

# EFFET D'UNE EXCITATION À HAUTE FREQUENCE SUR DES VIBRATIONS PERIODIQUES AUTO EXCITEES

**RACHID BOURKHA, MOHAMED BELHAQ**

Faculté des Sciences Aïn Chock, UFR de mécanique, BP 5366 Maârif, Casablanca, Maroc  
Bourkha\_rachid@yahoo.fr; mbelhaq@yahoo.fr

## Résume:

L'objet de ce travail est l'étude de l'effet d'une excitation paramétrique rapide sur un mouvement auto-excité (cycle limite) dans l'oscillateur de van der Pol. Dans une première étape on utilise la méthode de partition directe du mouvement pour obtenir l'équation qui régit la dynamique lente de l'oscillateur. Par la suite, on utilise une méthode de perturbation sur l'équation de la dynamique lente pour obtenir une approximation analytique de la solution périodique et de sa fréquence. Ceci permet d'obtenir une relation entre la fréquence du cycle limite et la fréquence de l'excitation rapide. On montre que dans le cas de l'excitation horizontale, le mouvement auto-excité peut disparaître. Par contre, dans le cas d'une excitation verticale le cycle limite persiste. Dans le cas où l'excitation est inclinée on obtient le seuil de disparition du cycle limite en fonction de l'angle de l'inclinaison. Les simulations numériques sur l'équation originale confirment la prédiction analytique.

## Introduction

Dans ce travail on étudie l'effet de l'excitation à haute fréquence sur une solution auto-excitée (cycle limite) dans un pendule de van der Pol. On distingue trois cas. Dans le premier cas on considère que le pendule est excité horizontalement. Dans le second cas on considère une excitation verticale et dans le dernière on considère une excitation inclinée. Notre objectif est de savoir comment l'excitation à haute fréquence affecte le cycle limite et sa fréquence. Pour ce faire on utilise la technique de la partition directe du mouvement [1]. Cette technique est basée sur la séparation de la dynamique rapide et de la dynamique lente. Plusieurs travaux ont appliqués cette méthode pour étudier la dynamique lente de certains systèmes mécaniques [2-4].

L'étude de la dynamique lente permet la construction analytique d'une approximation de la fréquence du cycle limite par l'utilisation d'une méthode de perturbation [5]. Cette approximation analytique de la fréquence offre une simple expression liant la fréquence du cycle limite et la fréquence de l'excitation. Par conséquent, l'effet de l'excitation à haute fréquence sur le mouvement périodique peut être analysé. Les résultats analytiques seront comparés avec les résultats numériques.

## Dynamique lente

Dans le cas où le point de suspension du pendule auto-excité est soumis à une excitation horizontale, l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme adimensionnelle suivante

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (-\alpha + \beta x^2) \frac{dx}{dt} + \sin x = a\Omega^2 \cos x \cos \Omega t \quad (1)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont supposés petits,  $a$  l'amplitude de l'excitation et  $\Omega$  la fréquence de l'excitation. On analyse les petites vibrations autour de  $x=0$ . Dans ce cas, on peut écrire :  $\sin x = x - \delta x^3$  et  $\cos x = 1 - \gamma x^2$  où les coefficients  $\delta = 1/6$  et  $\gamma = 1/2$ . La méthode du partition direct du mouvement transforme (1) en une équation de la forme

$$D_1^2 z + (-\alpha + \beta z^2) D_1 z + (1 - (a\Omega)^2 \gamma) z + ((a\Omega\gamma)^2 - \delta) z^3 = 0 \quad (2)$$

L'équation autonome (2) régit la dynamique lente du mouvement. Cette équation contient la fréquence d'excitation et le terme de van der Pol qui produit le cycle limite et par conséquent, l'effet de la fréquence  $\Omega$  sur le cycle limite peut être examiné par des prédictions analytiques.

## Perturbation

Pour construire une approximation analytique de la fréquence du cycle limite, on utilise la méthode de Lindstedt [6] qui permet d'approximer la fréquence du cycle limite

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \left( \frac{-3(\delta - (\gamma a \Omega)^2 A^2)}{8\omega_0} \right) \quad (3)$$

avec  $A = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

L'équation (3) donne la relation qui lie la fréquence du cycle limite  $\omega$  et la fréquence de l'excitation  $\Omega$ . Quand on augmente  $\Omega$  la fréquence  $\omega$  démunie pour d'annuler, ce qui implique la disparition du cycle limite. Pour des paramètres fixes  $a=0.02$ ,  $\alpha=0.1$  et  $\beta=0.5$ , le tableau ci-dessous donne une comparaison entre la valeur analytique critique  $\Omega_a$ , correspondant à la disparition du cycle limite, et la valeur numérique  $\Omega_n$  de la dynamique lente, eq(2). Les illustrations numériques dans la Figure (1) montre la disparition du cycle limite pour une certaine valeur critique de  $\Omega$ . Ici pour  $\varepsilon=0.8$ ,  $\Omega_n=72.81$ . Dans la figure (2) on montre l'évolution temporel de  $x$  pour le système original (1). Le même effet de disparition de l'oscillation périodique est observé. On note que la disparition de cette orbite périodique stable résulte à partir de sa collision avec une orbite périodique instable via la bifurcation classique nœud-col

$\varepsilon$	0.1	0.6	0.7	0.8
$\Omega_a$	70.71	71.17	71.58	72.23
$\Omega_n$	70.60	71.59	72.21	72.81

Table1 : Comparaison entre l'approximation analytique  $\Omega_a$  et l'intégration numérique  $\Omega_n$ .

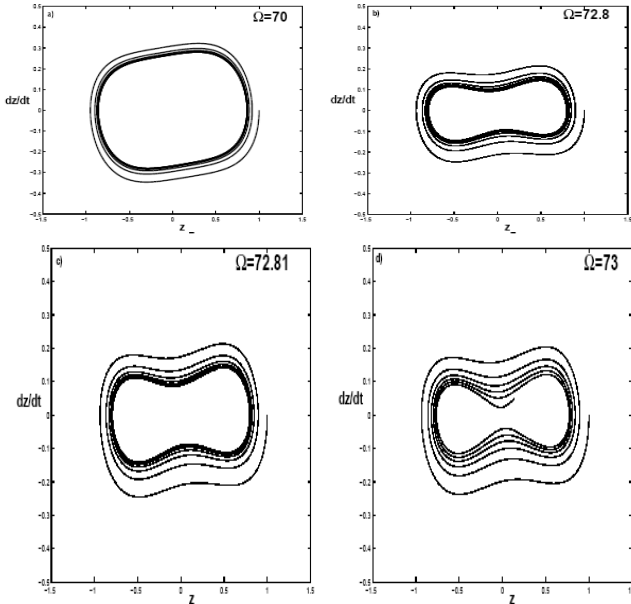


Figure1: Plans de phase de l'équation (2) ; a)  $\Omega=70$  et b)  $\Omega=72.8$  : cycle limite existe; c)  $\Omega=72.81$  et d)  $\Omega=73$  : pas de cycle limite.

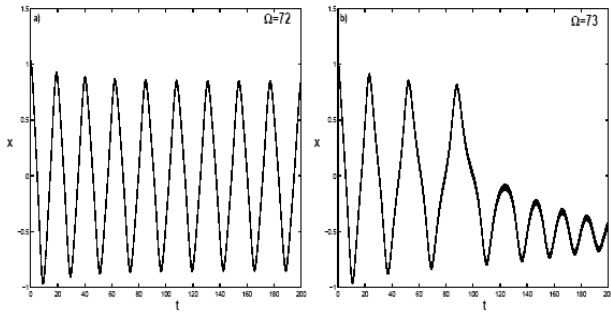


Figure2: Intégration numérique de système original (1) pour  $a=0.02$   $\alpha=0.1$  et  $\beta=0.5$ .

### Excitation paramétrique verticale

Dans le cas où le point de suspension est soumis à une excitation verticale, l'équation du mouvement s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (-\alpha + \beta x^2) \frac{dx}{dt} + \sin x = a\Omega^2 \sin x \cos \Omega t \quad (4)$$

Une analyse similaire au cas précédent donne l'équation de la dynamique lente et la fréquence

$$D_1^2 z + (-\alpha + \beta z^2) D_1 z + \left( 1 + \frac{(a\Omega)^2}{2} (1 - 3\delta z^2) \right) (z - \delta z^3) = 0$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \left( \frac{-3(\delta + 2\delta(a\Omega)^2 A^2)}{8\omega_0} \right) \quad (6)$$

L'équation (6) donne la relation entre la fréquence du cycle limite  $\omega$  et celle de l'excitation  $\Omega$ . Cette relation montre que si on augmente  $\Omega$ , la fréquence  $\omega$  augmente et dans ce cas le cycle limite persiste. Les simulations numériques (figure3) confirment la prédiction analytique

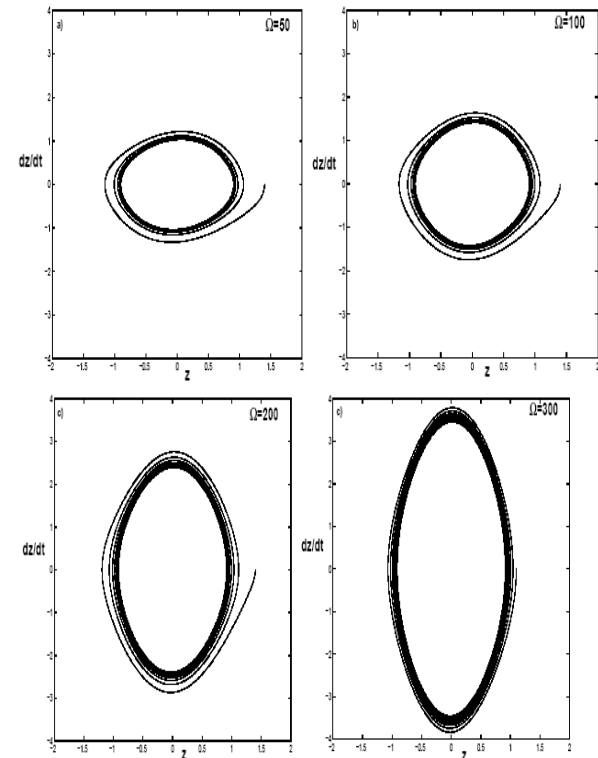


Figure3 : Intégration numérique de l'équation (4).

### Excitation paramétrique inclinée

Dans ce cas on considère que le support d'excitation forme un angle  $\theta$  avec la ligne horizontale. Ce cas incliné généralise les cas précédents. Dans ce cas, l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (-\alpha + \beta x^2) \frac{dx}{dt} + \sin x = a\Omega^2 \cos(\theta - x) \cos \Omega t \quad (7)$$

On procède de la même manière que dans les deux cas précédents. On obtient l'équation de la dynamique lente et la fréquence

$$D_1^2 z + (-\alpha + \beta z^2) D_1 z + \frac{(a\Omega)^2}{4} \sin(2\theta - 2z) = 0 \quad (8)$$

$$\omega = \left( \left( 1 + \frac{(a\Omega)^2}{2} \right) (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^2 \left( \frac{-5(a\Omega)^4 A^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left( \frac{\gamma^2 + \gamma}{12} + \frac{1}{18} \right)}{\omega_0^3} + \frac{3(Aa\Omega)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\gamma + \delta) \left( \frac{\gamma^2 + \gamma}{12} + \frac{1}{18} \right)}{16\omega_0} + \frac{3A^2\delta}{8\omega_0} \right)$$

(9)

Dans la figure (4) on trace  $\Omega$  en fonction de  $\theta$  pour  $\omega=0$  et  $\varepsilon=1$ . Cette figure montre l'existence de deux zones. La zone I correspond à l'existence du cycle limite et la zone II correspond à l'élimination du cycle limite. A partir d'une certaine valeur de  $\theta$ , on voit que  $\Omega$  tend vers  $\infty$ , ce qui correspond à la persistance du cycle limite à partir d'une certaine valeur critique de l'inclinaison.

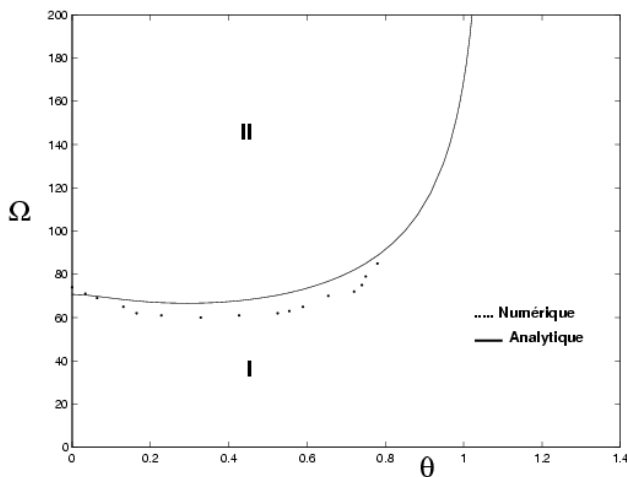


figure 4. Courbe séparant les domaines d'existence et de disparition du cycle limite.

## Conclusion

Ce travail présente une analyse théorique de l'effet d'une excitation rapide horizontale, verticale et inclinée sur le cycle limite dans un pendule de van der Pol. On a utilisé une méthode de perturbation sur la dynamique lente du mouvement pour obtenir une expression entre la fréquence de l'oscillation et la fréquence de l'excitation. Cette expression entre les deux fréquences est utilisée pour prédire l'effet de l'excitation paramétrique à haute fréquence sur les oscillations auto-excitées du système. On a montré que l'excitation horizontale à haute fréquence peut éliminer l'oscillation périodique. Par contre, l'excitation verticale ne fait pas disparaître le cycle limite. Dans le cas incliné on montre l'effet de l'inclinaison  $\theta$  sur l'élimination des vibrations auto-excitées qui sont souvent indésirable dans les système mécaniques. Les simulations numériques confirment les prédictions analytiques.

## Bibliographie

- [1] Blekhman I. I. Vibrational Mechanics – Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Application, World Scientific, Singapore, 2000.
- [2] Jensen J. S. Fluid transport due to nonlinear fluid structure interaction, Journal of Fluid and Structure 1997;11:327-344.
- [3] Tcherniak D. and Thomsen J. J. Slow effects of fast harmonic excitation for elastic structures, Nonlinear Dynamics 1998;17: 227-246.
- [4] Thomsen J. J. Using fast vibrations to quenching friction-induced oscillations, Journal of Sound and Vibration 1999;228(5): 1079-1102.
- [5] Nayfeh A. Perturbation Methods, Wiley, New York, 1973.
- [6] Richard H. R. Lecture Notes on Nonlinear Vibrations, the Internet-first University Press, <http://www.tam.cornell.edu/randdocs/>.