

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est de développer une méthode efficace et performante pour l'analyse des vibrations linéaires forcées des structures sandwich viscoélastiques basée sur la méthode des éléments finis. Le modèle de Love Kirchhoff a été adopté pour les couches élastiques et celui de Mindlin pour les couches viscoélastiques. La formulation ainsi présentée tient compte des modules viscoélastiques de manière généralisée dans le but d'y introduire différents modèles viscoélastiques. La Méthode Asymptotique Numérique a été développée pour ce problème et permet de déterminer les courbes de réponse avec un temps de calcul CPU très réduit. Les fréquences amorties, l'amortissement équivalent et les courbes de résonances des poutres et plaques sandwich viscoélastiques sous différentes conditions aux limites et soumises à différentes excitations ont été déterminés.

Mots clés : Vibrations, éléments finis, méthode asymptotique numérique, amortissement, poutre, plaque, sandwich, viscoélasticité.

INTRODUCTION

Dans le cadre de la vibroacoustique, le but est d'amortir les niveaux maximums de résonances sur une large bande pour diminuer le bruit rayonné. L'utilisation de matériaux viscoélastiques, en particulier sous forme de sandwich (parements d'acier ou de verre collés par une couche viscoélastique mince) est un moyen traditionnel pour augmenter l'amortissement. Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, les matériaux amortissants sont caractérisés par un module d'Young complexe dépendant de la fréquence et de la température. Une difficulté en calcul de structures est la prise en compte de tels modules complexes.

Plusieurs travaux analytiques et numériques [1,2,5] ont été réalisés pour le calcul de l'amortissement et des fréquences amorties des structures sandwich viscoélastiques. Il existe au moins six méthodes pour calculer l'amortissement des ces structures sandwich [1-2]. Certaines de ces méthodes sont restreintes au concept du module complexe constant et d'autres donnent une approximation du facteur de perte et de la fréquence amortie pour les structures faiblement amorties. Parmi les méthodes les plus précises, on trouve celles qui résolvent directement le problème aux valeurs propres complexes [5]. Cependant, elles ne donnent pas d'informations sur les amplitudes réelles des vibrations. Seul le calcul des courbes de réponses permet un accès direct à ces amplitudes mail il nécessite l'inversion de la matrice dynamique à chaque fréquence augmentant ainsi le temps de calcul.

L'objectif de ce travail est de mettre au point une méthode numérique pour le calcul des courbes de réponses des structures sandwich de forme quelconque. La méthode proposée est basée sur la MAN [3] en associant une technique de perturbation et une discrétisation E.F.

Dans cette partie, nous rappelons la formulation variationnelle du problème des vibrations forcées linéaires des plaques sandwich, constituées de deux couches

élastiques d'épaisseur identique H et d'une couche viscoélastique d'épaisseur h (figure 1).

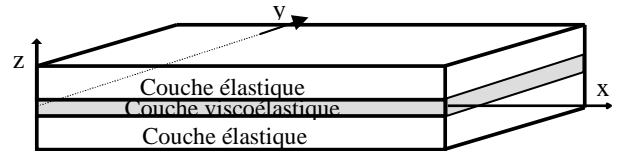


Figure 1 : Tôle sandwich

1.1. Modèle cinématique

Pour formuler ce problème, on utilise le modèle de Love Kirchhoff pour les deux couches d'acier et le modèle de Mindlin pour la couche interne, viscoélastique, pour mieux tenir compte du cisaillement. D'après, plusieurs travaux [4,5], on suppose de plus que les trois couches sont parfaitement collées entre elles et ont la même flèche (déplacement transversal). Ainsi, les déplacements et les déformations dans les couches élastiques sont de la forme :

$$\begin{cases} U_i(x, y, z, t) = u_i(x, y, t) - (z - z_i) \frac{\partial w}{\partial x}, & i=1,3 \\ V_i(x, y, z, t) = v_i(x, y, t) - (z - z_i) \frac{\partial w}{\partial y} \\ W_i(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\{\epsilon_i\} = \{\epsilon_i^t\} + (z - z_i) \{\kappa\} \quad (2)$$

$$\epsilon_i^t = \{u_{i,x}; v_{i,y}; u_{i,y} + v_{i,x}\}, \quad \kappa = \{-w_{,xx}; -w_{,yy}; -2w_{,xy}\}$$

où $z_1=(H+h)/2=-z_3$, l'indice 1,3 désigne la couche supérieure, inférieure de la plaque. $u_i(x,y,t)$, $v_i(x,y,t)$ sont les déplacements de la surface moyenne de la face élastique i. Les déplacements, les déformations dans le plan de la couche interne ϵ_2 et la déformation de cisaillement ξ_2 sont de la forme :

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\beta_x(x, y, t) \\ V(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z\beta_y(x, y, t) \\ W(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (3)$$

$$\{\epsilon_2\} = \{\epsilon_2^t\} + z\{\kappa_2\} \quad (4)$$

$$\epsilon_2^t = \{u_{,x}; v_{,y}; u_{,y} + v_{,x}\}, \quad \xi_2 = \begin{Bmatrix} w_{,x} - \beta_x \\ w_{,y} - \beta_y \end{Bmatrix}$$

$$\kappa_2 = \{\beta_{x,x}; \beta_{y,y}; \beta_{x,y} + \beta_{y,x}\}$$

où $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $\beta_x(x,y,t)$ et $\beta_y(x,y,t)$ sont respectivement les déplacements et les rotations de la surface moyenne de la couche viscoélastique.

1.2. Loïs de comportement

Nous considérons que le matériau des couches élastiques est linéaire, homogène et isotrope. En négligeant les déformations de cisaillement, les lois de comportement de ces couches sont données par :

$$\begin{cases} \{N_i\} = \begin{Bmatrix} N_{ixx} ; N_{iyy} ; N_{ixy} \end{Bmatrix} = [C_m] \{\varepsilon'_i\} \\ \{M_i\} = \begin{Bmatrix} M_{ixx} ; M_{iyy} ; M_{ixy} \end{Bmatrix} = [C_f] \{\kappa\} \end{cases} \quad (5)$$

où N_i , M_i sont les vecteurs représentant les efforts normaux et les moments fléchissant. $[C_m]$ est la matrice de comportement en membrane et $[C_f]$ est celle en flexion.

En général, le comportement du matériau viscoélastique dépend de plusieurs paramètres (température, temps...). Ce type de comportement peut être caractérisé à partir des essais de relaxation et de fluage. Cependant, le comportement de ces matériaux soumis à des sollicitations harmoniques de pulsation ω , peut être défini par un module d'Young complexe $E_{vis}(\omega)$ et un coefficient de Poisson ν supposé constant et réel, lorsque le matériau est homogène, isotrope et non vieillissant. A cet égard, les lois viscoélastiques s'écrivent à partir d'opérateurs de convolution :

$$\{N_2\} = [C_m^2(t)] * \frac{\partial}{\partial t} \{\varepsilon'_2\}, \quad \{M_2\} = [C_f^2(t)] * \frac{\partial}{\partial t} \{\kappa_2\} \quad (6a)$$

$$\{Q_2\} = \begin{Bmatrix} Q_{2x} \\ Q_{2y} \end{Bmatrix} = [C_{cis}^2(t)] * \frac{\partial}{\partial t} \{\xi_2\} \quad (6b)$$

N_2 , Q_2 et M_2 sont les vecteurs représentant les efforts normaux, de cisaillement et les moments fléchissants de la couche centrale.

1-3 Equation du mouvement :

Pour la discrétisation par éléments finis, l'élément DKT sandwich est adopté [4]. En utilisant les conditions de raccord cinématiques aux interfaces des couches, cet élément est construit en assemblant deux éléments triangulaires à trois noeuds (DKT) et un élément volume dans la couche centrale. Après discrétisation par éléments finis, le problème des vibrations forcées des structures sandwich peut s'écrire sous la forme suivante [6] :

$$[K(0) + E(\omega)K - \omega^2 M][U] = [F] \quad (7)$$

avec $K(0)$ est une matrice réelle qui tient compte de l'élasticité retardée du matériau viscoélastique, $E(\omega)$ est le module d'Young complexe dépendant de la fréquence, M est la matrice de masse, U est le mode complexe et F est le vecteur d'excitation.

La résolution numérique de tel problème nécessite l'inversion de la matrice complexe pour chaque incrément de ω . Cela nécessite un grand temps de calcul et particulièrement pour les discrétisations raffinées. Notre objectif ici est d'utiliser la Méthode Asymptotique Numérique comme solver. Les inconnus du problème (7) sont développées en séries entières sous la forme suivante :

$$\omega^2(\varepsilon) = \omega_0^2 + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \omega_j, \quad U(\varepsilon) = U_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j U_j \quad (8)$$

avec U_j et ω_j sont des inconnus à déterminer.

Dans cette analyse, le module d'Young est donné, en fonction de la fréquence, et donc sous forme de série entière suivante :

$$E(\omega) = E_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j E_j \quad (9)$$

En injectant les équations (8) et (9) dans le problème (7) et en identifiant les termes suivant la puissance de ' ε ', on obtient une suite de problèmes linéaires ayant le même opérateur tangent $[A]$ à inverser :

$$\text{Ordre 0: } \begin{cases} [A][U_0] = [F] \\ [A] = [K - \omega_0^2 M] \end{cases}, \quad \omega_0 \text{ est donnée} \quad (10a)$$

$$\text{Ordre 1: } [A][U_1] = \omega_1^2 [M][U_0] - E_0 [K][U_0] \quad (10b)$$

$$\text{Ordre } (j \geq 2): [A][U_j] = \sum_{i=1}^j \omega_i^2 [M][U_{j-i}] - \sum_{i=0}^{j-1} E_i [K][U_{j-i}] \quad (10c)$$

Pour une fréquence initiale donnée ω_0 , la solution du système linéaire (10a) est le déplacement initial U_0 pour une excitation F donnée.

La résolution des problèmes (10) permet de déterminer les termes des séries jusqu'à l'ordre (n). On obtient ainsi une représentation de la solution par développement tronqué à l'ordre (n). Cette représentation a un rayon de convergence. Un critère définissant la limite de validité est donnée par :

$$a_{\max} = \left(\varepsilon \frac{\|U_1\|}{\|U_n\|} \right)^{1/n-1} \quad (11)$$

avec ε est un paramètre de précision [5].

Cela permettra d'appliquer la MAN pas à pas dans une procédure de continuation. Pour augmenter le domaine de convergence des séries (8), les approximants de Padé ont été considérés [6] :

$$U = U_0 + \sum P[M, N](a) V_i \quad (12)$$

avec : V_i : obtenus par orthogonalisation des U_i , $P[M, N]$: approximants de Padé.

2-MODELE VISCOELASTIQUE UTILISE:

Dans cette étude, deux modules viscoélastiques ont été considérés :

$$1) \text{ Module constant et complexe: } E = E_0 (1 + i\eta_c) \quad (13)$$

avec E_0 est le module élastique réel et η_c est le facteur de perte de la structure constants.

2) Modèle de Maxwell généralisé:

$$E = E_0 \left(1 + i\eta_c \omega + \sum_{j=1}^{N_{\max}} i\omega / \left(\frac{i\omega}{k_j} + \frac{1}{\eta_j} \right) \right) \quad (14)$$

les coefficients η_j et k_j sont donnés expérimentalement.

Notant que dans ce travail, le coefficient de Poisson ν est supposé constant et réel.

3- RESULTATS NUMERIQUES

En utilisant la Méthode Asymptotique Numérique, les vibrations des poutres et des plaques de différentes formes et conditions aux limites ont été analysées. Premièrement, on a testé cette méthode pour le cas élastique en traçant la

courbe de réponse avec la méthode de continuation basée sur les séries entières (figure 2a) et sur les approximants de padé (figure 2b). (•) indique le point de démarrage de la MAN et donc une inversion d'une matrice dynamique. Notons que dans le cadre de la série, une grande accumulation de pas est observée dans la zone de résonance. Ce qui est normal à cause des singularités. La figure (2b) montre la puissance des approximants de padé par rapport aux séries entières (figure 2a) du fait qu'un seul pas est suffisant pour chaque résonance.

Dans les figures 3 et 4, on présente les résultats obtenus pour une plaque sur appuis simples. Les courbes de réponse à différentes valeurs d'amortissements sont obtenues par la continuation de la MAN avec Padé. Ainsi un pas de la MAN est suffisant pour chaque résonance. Les résultats de figure 3 sont obtenus par deux pas de la MAN. Sur la figure 4, les courbes de réponse d'une plaque presque carrée ont été présentées. Ce test a été choisi pour tester la méthode sur les résonances très voisines. Les résultats obtenus montrent clairement que cette méthode de continuation permet d'obtenir les courbes de réponse et de manière automatique et à coût très réduit.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons développé une méthode qui permet de résoudre le problème de vibrations forcées des structures sandwich viscoélastiques avec un temps de calcul très réduit. La méthode de continuation basée sur les séries entières et sur les approximants de Padé est premièrement testée pour les courbes de résonances d'une plaque élastique. L'efficacité des deux méthodes est largement démontrée par rapport à la méthode classique d'inversion de système. L'efficacité et l'applicabilité de cette méthode ont été testées ici pour les vibrations forcées des plaques et poutre sandwich viscoélastiques avec différentes modules viscoélastiques, différentes formes et conditions aux limites.

REMERCIEMENTS :

Ce travail a été supporté par l'Action Intégrée Franco-marocaine N°: MA/05/117, PROTARS III D11/22 (2004) et le projet européen CASSEM.

REFERENCES:

[1] ML . Soni. Shock vibration Bull 1981; 55(1): 97-109.
 [2] C.D. Johnson, D.A. Kienholz and L.C. Rogers. Shock and Vibration Bulletin, 51(1) (1981), 71-81.
 [3] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil et M. Potier-Ferry, , International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36 (1993), 1251–1277.
 [4] E.M. Daya M. Potier-Ferry, Revue Européenne des Eléments finis, 11(1) (2002) 533-541.
 [5] L. Duigou, E.M. Daya and M. Potier-Ferry, Comput. Methods Appl. Engreg., 192 (2003), 1323-1335.
 [6] F. Abdoun, L. Azrar, E.M. Daya et M. Potier-Ferry, Forced harmonic response of viscoelastic sandwich structures by an asymptotic numerical method. Soumis au Computer and Structures, 2006.

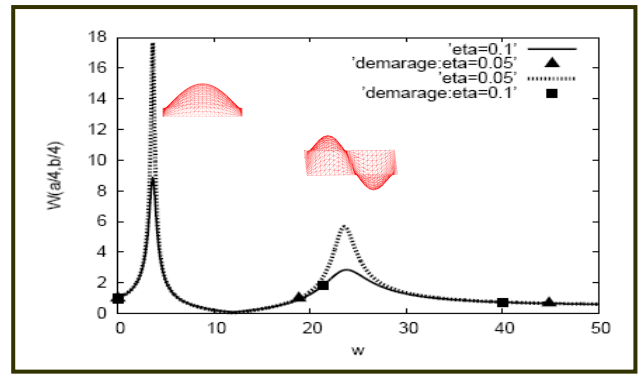


Figure 3 : Courbes de réponses d'une plaque carrée en utilisant les approximants de Padé

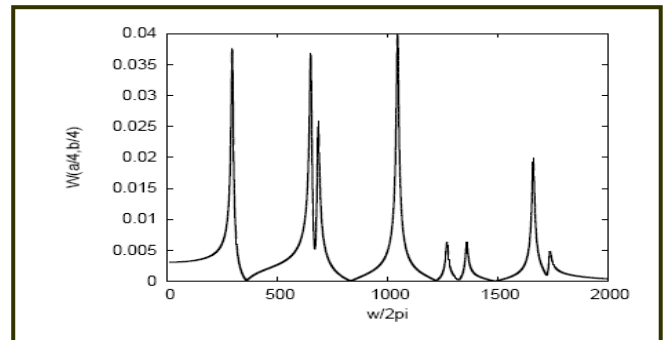
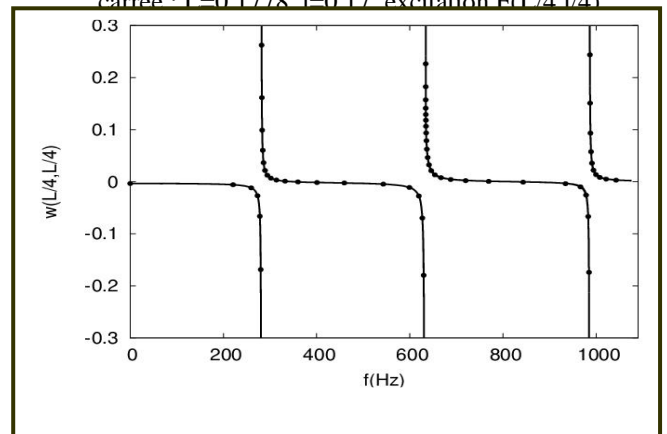
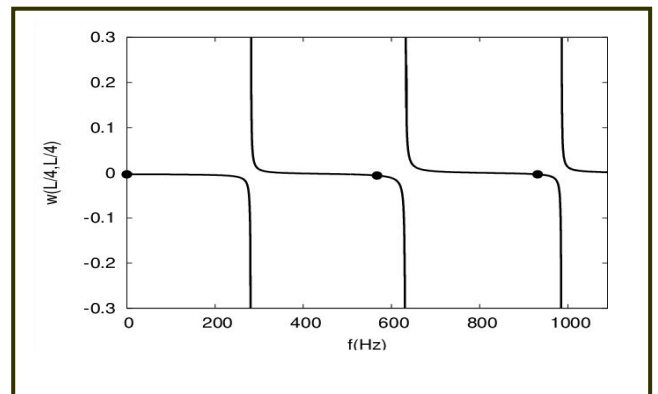


Figure 4 : Courbe de réponse d'une plaque presque carrée : I=0.1778 l=0.17 excitation F(l/4, l/4)



(a)



(b)

Figure 2: Courbe de réponse pour une plaque carrée en utilisant la méthode continuation avec:
 a) Séries entières , b) les approximants de Padé