

## 1. Introduction

Dans ce travail, on présente une nouvelle variante de la méthode des éléments finis pour la résolution numérique des équations différentielles ordinaires. Dans un élément fini donné, l'équation différentielle ordinaire est résolue par une technique de perturbation où l'inconnue dépend des valeurs aux nœuds via une interpolation polynomiale d'ordre élevé [1], [2]. Les polynômes d'interpolation sont construits à partir d'une technique de perturbation. Des exemples sont analysés pour illustrer la performance de cette nouvelle variante.

## 2. Présentation de la technique proposée

### 2.1 Résolution élémentaire par perturbation

Pour illustrer cette technique, on se place dans le cas 1D. Il s'agit de résoudre l'équation différentielle suivante dans le domaine  $[-L, L]$  :

$$-u''(x) + f(x)u(x) = g(x) ; u(\pm L) = 0 \quad (1)$$

où  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des fonctions données et  $u''(x)$  est la dérivée seconde de  $u(x)$  par rapport à la variable  $x$ . Le domaine  $\Omega \equiv [-L, +L]$  est découpé en  $N-1$  éléments 1D à deux nœuds (voir figure 1) ;  $N$  étant le nombre de nœuds ( $N \geq 3$ ).

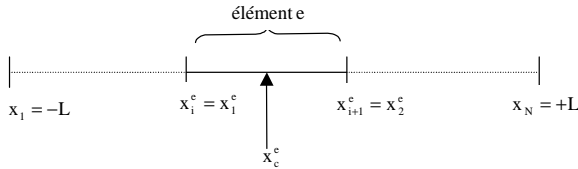


Figure 1 : Maillage 1D

où  $x_c^e$  est la coordonnée du centre de l'élément  $e$ . L'idée de ce travail est de chercher la solution du problème (1), dans l'élément  $e$ , sous la forme d'un développement en série entière au voisinage de  $x_c^e$  :

$$u^e(x) = \sum_{p=0}^P u_p^e (x - x_c^e)^p \quad (2)$$

où  $P$  est l'ordre de la série. La méthode demande qu'on connaisse le développement de Taylor de  $f(x)$  et  $g(x)$  jusqu'à l'ordre  $P$  dans l'élément  $e$  :

$$\begin{aligned} f^e(x) &= \sum_{p=0}^P f_p^e (x - x_c^e)^p \\ g^e(x) &= \sum_{p=0}^P g_p^e (x - x_c^e)^p \end{aligned} \quad (3)$$

En injectant ces développements dans l'équation (1) et en identifiant terme à terme suivant la puissance de  $(x - x_c^e)$ , on obtient tous les coefficients du polynôme (2) en fonction des deux premiers termes  $u_0^e$  et  $u_1^e$  :

$$u_p^e = \gamma_p + \alpha_p u_0^e + \beta_p u_1^e \quad ; \quad 2 \leq p \leq P \quad (4)$$

Les coefficients sont obtenus par des formules de récurrence:

$$\begin{cases} \gamma_p = \frac{1}{p(p-1)} \left\{ -g_{p-2} + \sum_{r=0}^{p-2} f_{p-2-r} \gamma_r \right\} \\ \alpha_p = \frac{1}{p(p-1)} \left\{ \sum_{r=0}^{p-2} f_{p-2-r} \alpha_r \right\} \\ \beta_p = \frac{1}{p(p-1)} \left\{ \sum_{r=0}^{p-2} f_{p-2-r} \beta_r \right\} \end{cases} \quad ; \quad 2 \leq p \leq P \quad (5)$$

Les coefficients  $\gamma_n$ ,  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  ne sont fonction que des données  $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $f^e(x)$  et  $g^e(x)$  sur l'élément considéré. L'écriture de l'équation (4) sous forme matricielle est donnée par :

$$\{U^e\} = \{\gamma\} + \{\alpha\}u_0^e + \{\beta\}u_1^e \quad (6)$$

où les vecteurs  $\{U^e\}$ ,  $\{\gamma\}$ ,  $\{\alpha\}$  et  $\{\beta\}$  sont donnés par :

$$\begin{cases} {}^t\{U^e\} = \{u_0, u_1, \dots, u_p, \dots, u_p\} \\ {}^t\{\gamma\} = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p, \dots, \gamma_p\} \\ {}^t\{\alpha\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots, \alpha_p\} \\ {}^t\{\beta\} = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, \dots, \beta_p\} \end{cases} \quad (7)$$

La résolution de l'équation différentielle (1) sur l'élément  $e$  par la technique de perturbation revient donc à exprimer l'inconnue  $u^e(x)$  en fonction des données  $f^e(x)$  et  $g^e(x)$  et des deux premiers termes  $u_0^e$  et  $u_1^e$ . On peut résumer cette formulation sous l'expression vectorielle suivante :

$$u^e(x) = {}^t\{P(x)\} \left\{ \{\gamma\} + [\alpha, \beta] \begin{Bmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{Bmatrix} \right\} \quad (8)$$

où le vecteur  $\{P(x)\}$  regroupe les polynômes de base  $(x - x_c^e)^p$  donné par:

$$\{P(x)\} = \{1, x - x_1^e, \dots, (x - x_1^e)^p, \dots, (x - x_2^e)^p\}$$

## 2.2 Formules d'interpolation nodale

Notons que la formule (8) utilise une approximation polynomiale dont l'ordre est arbitrairement élevé. Néanmoins, grâce à la résolution de l'équation sur l'élément, le nombre d'inconnues a été réduit à deux par élément comme dans un élément fini à interpolation linéaire. On passe, maintenant, à l'écriture de la solution approchée (8) sous la forme d'une interpolation nodale. Pour cela, on définit les deux variables nodales  $q_1^e = u^e(x_1^e)$  et  $q_2^e = u^e(x_2^e)$  à partir de l'équation (8) :

$$\begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{Bmatrix} = \{P_\gamma\} + [P_{\alpha\beta}] \begin{Bmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{Bmatrix} \quad (9)$$

où le vecteur  $\{P_\gamma\}$  et la matrice  $[P_{\alpha\beta}]$  sont donnés par :

$$\begin{cases} \{P_\gamma\} = \begin{Bmatrix} \{P(x_1^e)\}\{\gamma\} \\ \{P(x_2^e)\}\{\gamma\} \end{Bmatrix} \\ [P_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \{P(x_1^e)\}\{\alpha\} & \{P(x_1^e)\}\{\beta\} \\ \{P(x_2^e)\}\{\alpha\} & \{P(x_2^e)\}\{\beta\} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

On en déduit les deux coefficients du polynôme  $u_0^e$  et  $u_1^e$  en fonction des variables nodales :

$$\begin{Bmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{Bmatrix} = [P_{\alpha\beta}]^{-1} \left( \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{Bmatrix} - \{P_\gamma\} \right) \quad (11)$$

L'inconnue élémentaire  $u^e(x)$  est alors fonction des deux variables nodales  $q_1^e$  et  $q_2^e$ , via une formule qui fait apparaître trois fonctions de forme  $N_0^e(x)$ ,  $N_1^e(x)$  et  $N_2^e(x)$  :

$$u^e(x) = N_0^e(x) + N_1^e(x)q_1^e + N_2^e(x)q_2^e \quad (12)$$

où les fonctions de formes  $N_0^e(x)$ ,  $N_1^e(x)$  et  $N_2^e(x)$  sont données par :

$$\begin{cases} N_0^e(x) = \{P(x)\}\{\gamma\} - [\alpha, \beta][P_{\alpha\beta}]^{-1}\{P_\gamma\} \\ \begin{Bmatrix} N_1^e(x) \\ N_2^e(x) \end{Bmatrix} = \{P(x)\}[\alpha, \beta][P_{\alpha\beta}]^{-1} \end{cases} \quad (13)$$

La formule (12) résume l'interpolation de l'inconnue  $u^e(x)$  sur l'élément  $e$ . Par rapport à l'élément fini linéaire, elle fait apparaître trois fonctions de forme au lieu de deux. La nouvelle fonction  $N_0^e(x)$  provient du

second membre  $g^e(x)$  : c'est la solution approchée de l'équation différentielle sur l'élément avec des données nulles aux bords  $[u^e(x_1^e) = u^e(x_2^e) = 0]$ . C'est un polynôme de degré  $P$ , de même que les deux autres fonctions  $N_1^e(x)$  et  $N_2^e(x)$ , qui correspondent à la solution approchée de l'équation homogène ( $g^e(x) = 0$ ) avec des valeurs données aux bords de l'élément :

$$N_1^e(x_1^e) = 1, N_1^e(x_2^e) = 0, N_2^e(x_1^e) = 0 \text{ et } N_2^e(x_2^e) = 1$$

## 2.3 Problème global

L'équation différentielle a été résolue par morceaux grâce à la technique de perturbation. C'est une résolution approchée, mais dont la précision peut être augmentée très rapidement en faisant varier l'ordre de troncature  $P$ . Pour obtenir une solution complète du problème (1), il reste à écrire les conditions aux limites, la continuité de  $u(x)$  et de sa dérivée  $u'(x)$  à l'interface entre les éléments. L'utilisation de l'interpolation nodale (12) permet de prendre en compte simplement les conditions de type Dirichlet  $u(x \pm L) = 0$  et la continuité de  $u'(x)$  aux nœuds. Si on choisit de ne pas revenir sur la précision de la solution de l'équation différentielle, la seule condition à satisfaire est la continuité de la dérivée aux nœuds.

## 3 Extension aux problèmes non linéaires

Dans cette section, on couple la technique proposée avec la méthode de Newton pour la résolution des problèmes non linéaires. Nous illustrons cette façon de faire sur un problème régi par l'équation différentielle suivante :

$$-u''(x) + h(u(x)) = s(x); -L < x < +L; u(\pm L) = 0 \quad (14)$$

où  $h(u(x))$  est une fonction non linéaire de  $u(x)$  et  $s(x)$  est une fonction quelconque de  $x$ . Le principe de la méthode de Newton consiste à chercher un incrément  $\Delta u(x)$  vérifiant le problème (14), linéarisé au voisinage d'une solution approchée  $u_i(x)$ , suivant :

$$-[\Delta u]''(x) + h_{,u}(u_i)\Delta u(x) + R^i(u_i(x)) = 0 \quad (15)$$

où  $h_{,u}$  est la dérivée de la fonction  $h(u)$  par rapport à  $u$  et  $R^i(u_i(x))$  est le résidu défini par :

$$R^i(u_i(x)) = -u_i''(x) + h(u_i) - s(x) \quad (16)$$

Le problème linéaire (15) a la même forme que le problème linéaire (1) où  $f(x)$  et  $g(x)$ , dans ce cas, sont données par:  $f(x) = h_{,u}(u_i)$  et  $g(x) = -R^i(u_i(x))$ . La solution du problème (15) est obtenue, en appliquant la

technique perturbation proposée pour la résolution du problème (1), quand l'incrément  $\Delta u(x)$  tend vers zéro.

#### 4 Application

Dans cette section, nous présentons les résultats, obtenus par l'approche proposée, dans les cas linéaire et non linéaire. Le premier cas étudié correspond à l'exemple du problème linéaire. Dans le tableau 1, on présente une comparaison entre le résultat obtenu par l'approche proposée et celui de l'élément fini classique. Cette comparaison est faite au point  $x=0$ , pour  $L=12$ . Ce tableau montre que, pour une erreur donnée, l'élément fini classique nécessite plus de degrés de liberté que la technique proposée : par exemple, pour une erreur inférieure à  $10^{-2}$ , l'élément fini classique nécessite 47 degrés de liberté (élément linéaire) 23 degrés de liberté (élément quadratique) quant à la technique proposée ne nécessite que quatre degrés de liberté pour un ordre égal à 10 et six degrés de liberté pour un ordre égal 2.

Erreur	$\leq 10^{-2}$	$\leq 10^{-4}$	$\leq 10^{-6}$
Élément linéaire	Nddl=47	Nddl=383	
Élément quadratique	Nddl=23	Nddl=71	Nddl=167
EFP 3 éléments	ordre=10	ordre =20	ordre =40
EFP 5 éléments	ordre=2	ordre =10	ordre =20
EFP 12 éléments	ordre=2	ordre =6	ordre =10

Tableau 1 : Comparaison entre l'élément fini classique et l'élément finis perturbé,  $L = 12$

Dans le cas non linéaire, on considère le cas  $h(u) = u^3$  et  $s(x) = \lambda$ . Sur la figure 1, on représente logarithme décimal du résidu à gauche du point  $x=0$  en fonction de l'ordre de troncature, pour  $\lambda = 0.1, 1, 3$ . D'après cette figure, on remarque que la précision augmente avec l'ordre. Quand le paramètre  $\lambda$  augmente la technique proposée demande un ordre un peu élevé. D'après ces résultats, on constate que la liberté de changer l'ordre de troncature des fonctions d'interpolation a diminué considérablement la taille du système à résoudre.

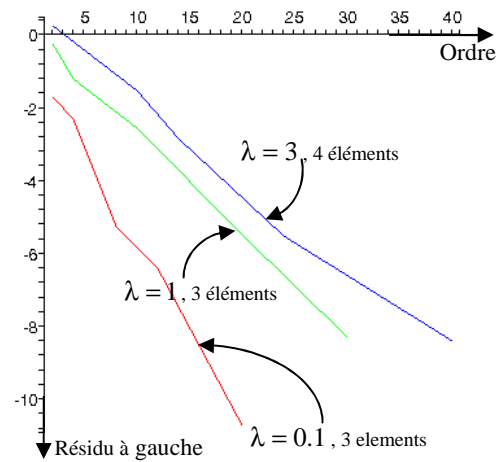


Figure 1: Convergence de la technique proposée avec l'ordre de perturbation pour différentes valeurs de  $\lambda$

#### 5. Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle approximation nodale basée sur une technique de perturbation. Cette nouvelle façon diffère de la méthode des éléments finis classique au niveau des fonctions d'interpolation, ces dernières sont construites à partir d'une technique de perturbation sous forme de polynômes de degrés élevé. Cette liberté de changer le degrés de ces fonctions d'interpolation nous a empêché de raffiner le maillage et d'éviter la résolution des problèmes de grande taille. Nous avons montré, sur deux exemples (linéaire et non linéaire) que cette technique s'avère une méthode efficace par comparaison à la méthode des éléments finis classique. D'après ces résultats, nous avons remarqué que cette nouvelle approximation nodale a réduit le nombre de degrés de liberté pour converger.

#### 6. Références

- [1] "Finite elements built up by perturbation technique" B. Braikat, H. Lahmam, M. Potier-Ferry, N Damil en cours de rédaction.
- [2] « Méthode des éléments finis perturbés pour le calcul des structures » B. Dehbi, H. Lahmam, B. Braikat, N Damil, M. Potier-Ferry Rencontre Nationale des Jeunes Chercheurs en Physique, 19-20 Décembre, 2006.