Application de la méthode de synthèse modale alliée à une méthode de perturbation, pour le Calcul de la réponse dynamique d'une structure couplée à un fluide et dont les paramètres sont incertains

O. BENDAOU*,**, A. ELHAMI**, A. AANNAQUE*, M. AGOUZOUL*

* *École Mohammadia d'Ingénieurs - Département Mécanique - UFR : M.C.I.C.M.*
BP 765 Rabat-Agdal Maroc

** *Institut National des Sciences Appliquées de Rouen Laboratoire de Mécanique de Rouen*
Avenue de l'Université, 76801 Saint-Étienne du Rouvray Cedex France

Introduction

L'analyse dynamique des systèmes mécaniques est souvent onéreuse et parfois difficile à cause des limitations des ressources informatiques. Ces systèmes mécaniques sont souvent composés de plusieurs parties qui, pour des raisons d'organisation, sont calculées et testées indépendamment les unes des autres. Les méthodes de sous-structuration constituent souvent la seule stratégie de résolution. L'utilisation de ces méthodes est justifiée à la fois par des avantages sur le plan numérique et par la prise en compte des contraintes d'organisation des grands projets. L'une des stratégies de sous-structuration dynamique les plus utilisées et les plus efficaces est basée sur une technique de synthèse modale. La référence [Craig] dresse une synthèse de ces méthodes.

Par ailleurs, la compréhension des mécanismes d'interactions entre un fluide et un solide élastique est d'une importance capitale dans plusieurs applications industrielles. Quand une structure vibre en présence d'un fluide, il y a interaction entre les ondes propres de chaque milieu : l'écoulement fluide engendre une déformation structurale et/ou le mouvement d'un solide provoque le déplacement du fluide. Ces applications requièrent un couplage efficace. La thèse [Pavanello] présente une synthèse des modèles les plus utilisés pour l'interaction fluide-structure.

Une des principales hypothèses dans l'étude des systèmes mécaniques est que le modèle est déterministe, c'est-à-dire que les paramètres utilisés dans un modèle sont constants. Mais, en procédant à quelques expérimentations, on se rend compte des limites d'une modélisation déterministe. En effet, il y a toujours des différences entre les grandeurs calculées et celles mesurées. Les causes sont liées aux incertitudes au niveau de la géométrie, les propriétés des matériaux, les conditions aux limites ou les charges. Ceci a une influence considérable sur le comportement vibratoire des systèmes mécaniques. D'où l'intérêt d'utiliser des méthodes numériques pour prendre en compte ces incertitudes. Parmi ces méthodes, il y a celle de Monté Carlo [Shinozuka]. Elle est utilisée jusqu'à présent par la plus part des logiciels spécialisés ; mais, cette méthode a l'handicape d'être coûteuse en CPU. Une solution est l'emploi des méthodes de perturbation ([Muscolino] et [Kleiber]) qui sont efficaces et surtout, elles nécessitent beaucoup moins de temps de calcul.

Définition et modélisation de l'interaction fluide-structure

Définition du problème

L'étude de l'interaction fluide-structure peut être définie comme l'analyse du comportement couplé de deux milieux de nature différente. Le premier, constitué par une structure élastique et le second, par un fluide :

- Si le fluide est incompressible, le problème est dit : Hydro-Elastique ;
- Si le fluide est compressible, le problème est dit : Elasto-Acoustique ou Vibro-Acoustique.

Modélisation

Supposons que :

- la structure est élastique, linéaire, isotrope et sans contrainte ni déformation initiale ;
- le fluide est parfait autour de sa position de repos et on considère de petites perturbations en évolution adiabatique.

Après discrétisation et approximation par éléments finis on aboutit aux écritures matricielles suivantes (L est la matrice d'interaction) :

- Pour la structure :

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=[L]\{P\}$$

- Pour le fluide :

$$[E]\{\ddot{P}\}+[H]\{P\}=-\rho[L]^t\{\ddot{u}\}$$

On peut écrire finalement :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho_f L^t & E \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K & -L \\ 0 & H \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ P \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour déterminer les modes et les fréquences propres du système couplé, les matrices doivent être symétriques, ce qui n'est pas le cas. Donc on doit utiliser un procédé de symétrisation tel que celui de Irons.

Remarque : pour un problème Hydro-Elastique (fluide incompressible) la célérité du fluide est très grande ($c^2 \to \infty$), donc l'écriture matricielle du système couplé devient :

$$\left([M]+\rho_f[L][H]^{-1}[L]^t\right)\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{0\}$$

Calcul de la réponse dynamique

Avec la méthode de Newmark, la réponse dynamique du système couplé est calculée grâce à une intégration directe. Le procédé général consiste à discrétiser et de formuler ce qui se passe à l'instant (t + Δt) en fonction de ce qui se passe à l'instant (t), à partir d'un développement limité des déplacements et des vitesses.

Interaction fluide-structure stochastique

Les méthodes de perturbation sont très largement employées dans le domaine des éléments finis stochastiques. Elles sont basées sur un développement en série de Taylor de la fonction de réponse en fréquence (respectivement les fréquences propres ou la réponse dynamique) du système par rapport aux variables aléatoires physiques de base, propriétés mécaniques, caractéristiques géométriques ou efforts appliqués. Les méthodes de perturbation calculent la moyenne et l'écart type de la réponse d'une structure mécanique à variables incertaines. Cette méthode est utilisée dans de nombreux domaines, pour résoudre des problèmes linéaires et non linéaires, aussi bien en statique qu'en dynamique.

Supposons que :

$$[M_T]=\begin{bmatrix} M & 0 \\ \\ \rho_f L^t & E \end{bmatrix} \qquad [K_T]=\begin{bmatrix} K & -L \\ \\ 0 & H \end{bmatrix}$$

Et d est la réponse dynamique;

Pour un système couplé à variables incertaines on suppose que les matrices de masse et de rigidité sont fonctions des variables aléatoires $\{\alpha_p\}_{(p=1,\dots\dots,P)}$.

Soit $\{\overline{\alpha}\}$ le vecteur des paramètres moyens, et posons $\{d\alpha\}=\{\alpha\}-\{\overline{\alpha}\}$.

Pour simplifier l'écriture, la notation ci-dessus est adoptée pour les dérivées d'une quantité A:

$$[A]^0=[A]\big|_{\{\overline{\alpha}\}}, \quad [A]^n=\left.\frac{\partial[A]}{\partial\alpha_n}\right|_{\{\overline{\alpha}\}}, \quad [A]^{np}=\left.\frac{\partial^2[A]}{\partial\alpha_n\partial\alpha_p}\right|_{\{\overline{\alpha}\}}$$

$[A]^0, [A]^n$ *et* $[A]^{np}$ sont déterministes

la méthode de perturbation de Muscolino n'est utilisée que pour les systèmes dont les paramètres aléatoires sont indépendants. Elle est basée sur un développement en série de Taylor d'ordre un :

$$[K_T]=[K_T]^0+[K_T]^n\{d\alpha_n\}, \; [M_T]=[M_T]^0+[M_T]^n\{d\alpha_n\}$$
$$d=(d)^0+(d)^n\{d\alpha_n\}$$

Les moyennes sont données par :

$$E[d]=(d)^0$$

Les écarts types sont donnés par :

$$Et(d)=\left|(d)^n\,Et(\alpha_n)\right|$$

Synthèse modale pour le système couplé

La structure est divisée en N_s sous-structures et le fluide est divisé en N_f sous-domaines fluide.

La méthode de synthèse modale adoptée et celle de Graig et Bampton à interfaces fixes.

Le système après synthèse modale s'écrit :

$$\lfloor M_y \rfloor\{\ddot{y}\}+\lfloor K_y \rfloor\{y\}=\{0\}$$

Le vecteur $\{y\}$ contient :

- les coefficients associés aux modes tronqués de toutes les sous-structures
- les coefficients associés aux modes tronqués de tous les sous-domaines fluides
- les degrés de liberté physiques (déplacements, rotations..) de toutes les jonctions structurales
- les degrés de liberté physiques (pressions) de toutes les jonctions fluides

Après la synthèse modale, le nombre d'inconnus et la taille des matrices Masse et Rigidité du système couplé, n'est que la somme des modes propres locaux tronqués plus la somme des degrés de liberté de Jonctions.

Méthodes de perturbation avec synthèse modale

Pour un système couplé dont les degrés de liberté sont réduits par la méthode de synthèse modale. Les bases modales de réductions seront supposées déterministes pour la méthode de perturbation de Muscolino. Cette hypothèse est justifiée, puisque la méthode de perturbation n'est appliquée qu'aux systèmes dont les paramètres varient faiblement.

Validation numérique

Afin de valider les méthodes proposées, nous avons élaboré des codes de calcul avec Matlab. Nous allons prendre l'exemple simple d'une poutre couplée avec un fluide incompressible. Le schéma ainsi que les données du problème sont présentés ci-dessus :

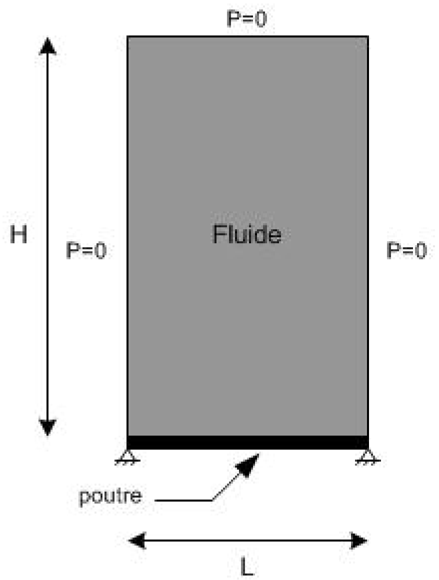

figure - 1 : schéma de l'exemple à traiter

Avec :

<u>- Pour la poutre :</u> L = 3 (m), I_z = O.333 e^{-4} (m^4),
S = 0.01 (m^2), E = 2.1 e^{11} (Pa),
ρ_s = 7800 (Kg/m^3) et
b = 0.05 (m) (largeur de la poutre)

<u>- Pour le fluide :</u> H = 6 (m), ρ_f = 1000 (Kg/m^3)

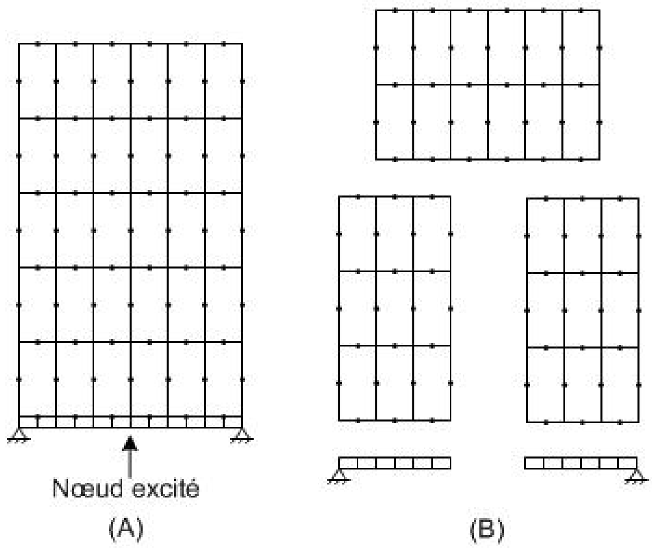

figure - 2 : Maillage et sous-structuration

Pour le calcul éléments finis, le fluide a été maillé avec des éléments rectangulaires à 8 nœuds et la poutre avec des éléments linéaires à 2 nœuds. La configuration (B) de la figure2 (sous-structuration : 3 sous-domaines fluide et 2 sous-structures) a été optée pour la réduction des degrés de liberté avec la méthode de synthèse modale.

Les figures ci-dessus montrent la moyenne et l'écart type de la réponse dynamique (le déplacement) obtenue numériquement, en supposant *que le milieu de la poutre est excité avec la force* « **400sin(900t) (N)** ». *Et en supposant que le module de Young et la masse volumique sont des variables aléatoires* :

- $E = 2.1e^{11}(1+0.02\delta)\ (Pa)$
- $\rho = 1000(1+0.05\delta)\ (Kg/m^3)$

δ est une variable aléatoire gaussienne telle que :

$$E(\delta)=0 \quad \text{et} \quad Et(\delta)=1$$

Le calcul a été fait avec la méthode de perturbation de Muscolino, avec et sans réduction des degrés de liberté. La simulation de Monté Carlo va servir de référence.

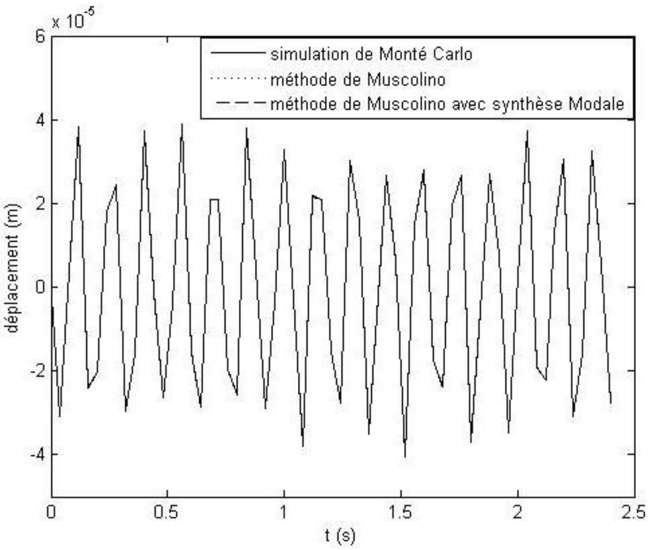

figure - 3 : la moyenne de la réponse dynamique

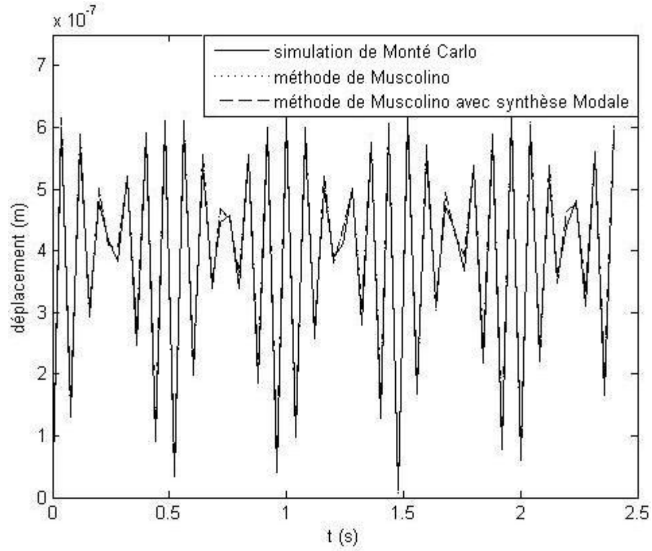

figure - 4 : l'écart type de la réponse dynamique

Conclusions

Nous avons proposé une méthode de perturbation alliée à une méthode de synthèse modale pour la résolution des problèmes stochastiques d'interaction fluide-structure de grande taille. Malgré des problèmes de convergence, les méthodes de perturbation ont l'avantage de nécessiter moins de temps de calcul que celle de Monté Carlo.

Les résultats obtenus dans le cas d'une poutre couplée à un fluide tendent à montrer la validité et les potentialités de la démarche proposée : la moyenne et l'écart type de la réponse dynamique du système couplé ont été calculées en supposant que le module de Young et la masse volumique du fluide sont des variables aléatoires. Le calcul a été fait avec la simulation de Monté Carlo et la méthode de perturbation avec et sans réduction des degrés de liberté. Les différences entre les résultats des trois méthodes ne sont pas significatives.

Références

[Craig] Craig R. R., "Substructure methods in vibration", Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, 117, 207–213, 1995.

[El hami] El hami A., Borza D. and Souza De Cursi E., "Vibroacoustic analysis of cyclic structures", XI DINAME, 2005.

[Kleiber] Kleiber M and Hien T.D., "The stochastic finite element method", Ed. Jhon Wiley, 1992.

[Muscolino] Muscolino G., Ricciardi G. and Impollonia N, "Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input", Probabilistic Engineering Mechanics, 15, 199-212, 1999.

[Pavanello] Pavanello R, "Contribution à l'étude hydro-elastique des structures à symetrie cyclique", thesis, 1991.

[Shinozuka] Shinozuka M., "Monte Carlo solution of structural dynamics", International Journal Computer Structural, 2, 855-874, 1972.