Contrôle actif des vibrations non linéaires des poutres sandwich piézoélectriques par la méthode des échelles multiples

M.S. RECHDAOUI [1], L. AZRAR [1], S. BELOUETTAR [2], E.M. DAYA [3] ET M. POTIER-FERRY [3]

[1] Equipe de Modélisation Mathématique et Contrôle, Département de Mathématiques, UFR SPI et MAM
FST de Tanger, Université Abdelmalek Essaadi, BP 46, Tanger, Maroc

[2] CRP Henri Tudor, LTI, 70, Rue de Luxembourg, Esch/Alzette, L-4221, Luxembourg

[3] LPMM, UMR CNRS 7554, Université Paul Verlaine, Ile du Saulcy, F-57045 Metz, France

I- Introduction

Le contrôle actif de vibrations des poutres sandwich piézoélectrique/élastique/piézoélectrique a été étudié dans [1] par un modèle simplifié. En utilisant les structures à actionneurs et capteurs piézo-électriques et en tenant compte des non linéarités géométriques, un modèle de contrôle de vibrations non linéaires à été obtenu via une commande par rétroaction (feedback) proportionnelle et dérivée du potentiel électrique. Une méthodologie mathématique, basée sur la méthode des échelles multiples, pour le contrôle de vibrations non linéaires et l'étude la stabilité ont été élaborées dans le cadre de ce travail. Un système d'équations d'amplitude et de phases complexes tenant compte des paramètres de non linéarité géométrique et de l'effet piézoélectrique est obtenu. Le contrôle de résonances, de résonances secondaires, sous harmoniques et sur harmoniques a été développé. Les effets de rétroaction (feedback) ont été analysés pour les petites et grandes amplitudes de vibrations des poutres sandwich. Les courbes de réponses fréquentielles sont présentées et discutées pour divers paramètres de gain.

II- Formulation mathématique

La modélisation du mouvement vibratoire d'une poutre sandwich piézoélectrique /élastique/ piézoélectrique (voir figure 1) donne lieu à un système d'équation aux dérivées partielles de forte non linéarité [1]. On suppose que le potentiel de l'actionneur φ_A est lié au potentiel du capteur φ_S par la loi de contrôle : $\varphi_A = G_p\varphi_S + G_d\dot{\varphi}$ où Gp et Gd sont les paramètres de gain. En négligeant l'effet axial en déplacement et en inertie on obtient [1] :

$$(\rho S)_* \ddot{w} + (EI)_* w_{,xxxx} - N(t)\, w_{,xx} - B_M\,(w_{,xx}^2 + w_{,x} w_{,xxx}) \qquad (1)$$
$$-(ES)_{pe} G_d z_s\, (\dot{w}_{,x}\, w_{,xxx} + 2\,\dot{w}_{,xx}\, w_{,xx} + w_{,x}\, \dot{w}_{,xxx} - z_s\, \dot{w}_{,xxxx}) = F_z$$

Où N(t) est l'effort axial. Pour établir une relation simple et exploitable entre la loi de contrôle et la structure sandwich piézoélectrique et en supposant que la structure est excitée par la force harmonique $F_Z(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$, on adopte l'approximation de Galerkin ;

$$w(x,t) = \sum_n q_n(t)\, w_n(x) \qquad (2)$$

Où $w_n(x)$ sont les modes de vibrations libres et $q_n(t)$ les amplitudes associées. L'insertion de (2) dans (1) même à un système différentiel non linéaire dont les coefficients dépondent des paramètres du contrôle Gp et Gd. Dans le but d'analyser le contrôle des poutres sandwich piézoélectrique/élastique/piézoélectrique de manière simplifiée un seul mode est considéré ici. Cela mène alors à l'équation différentielle :

avec :

$$2\mu = \frac{(ES)_{pe} G_d z_s^2}{M}\beta \quad , \quad \alpha_2 = \frac{B_M}{2M}\xi_3 + \frac{B_N}{M}\xi_1$$

$$\alpha_3 = \frac{(ES)_*}{2M}\xi_2 \quad , \quad \alpha_4 = \frac{(ES)_{pe} G_d z_s}{M}(\xi_3 - \xi_1),$$

$$\alpha_5 = -\frac{(ES)_{pe} G_d}{M}\xi_2 \quad , \quad \omega_L^2 = \frac{\beta (EI)_*}{M}$$

$$\xi_1 = \frac{F_1(L)}{L}\int_0^L w_n w_{n,xx} dx \quad , \quad \xi_2 = -\frac{F_2(L)}{L}\int_0^L w_n w_{n,xx} dx \qquad (3-b)$$

$$\xi_3 = -2\int_0^L \left(w_{n,xx}^2 + w_{n,x} w_{n,xxx}\right) w_n dx$$

$$F_1(x) = \int_0^x w_{n,ss}(s) ds \quad , \quad F_2(x) = \int_0^x \left(w_{n,s}(s)\right)^2 ds$$

$$\beta = \int_0^L w_{n,xxxx}(x) w_n(x) dx \quad , \quad \widehat{F} = \int_0^L f(x) w_n(x) dx$$

$$F_1 = \frac{\widehat{F}}{M} \quad , \quad M = \alpha(\rho S)_* \quad , \quad \alpha = \int_0^L w_n(x)^2 dx$$

III- Méthode des échelles multiples

Cette équation peut être analysée par la méthode des balances harmoniques [1]. Pour tenir compte de tous les paramètres influents, plusieurs harmoniques sont nécessaires. Cela mène à un système complexe et lourd à analyser. Dans ce travail, la méthode des échelles multiples est adoptée et différents types de résonances sont considérés.

III-1- Résonance principale : $\omega \cong \omega_L$

Considérons l'équation suivante :

$$\ddot{q}(t) + \omega_L^2 q(t) = -\varepsilon \left[\, 2\mu\, \dot{q}(t) + \alpha_2\, q^2(t) + \alpha_3 q^3(t) + \alpha_4\, q(t)\dot{q}(t) + \alpha_5\, \dot{q}(t) q^2(t) - F_1 \cos(\omega t) \,\right] \qquad (4)$$

Où ε est un petit paramètre. On suppose que la solution s'écrit sous la forme [2]:

$$q(t,\varepsilon) = q_0(T_0,T_1) + \varepsilon\, q_1(T_0,T_1) + \cdots \qquad (5)$$

avec : $T_i = \varepsilon^i t \quad ; \quad i = 0,1$

La dérivé ordinaire par rapport au temps devient :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \cdots = D_0 + \varepsilon D_1 \cdots \qquad (6)$$

En substituant les équations (5) et (6) dans (4) et en identifiant l'ordre de ε , on obtient :

$$\begin{cases} D_0^2 q_0 + \omega_L^2 q_0 = 0 & (7-a) \\ D_0^2 q_1 + \omega_L^2 q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - 2\mu D_0 q_0 - \alpha_2 q_0^2 - \alpha_3 q_0^3 - \alpha_4 q_0 D_0 q_0 & (7-b) \\ \qquad - \alpha_5 q_0^2 D_0 q_0 + F_1 \cos(\omega) & \end{cases}$$

La solution générale de l'équation (7-a) est donnée par :

$$q_0 = A(T_1)\exp(i\omega_L T_0) + cc$$

Où cc indique le complexe conjugué et $A(T_1) \in \mathfrak{C}$ amplitude complexe inconnue. La substitution de q_0 dans (7-b), mène à :

$$D_0^{\,2} q_1 + \omega_L^{\,2} q_1 = -\big(2i\omega_L\,(A'+\mu A) + i\omega_L \alpha_5 A^2 \bar{A} + 3\alpha_3 A^2 \bar{A}\ \big) e^{i\omega_L T_0} + \frac{F_1}{2} e^{i\omega T_0} - (\alpha_2 + i\alpha_4) A^2 e^{2i\omega_L T_0} - (\alpha_3 + i\omega\alpha_5) A^3 e^{3i\omega_L T_0} - \alpha_2 A\bar{A} + cc \tag{8}$$

Où ($'$) désigne la dérivation par rapport à T_1. En posant $\omega = \omega_L + \varepsilon\sigma$ avec $\sigma = O(1)$, le terme séculaire est donné par :

$$2i\omega_L\,(A'+\mu A) + i\omega_L \alpha_5 A^2 \bar{A} + 3\alpha_3 A^2 \bar{A} - \frac{F_1}{2} e^{i\sigma T_1} = 0 \tag{9}$$

Posons : $A = 1/2\, a(T_1)\, e^{i\beta(T_1)}$ (10)

On obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} a' = -\mu a - \dfrac{1}{8}\alpha_5 a^3 + \dfrac{F_1}{2\omega_L}\sin(\gamma) \\ a\,\gamma' = \sigma a - \dfrac{3}{8\omega_L}\alpha_3 a^3 + \dfrac{F_1}{2\omega_L}\cos(\gamma) \end{cases} \tag{11}$$

Où $\gamma = \sigma T_1 - \beta = \varepsilon\sigma t - \beta$ (12)

Les solutions stationnaires cherchées sont définies pour des amplitudes et phases constantes. En posant $\omega = \omega_L + \sigma$ puis $\omega^2 \approx \omega_L^{\,2} + 2\omega_L\sigma$, on retrouve le système obtenue en appliquant la méthode de la balance harmonique au voisinage de la première fréquence propre [1]. La relation fréquence-amplitude dans ce cas est donnée par :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_L} - 1 - \frac{3}{8\omega_L^{\,2}}\alpha_3 a^2\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\omega_L} + \frac{1}{8\omega_L}\alpha_5 a^2\right)^2 = \left(\frac{F_1}{2a\omega_L^{\,2}}\right)^2 \tag{13}$$

La stabilité des points d'équilibre peut être facilement analysée par le Jacobien de (11).

Pour analyser de manière séparée l'effet des non linéarités quadratiques et cubiques, on utilise l'équation suivante :

$$\ddot{q}(t) + \omega_L^{\,2} q(t) = -2\varepsilon\mu\,\dot{q}(t) - \varepsilon\alpha_2 q^2(t) - \varepsilon^2 \alpha_3 q^3(t) - \varepsilon\alpha_4\, q(t)\dot{q}(t) - \varepsilon^2\alpha_5\, \dot{q}(t) q^2(t) + \varepsilon^2 F_1 \cos(\omega t) \tag{14}$$

avec : $\omega = \omega_L + \varepsilon^2\sigma$. Dans ce cas, les ordres supérieurs de (5) sont pris en compte et le système différentiel qui en résulte est donné par :

$$\begin{cases} \dot{a} = -\mu a - \dfrac{\Gamma_4}{8\omega_L} a^3 - \dfrac{F_1}{2\omega_L}\cos(\gamma) \\ a\,\dot{\gamma} = a\sigma + \dfrac{\mu^2 a}{2\omega_L} - \dfrac{\Gamma_3}{8\omega_L} a^3 + \dfrac{F_1}{2\omega_L}\sin(\gamma) \end{cases} \tag{15}$$

avec : $\gamma = \sigma T_2 - \beta = \varepsilon^2\sigma t - \beta$, et

$$\Gamma_3 = 3\alpha_3 - \frac{10}{3}\frac{\alpha_2^{\,2}}{\omega_L^{\,2}} - \frac{1}{3}\alpha_4^{\,2}\ ;\ \Gamma_4 = \omega_L\alpha_5 - \frac{\alpha_2\alpha_4}{\omega_L}$$

Finalement, la solution de (4), correspondant à ce cas, est donnée par :

$$q(t) = a\cos(\omega t - \gamma) + \varepsilon a^2\left(-\frac{1}{2}\frac{\alpha_2}{\omega_L^{\,2}} + \frac{1}{6}\frac{\alpha_2}{\omega_L^{\,2}}\cos(2\omega t - 2\gamma) - \frac{\alpha_6}{6\omega_L}\sin(2\omega t - 2\gamma)\right) \tag{16}$$

avec a et γ sont solutions du système (15). A l'équilibre, on obtient l'équation d'amplitude suivante :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_L} - 1 + \frac{\mu^2}{2\omega_L^{\,2}} - \frac{\Gamma_3}{8\omega_L^{\,2}} a^2\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\omega_L} + \frac{\Gamma_4}{8\omega_L^{\,2}} a^2\right)^2 = \left(\frac{F_1}{2a\omega_L^{\,2}}\right)^2 \tag{17}$$

Cette équation généralise (13) vu que tous les coefficients de (3-a) apparaissent et leurs effets peuvent être analytiquement analysés.

III-2- Résonances secondaires : (Forte excitation)

Quand la fréquence de l'excitation ω et loin de ω_L, l'effet de l'excitation sera petit à moins que son amplitude soit grande. C'est-à-dire, à moins que $F_1 = O(1)$. Dans ce cas l'équation (4) est réécrite comme suite :

$$\ddot{q}(t) + \omega_L^{\,2} q(t) = -\varepsilon\,[\ 2\mu\,\dot{q}(t) + \alpha_2 q^2(t) + \alpha_3 q^3(t) + \alpha_4\, q(t)\dot{q}(t) + \alpha_5\,\dot{q}(t) q^2(t)\ ] + F_1\cos(\omega t) \tag{18}$$

L'application de la méthode des échelles multiples, mène au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} D_0^{\,2} q_0 + \omega_L^{\,2} q_0 = F_1\cos(\omega_L T_0 + \sigma T_2) & (19-a) \\ D_0^{\,2} q_1 + \omega_L^{\,2} q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - 2\mu D_0 q_0 - \alpha_2 q_0^{\,2} & (19-b) \\ \qquad - \alpha_3 q_0^{\,3} - \alpha_4 q_0 D_0 q_0 - \alpha_5 q_0^{\,2} D_0 q_0 & \end{cases}$$

La solution générale de (19-a) s'écrit sous la forme

$$q_0 = A(T_1) e^{i\omega_L T_0} + \Lambda e^{i\omega T_0} + cc \tag{20}$$

avec : $\Lambda = F_1 / 2\left(\omega_L^{\,2} - \omega^2\right)$

Les résonances secondaires peuvent être analysées par la résolution de (19-b). On distingue deux cas excitations : sur harmoniques $(\omega \cong 1/p\ \omega_L)$ et sous harmoniques $(\omega \cong p\,\omega_L)$ (p=2,3).

▪ **Excitation sur harmonique : exemple** $\omega \cong 1/3\ \omega_L$

$$3\omega = \omega_L + \varepsilon\sigma \quad \Rightarrow \quad 3\omega T_0 = \omega_L T_0 + \sigma T_1$$

Dans ce cas, la condition de solvabilité est :

$$2i\omega_L\,(A'+\mu A) + i\omega_L\alpha_5 A^2\bar{A} + 3\alpha_3 A^2\bar{A} + 2\Lambda^2 A(3\alpha_3 + i\omega_L\alpha_5) + (\alpha_3 + i\omega\alpha_5)\Lambda^3 e^{i\sigma T_1} = 0 \tag{21}$$

et l'équation d'amplitude associées est :

$$\left(\sigma - \frac{3}{8\omega_L}\alpha_3 a^2 - 3\Lambda^2\frac{\alpha_3}{\omega_L}\right)^2 + \left(\mu + \frac{1}{8}\alpha_5 a^2 + \Lambda^2\alpha_5\right)^2 = \left(\Lambda^3\alpha_5\frac{\omega}{\omega_L a}\right)^2 + \left(\Lambda^3\frac{\alpha_3}{\omega_L a}\right)^2 \tag{22}$$

▪ **Excitation sur harmonique : exemple** $\omega \cong 2\ \omega_L$

$$\omega - \omega_L = \omega_L + \varepsilon\sigma \quad \Rightarrow \quad (\omega - \omega_L) T_0 = \omega_L T_0 + \sigma T_1$$

Dans ce cas, la condition de solvabilité est :

$$2i\omega_L\,(A'+\mu A) + i\omega_L\alpha_5 A^2\bar{A} + 3\alpha_3 A^2\bar{A} + 2\Lambda^2 A\,(3\alpha_3 + i\omega_L\alpha_5) + (2\alpha_2 + i\,(\omega - \omega_L)\alpha_4)\Lambda\bar{A} e^{i\sigma T_1} = 0 \tag{23}$$

En posant $\gamma = \sigma T_1 - 2\beta$, on obtient l'équation d'amplitude :

$$\left(\sigma - \frac{3}{4\omega_L}\alpha_3 a^2 - 6\Lambda^2\frac{\alpha_3}{\omega_L}\right)^2 + \left(2\mu + \frac{1}{4}\alpha_5 a^2 + 2\Lambda^2\alpha_5\right)^2 = \left(\Lambda\alpha_4\frac{\omega - \omega_L}{\omega_L}\right)^2 + \left(2\Lambda\frac{\alpha_2}{\omega_L}\right)^2 \tag{24}$$

III-3- Simulation numérique

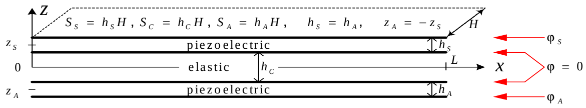

Figure1 : poutre sandwich piézoélectrique/élastique/ piézoélectrique

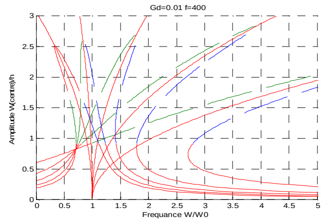

Fig2-a : Effet de Gp (Gp=0, 10, 20, 30, 40) de droite au gauche. Influence commune aux non linéarités quadratiques et cubique (13)

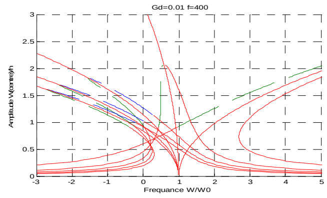

Fig2-b : Effet de Gp (Gp=0, 10, 20, 30, 40) de droite au gauche. Influence des non linéarités séparée (17)

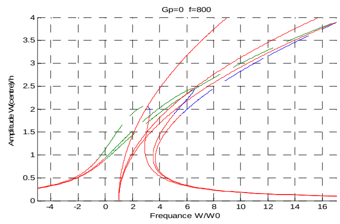

Fig2-c : Effet de Gd (Gd=0, 01 ,0.05 ,0.1) de droite au gauche. Equation (17)

Figure2 : Réponse fréquentielle au voisinage de la résonance principale $\omega \cong \omega_L$

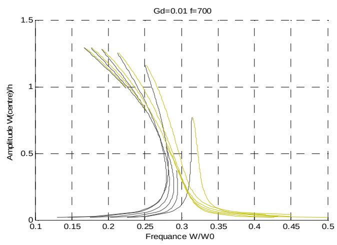

Fig3-a : Effet de Gp (Gp=30,40…80) de droite à gauche

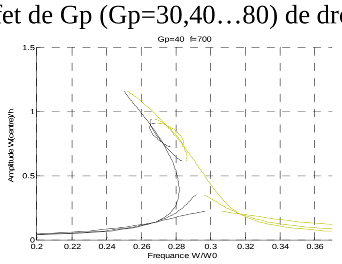

Fig3-b : Effet de Gd (Gd=0.01,0.5,0.1) du haut vers le bas

Figure3 : Réponse fréquentielle au voisinage de la résonnance sur harmonique $\omega \cong 1/3\ \omega_L$. Effet de Gp et Gd

Les résultants numériques sont obtenus dans le cas d'une poutre sandwich piézoélectrique/élastique/piézoélectrique simplement appuyé (figure1). Les équations (13,17,22,24) sont utilisées pour analyser le comportement vibratoire non linéaire de la poutre sandwich. Dans toutes les figures présentées, la fréquence est normalisée par rapport à la fréquence propre de la poutre étudiée. Les figures 2-a-b-c montrent l'effet des paramètres de contrôle Gp et Gd relativement à la résonance principale suivant les deux approximations présentées. Sur la figure (2-a), on présente les résultats obtenus par l'équation (13). Ces résultats sont similaires à ceux obtenus pas les balances harmoniques [1]. L'influence des termes quadratiques sur la transition hardening-softening est présentée sur la figure (2-b). Une amplification de l'effet de Gp, donnée par l'équation (17), est observée (figure (2-c)). La figure 3 présente l'effet des paramètres de contrôle au voisinage de la résonance sur harmonique $\omega \cong 1/3\ \omega_L$. On remarque que dans ce cas aussi les deux paramètres agissent sur l'amplitude maximale de la courbe de résonance mais la transition hardening-softening est indépendante du choix du paramètre Gd.

Conclusion

Le contrôle actif des vibrations non linaires d'une poutre sandwich piézo/élastique/piézo est étudié via deux paramètre de gains. La méthode des échelles multiple est utilisée comme schéma de perturbation. Les approximations du premier et deuxième ordre sont étudiées. Cette méthode permet d'avoir une prédiction de la solution en temps et des équations d'amplitude et de phase. Les modèles analytiques présentés, permettent d'agir activement pour amplifier ou atténuer l'effet non linéaire et le comportement résonant de la poutre sandwich au voisinage de la résonance principale et/ou secondaires. D'autres formulations mathématiques et résultats numériques ont été obtenus permettant d'optimiser les paramètres de contrôle rétroactif dans le but de mieux contrôler les vibrations non linéaires primaires et secondaires.

Références

[1] S. Belouettar, L. Azrar, E.M. Daya, V. Laptev and M. Potier-Ferry. Active control of nonlinear vibration of sandwich piezoelectric beams: A simplified approach. International Journal of Computers and Structures. In press, 2006.

[2] H. Nayfeh, "Nonlinear Oscillations" ,John Wiley et Sons, New York, 1979.

[3] M.S. Rechdaoui , L. Azrar , S. Belouettar , E.M. Daya et M. Potier-Ferry, "Active vibration control at large amplitudes of piezoelectric sandwich beams", en cours de rédaction.

Remerciements

Ce travail a été supporté par l'Action Intégrée Franco-marocaine N°: MA/05/117, PROTARS III D11/22 (2004) et par le projet européen CASSEM.