PROPAGATION DES ONDES ÉLASTIQUES DANS UN MATÉRIAU HETEROGENE ET POREUX

M. GUISSER*, M. HARNAFI, I. EL AMRANI EL HASSANI**, M.J.E. SEBBANI****

** Laboratoire de Mécanique, Département de Physique, Faculté des Sciences, B. P. 1014, Rabat. MAROC*

*** Laboratoire de Géo-Matériaux Institut Scientifique. Avenue Ibn Batouta, B.P. 703 10106 Rabat – Maroc*

INTRODUCTION

Les constantes élastiques $\left(C_{ijkl}\left(\vec{r}\right)\right)$ d'un matériau hétérogène (tel une roche) dépendent de la microstructure du réseau poreux ainsi que de la présence éventuelle de fluide(s). Cette hétérogénéité aura une conséquence directe sur la modélisation de la propagation des ondes élastiques. La théorie classique des ondes élastiques, basée sur la mécanique des milieux continus ne peut, en effet, pas être appliquée pour ces matériaux discontinus. Plusieurs théories (homogénéisation, tenseur de Green, …) [1,2,3] proposent des techniques alternatives pour la détermination des constantes élastiques d'un tel milieu.

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier la propagation des ondes élastiques dans ces matériaux en utilisant la technique du tenseur de Green.

DÉVELOPPEMENT THEORIQUE :

Le tenseur d'élasticité d'un milieu hétérogène peut être écrit sous la forme :

$$C_{ijkl}\left(\vec{r}\right) = C_{ijkl}^{\hom} + \delta C_{ijkl}\left(\vec{r}\right) \quad (1)$$

L'équation de la dynamique s'écrit :

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{d^2 U_i}{dt^2} \quad (2)$$

La solution du problème s'obtient par l'intermédiaire du tenseur de Green. L'équation de la dynamique exprimée en fonction de ce tenseur s'écrit :

$$\begin{aligned} & C_{ijkl,j} E_{kl} + \left(i k_\beta k_l k_j C_{ijkl} - k_j k_l C_{ijkl,j} \right) \\ & \left[\frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{V\,\Omega\,V_k} \tilde{G}_{ki} e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} \delta C_{mnpq}\left(\vec{r}'\right) \varepsilon^{e}_{pq}\left(\vec{r}'\right) dV d\omega dV_k \right] \\ & - \left(i\rho\omega^2 k_n \right) \left[\frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{V\,\Omega\,V_k} \tilde{G}_{im} e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} \delta C_{mnpq}\left(\vec{r}'\right) \varepsilon^{e}_{pq}\left(\vec{r}'\right) dV d\omega dV_k \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

La solution de l'équation de la dynamique, dans un milieu hétérogène, donne l'expression de la pulsation :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2\rho k_n}} \left[\frac{k_j k_l C_{ijkl,j}}{\sqrt{-k_\beta k_l k_j C_{ijkl} + \sqrt{k_\beta^2 k_l^2 k_j^2 C_{ijkl}^2 + k_j^2 k_l^2 C_{ijkl,j}^2}} + i\sqrt{-k_\beta k_l k_j C_{ijkl} + \sqrt{k_\beta^2 k_l^2 k_j^2 C_{ijkl}^2 + k_j^2 k_l^2 C_{ijkl,j}^2}}} \right] \quad (4)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2\rho k_n}} \left[\frac{i k_j k_l C_{ijkl,j}}{\sqrt{k_\beta k_l k_j C_{ijkl} + \sqrt{k_\beta^2 k_l^2 k_j^2 C_{ijkl}^2 + k_j^2 k_l^2 C_{ijkl,j}^2}} + \sqrt{k_\beta k_l k_j C_{ijkl} + \sqrt{k_\beta^2 k_l^2 k_j^2 C_{ijkl}^2 + k_j^2 k_l^2 C_{ijkl,j}^2}}} \right] \quad (5)$$

Cette pulsation ω est en fait un nombre complexe qui s'écrit sous la forme suivante : $\omega = X + iY$

La solution de l'équation d'onde peut quand à elle s'écrire :

$$U = U^0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} \quad (6)$$

Avec U l'amplitude, $\vec{k}$ vecteur d'onde, $\vec{r}$ vecteur position.

Donc : $U = U^0 e^{i\left(X + iY\right)t} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ (7)

Et par conséquent : $U = U^0 e^{-Y t} e^{i\left(X t - \vec{k}\vec{r}\right)}$ (8)

Le terme e^{-Yt} exprime l'***atténuation*** de l'onde.

SIMULATION NUMERIQUE :

Calculons le terme de l'atténuation selon une seule direction, pour les deux solutions :

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\rho k_1}} \sqrt{-k_1^3 C_{1111} + \sqrt{k_1^6 C_{1111}^2 + k_1^4 C_{1111,1}^2}} \quad (9)$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2\rho k_1}} \frac{k_1^2 C_{1111,1}}{\sqrt{k_1^3 C_{1111} + \sqrt{k_1^6 C_{1111}^2 + k_1^4 C_{1111,1}^2}}} \quad (10)$$

Dans un matériau poreux on peut supposer que le gradient des constantes élastiques est beaucoup plus grand que les constantes élastiques elles mêmes [4,5]. On peut donc négliger les constantes élastiques devant leurs gradients. Suite à ces approximations, on trouve une expression unique:

$$Y_1 = \sqrt{\frac{k_1 C_{1111,1}}{2\rho}} \text{ et } Y_2 = \sqrt{\frac{k_1 C_{1111,1}}{2\rho}} \quad (11)$$

DISCUSSION

Le terme d'atténuation, qui est relativement simple, dépend finalement du gradient du tenseur d'élasticité, de la densité, de la longueur d'onde et du temps. En d'autres termes il dépend du matériau et des conditions du test :

$$e^{-Yt} = e^{-\sqrt{\frac{k_1 C_{1111,1}}{2\rho}}t} \quad (12)$$

Nous pouvons examiner l'effet de chaque terme :

<u>Effet de la longueur de l'onde acoustique sur l'atténuation :</u>

On sait que la longueur d'onde dépend non seulement de la fréquence du mouvement mais aussi de la vitesse de déplacement, on peut résumer cette relation à l'aide de la formule suivante : $k = \frac{V}{f}$ (13)

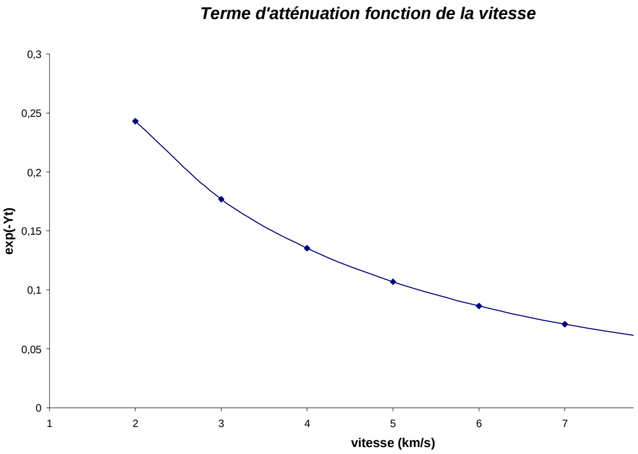
Avec : k longueur d'onde, V la vitesse de déplacement, f fréquence

La longueur d'onde et la fréquence sont donc inversement proportionnelles, c'est-à-dire que plus la longueur d'onde est petite, plus la fréquence est élevée.

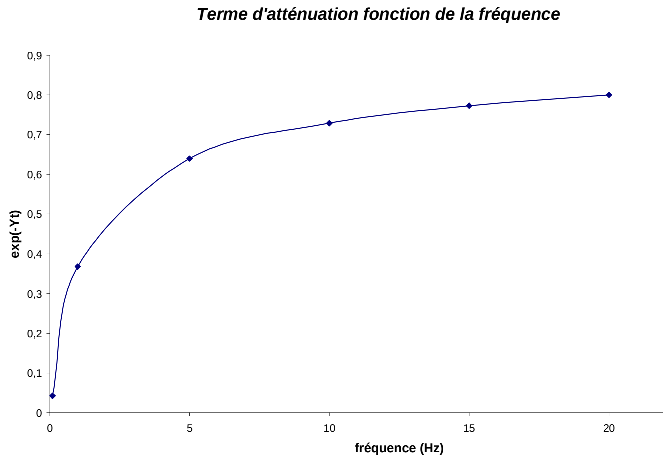
L'équation (12) peut s'écrire donc :

$$e^{-Yt} = e^{-\sqrt{\frac{V C_{1111,1}}{2\rho f}}t} \quad (14)$$

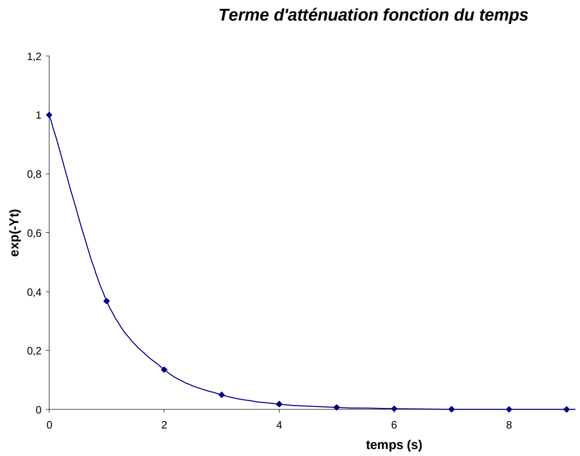
<u>Effet de la vitesse :</u>



<u>Influence de la fréquence de l'onde acoustique :</u>

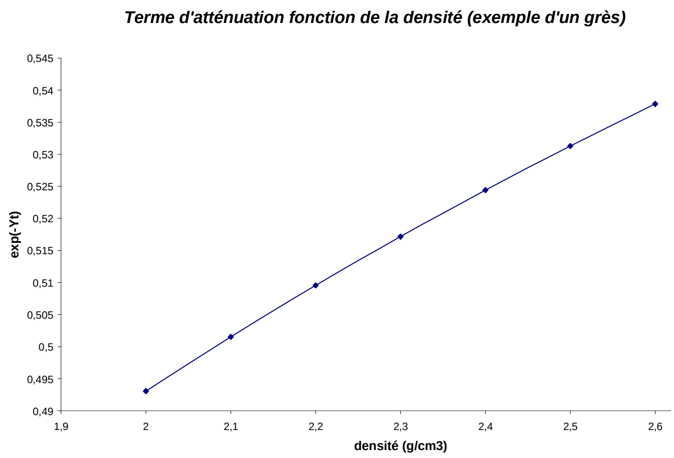


<u>Influence de la durée du test sur l'atténuation:</u>



On constate que le terme d'atténuation décroît rapidement avec le temps. Ceci s'explique par le fait que les ondes provoquées par une perturbation se déplacent vers des milieux voisins. Dû aux déviations et/ou réflexions des ondes lors de la rencontre d'inhomogénéités (précipités, inclusions, joints de grains,…). Ici, l'onde quitte le milieu, donc il y a plus d'atténuation.

<u>Influence de la nature du matériau :</u>



On constate que le terme d'atténuation croît quand la densité augmente.

On sait que la vitesse égale à : $V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Donc à module d'élasticité égale, la vitesse diminue quand la densité augmente ce qui prouve l'allure de la courbe ci-dessus, donc on a une forte atténuation pour les matériaux denses.

Rôle du gradient du tenseur d'élasticité :

Plusieurs cas de microstructure peuvent être abordés : la taille des grains, l'hétérogénéité et la porosité ; les deux premiers cas peuvent être considérés comme des cas particuliers des modèles décrivant la porosité.

Les expressions du module d'élasticité :

Il est admis depuis longtemps que le module de Young E peut être décrit empiriquement par la loi exponentielle suivante : $E = E_0 \exp(-a\ p)$

a : constante positive, l'indice 0 désigne la grandeur relative au matériau compact

On a démontré aussi que le tenseur d'élasticité macroscopique d'un matériau poreux pour un seul type de pores supposé de même orientation s'écrit comme suit [6, 7] :

$$C^{hom} = C^s : \left(I - P\left(I - S_E^i\right)^{-1} \right) \quad (15)$$

Avec : $\boldsymbol{P}$ porosité, C^s Tenseur d'élasticité du solide homogène, S_E^i : Tenseur d'ordre quatre appelé tenseur d'Eshlby qui dépend de la forme de pore, de son orientation et est proportionnel à la phase i tout en négligeant les interactions entre les pores.

Donc, On déduit que le terme d'atténuation est fonction des propriétés élastiques du matériau, de la porosité et par conséquent de la saturation du fluide en présence dans les pores dans le cas d'un matériau saturé par un ou plusieurs fluides.

CONCLUSION

On a présenté dans ce travail un certain nombre de résultats théoriques traitant la propagation des ondes dans les matériaux hétérogènes, en utilisant la technique du tenseur de Green. Ainsi nous avons d'abord déterminé les constantes élastiques. Ensuite de modéliser la propagation des ondes élastiques dans un milieu hétérogène et poreux. Enfin, la simulation numérique nous a permis de déduire que l'atténuation des ondes, conformément à la bibliographie [8,9], est fortement affecté par l'hétérogénéité, la densité, la fréquence et la porosité.

RÉFÉRENCES

[1] El Bekkaye MERRIMI (2005) « Étude de l'effet de la porosité sur le comportement thermomécanique des matériaux granulaires » Mémoire de DESA, Université Mohammed V, Rabat.

[2] Le Ravalec (1995) « Vitesse et perméabilité des roches : modélisation du rôle du fluide et des fissures » Thèse de Doctorat Université de Rennes 1995.

[3] Yue XU (2004) « Approche multi-échelle pour l'étude du comportement des systèmes polyphasiques – Application aux milieux poreux non saturés » D. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

[4] Olivier COUSSY (1991) « Mécanique des milieux poreux » Editions Technip

[5] Bourbié T., Coussy O. et Zinszner B. (1986) , Acoustique des milieux poreux, Editions Technip.

[6] SEBBANI M.J.E. (2001) « Etude théorique et expérimentalement de la corrélation entre la résistance aux chocs thermiques et aux chocs mécaniques des matériaux réfractaires utilisés dans les fours de traitement de l'aluminium » Ph. D. Ecole Polytechnique de Montréal.

[7] Y. Guéguen, V. Palciauskas « Introduction à la physique des roches » HERMANN EDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

[8] « Eléments de propagation des ondes » Ecole Nationale Supérieure des Pétroles et des Moteurs (12-13 novembre 2002) Gilles LAMBARE, Centre de Recherche en géophysique, Ecole des Mines de Paris

[9] C. Gazanhes et J.-P. Hérault (1993) « Dispersion acoustique dans des roches poreuses » Equipe ultrasons, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique du C.N.R.S., France. J. Phy. III France 3 (1993) 2071-2086