suppose un débit entrant de vitesse constante  $U = 0.8$  m/s.

Sur les frontières solides  $U = V = 0$ . En sortie à l'aval, la hauteur est constante  $H2 = 1.5$  m

### 5. Conclusion

Les résultats obtenus pour ce cas académique montre la validité de notre modèle mathématique et numérique et également du code de calcul développé en se basant sur ce modèle.

Par ailleurs, on peut comparer certains de ces résultats à des travaux réalisés antérieurement sur des cas similaires par d'autres techniques [4,5]. Les essais réalisés sur chacun de ces cas-tests en faisant varier le pas de temps, les conditions aux limites ..etc nous permet d'affirmer la consistance et l'efficacité de notre code de calcul.

## Bbliographie

- [1] H. Belhadj "Résolution du système couplé Saint Venant / Transport utilisant la méthode des volumes finis et une technique de décomposition de domaine: Applications à la modélisation des phénomènes de crue et de rupture de barrage" Thèse d'état, EMI, labo Lash, à soutenir.
- [2] M. Chakir et al. "A nine point finite volume Roe scheme for shallow water equations coupled to pollutant transport including source terms", Proc. of 1<sup>st</sup> Int. Symposium on finite volumes for complex applications, pp 625-633, 1996.
- [3] R.J. Leveque "Numerical methods for conservation laws" Lectures in Mathematics ETH Zurich, Birkhauser Verlag, 1992.
- [4] L. Menthe "Etude des équations aux dérivées partielles hyperboliques : Application aux équations de Saint Venant, thèse de doctorat de l'Univ. de Rouen, INSA, 1997.
- [5] J. Fennema, H. Chaudry, Explicit methods for 2-D transient free-surface flows. Journal of Hydraulics Division, ASCE, 116:1013-1034, 1992.
- [6] F. Benkhaldoun, L.A. Menthe, Shallow water flow computations initially dry areas using accurate upwind schemes and non-structured meshes, Proc. Of 1<sup>st</sup> Int. Conf. On Environmental Problems in Coastal Regions. Brésil, pp. 305-314, 1996.
- [7] Y. Coudiere, J.P. Vila and P. Villedieu, 'Convergence of a finite volume scheme for a diffusion problem'. F. Benkhaldoun, R. Vilsmeier eds, Finite volume for complex applications, Hermes, Paris, pp 161-168, 1996.

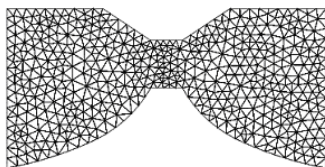


Figure 2 Maillage du canal  
980 e / 544 n

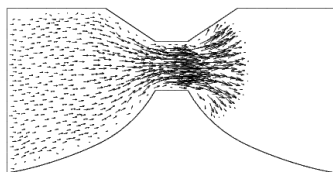


Fig 4.1 Distribution des vitesses  
à t = 0.04s

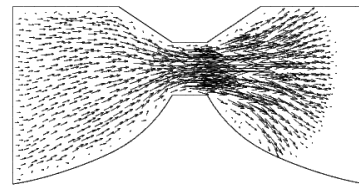


Fig 4.2 Distribution des vitesses  
à t = 0.07s

Fig 5 Courbes iso-valeurs de la hauteur  
à t = 0.04s

Fig 5.1 Hauteur sur la ligne Y=0.28

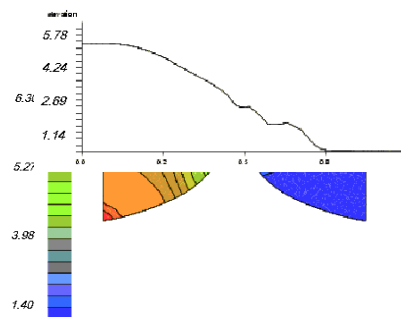


Fig 5.2 Hauteur sur la ligne Y=0.36

