

ONDES A COURTES CRÊTES SINGULIERES

M. DEBIANE*, C. KHARIF*** N. ALLALOU*, M. AMAUCHE**

*U.S.T.H.B. Faculté de Physique B.P. 32 El Alia Alger

** Université A. Mira route de Targa Ouzemour Bejaia

*** IRPHE 49 rue F. Joliot-Curie, B.P. 146, F 13384 Marseille Cedex 13, France

Introduction

Les résonances posent le problème de l'unicité des solutions d'un champ de vagues et par conséquent celui de leur recherche. Plus généralement elles donnent lieu à des difficultés pour les applications que l'on peut faire de la mesure des vagues afin de mieux quantifier les interactions océan/atmosphère. Si depuis un siècle, les vagues de résonance bidimensionnelles ont été étudiées de manière intensive suite à la découverte des plus connues d'entre-elles, les rides de Wilton (Wilton ripples), le cas tridimensionnel n'en est qu'à la considération du problème de l'existence des solutions. La forme la plus considérée de ces vagues est celle des ondes à courtes crêtes. Ce sont des ondes périodiques suivant deux directions distinctes du plan horizontal et ayant une géométrie orthorhombique. Les preuves de l'existence de leurs formes résonantes n'ont été produites qu'en 2001 pour les ondes de gravité-capillarité [1] et très récemment pour le cas où elles ne sont soumises qu'à la seule gravité [2]. La méthode que nous proposons pour le calcul de ces formes critiques est basée sur celle du Lagrangien moyen de Whitham [3]. Cette approche utilise une formulation variationnelle qui réduit le problème à un système d'équations algébriques non-linéaires qui peut être résolu par la méthode de Newton. Les propriétés de la matrice jacobienne associée à cette dernière et la symétrie des vagues à courtes crêtes permettent de réduire considérablement l'espace mémoire utilisé et le temps de calcul. Cette technique nous a permis de généraliser les rides de Wilton au cas tridimensionnel, et surtout de calculer les ondes à courtes crêtes de gravité pour des configurations pleinement résonantes inaccessibles aux méthodes antérieures en raison de la présence de petits diviseurs. En outre, elle s'adapte très bien aux moyens classiques d'étude de la stabilité des vagues et de leurs bifurcations.

Position du problème

Nous considérons la réflexion oblique sur un mur vertical (figure 1) d'un train d'ondes uniforme de gravité-capillarité en profondeur infinie. L'écoulement est supposé irrotationnel et le fluide parfait, incompressible et homogène. On admet que la réflexion est totale, ce qui implique l'égalité des amplitudes et celle des fréquences des ondes incidentes et réfléchies. Le champ de vagues généré par l'interaction de ces deux dernières est celui des ondes à courtes crêtes qui se propage uniformément dans la direction du mur. Pour les étudier nous avons choisi le repère orthonormé $\mathfrak{R}(O, X, Z)$ que nous allons décrire. Les axes (OX) et (OY) sont horizontaux et orientés comme indiqué par la figure 1 et (OZ) est vertical ascendant. L'origine est placée telle que le niveau moyen de l'interface

soit contenu dans le plan horizontal (XOY). Ces ondes ont une forme doublement périodique suivant les deux directions du (OX) et (OY) avec des longueurs d'ondes $\ell_x = \ell / \sin \theta$ et $\ell_y = \ell / \cos \theta$ le long de ces deux axes. Ici ℓ représente la longueur d'onde du train de vagues incident et θ l'angle entre la direction de propagation de ce dernier et la normale au mur.

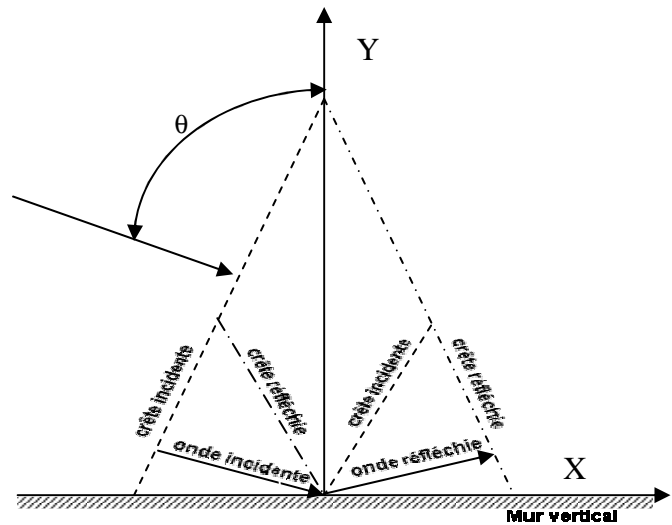


Figure 1 : réflexion oblique sur un mur vertical

Pour rendre adimensionnelles les équations, on définit comme dans les chapitres précédents une longueur de référence $k^{-1} = \ell / 2\pi$, et un temps de référence $(gk)^{-1/2}$.

Pour étudier les ondes de formes permanentes on impose au repère \mathfrak{R} de se déplacer dans la direction de propagation OX, avec une célérité égale à la vitesse de phase c de l'onde. La méthode utilisée pour les déterminer faisant intervenir des intégrales de fonctions harmoniques, il est intéressant d'avoir une période 2π dans chacune des directions (OX) et (OY). Ceci nous suggère de définir les variables X, Y et Z comme suit:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} px - \omega t \\ qy \\ z \end{pmatrix}$$

ω est la fréquence, $\mathfrak{R}'(o, x, y, z)$ un référentiel fixe dont les axes ont les mêmes directions que leurs homologues dans \mathfrak{R} . p et q représentent les nombres d'ondes adimensionnels suivant les directions (OX) et (OY) et sont définis par :

$$p = \sin \theta \quad \text{et} \quad q = \cos \theta$$

Dans le repère \mathfrak{R} les vagues à courtes crêtes ont un potentiel des vitesses, Φ , et une élévation de la surface libre, η , qui vérifient l'équation de Laplace :

$$p^2 \Phi_{XX} + q^2 \Phi_{YY} + \Phi_{ZZ} = 0 \quad \text{pour} \quad Z \leq \eta(X, Y)$$

associée à deux conditions sur la surface libre définie par $Z = \eta(X, Y)$:

$$-c\eta_X - p^2 \eta_X \Phi_X - q^2 \eta_Y \Phi_Y + \Phi_Z = 0$$

$$-c\Phi_X + \eta + \frac{1}{2}(p^2 \Phi_X^2 + q^2 \Phi_Y^2 + \Phi_Z^2) - \kappa \xi(X, Y) = 0$$

et à la condition « au fond » :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi_z = 0$$

Dans ces équations $\kappa = \frac{\tau k^2}{\rho g}$ et

$$\xi(X, Y) = \frac{p^2 \eta_{XX} (1 + q^2 \eta_Y^2) + q^2 \eta_{YY} (1 + p^2 \eta_X^2) - 2p^2 q^2 \eta_{XY} \eta_X \eta_Y}{(1 + p^2 \eta_X^2 + q^2 \eta_Y^2)}$$

Méthode de résolution

Le problème ci-dessus admet des solutions de la forme :

$$(1) \quad \Phi(X, Y, Z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} e^{\alpha_{mn} Z} \chi^{mn}(X, Y)$$

$$(2) \quad \eta(X, Y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0} \Delta_{n0} a_{mn} \cos mX \cos nY$$

avec :

$$\chi^{mn}(X, Y) = \sin mX \cos nY ; \Delta_{j0} = 1 - \frac{1}{2} \delta_{j0}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. De l'équation de Laplace, il découle :

$$\alpha_{mn}^2 = p^2 m^2 + q^2 n^2$$

Le niveau moyen de la surface étant pris égal à zéro :

$$\bar{\eta}(X, Y) = a_{00} = 0$$

La barre signifie qu'il s'agit d'une moyenne calculée sur le carré de côtés $\ell_x = 2\pi$ et $\ell_y = 2\pi$. La conséquence de la symétrie triangulaire des ondes étudiées est que :

$$a_{mn} = b_{mn} = 0$$

lorsque m et n n'ont pas la même parité.

Il est fréquent que, pour un problème physique modélisé au moyen d'équations différentielles, il soit avantageux d'introduire une transformation pour lui donner une formulation variationnelle équivalente. Le point crucial d'une telle transformation est de définir une fonctionnelle dont des extrema coïncident avec la solution du problème

examiné. Crapper [4] a montré que les équations des ondes de gravité-capillarité en écoulement irrotationnel et en profondeur infinie découlent du principe variationnel, qui consiste à minimiser le lagrangien :

$$\bar{L} = \frac{p}{2\pi} \frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta} \left[-\varpi \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \Phi)^2 \right] dZ + \frac{1}{2} \eta^2 + \kappa \left(\sqrt{1 + (\bar{\nabla}_{XY} \eta)^2} - 1 \right) \right\} \frac{dX dY}{p q}$$

Dans cette relation le lagrangien L est exprimé dans le référentiel \mathfrak{R} où la moyenne se calcule dans le pavé ($\Delta X = 2\pi, \Delta Y = 2\pi$), et :

$$\bar{\nabla}_{XY} = \left(p \frac{\partial}{\partial X}, q \frac{\partial}{\partial Y} \right)$$

Ici nous avons, sans perte de généralité, attribué à la masse volumique adimensionnelle la valeur $\rho = 1$. Ce lagrangien est calculé en remplaçant l'élévation et le potentiel des vitesses par leurs expressions. La difficulté majeure réside dans la détermination de la contribution de l'énergie cinétique moyenne qu'il convient de mettre sous la forme :

$$\bar{T} = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\alpha_{mn} + \alpha_{kl}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dXdY \left\{ e^{(\alpha_{mn} + \alpha_{kl}) \eta(X, Y)} \left[\bar{\chi}^{mn} \bar{\chi}^{kl} + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \chi^{mn} \chi^{kl} \right] \right\}$$

Son calcul est considérablement simplifié si on introduit le développement en série de Fourier :

$$(3) \quad e^{(\alpha_{mn} + \alpha_{kl}) \eta(X, Y)} = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \Delta_{u0} \Delta_{v0} \omega_{uv}^{mnkl} \cos uX \cos vY$$

En effet on trouve :

$$\bar{T} = \frac{1}{32} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\alpha_{mn} + \alpha_{kl}} \left[\Omega^{mnkl} \right]^t \left[\Theta^{mnkl} \right]$$

Où $\left[\Omega^{mnkl} \right]$ et $\left[\Theta^{mnkl} \right]$ sont des tenseurs d'ordre 1 donnés par :

$$\left[\Theta^{mnkl} \right] = \begin{bmatrix} p^2 mk + q^2 nl + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk - q^2 nl + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk - q^2 nl - \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk + q^2 nl - \alpha_{mn} \alpha_{kl} \end{bmatrix}$$

$$\left[\Omega^{mnkl} \right] = \begin{bmatrix} \omega_{k-m, l-n}^{mnkl} \\ \omega_{k-m, l+n}^{mnkl} \\ \omega_{k+m, l-n}^{mnkl} \\ \omega_{k+m, l+n}^{mnkl} \end{bmatrix}$$

La contribution de l'énergie potentielle se calcule de façon analogue ; on trouve :

$$\bar{E}_p = \frac{\kappa}{4} (R_{00} - 4) + \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0} \Delta_{n0} a_{mn}^2$$

R_{00} représentant le coefficient d'indices (0,0) issu du développement en série de Fourier :

$$(4) \sqrt{1+p^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2 + q^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y}\right)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0} \Delta_{n0} R_{mn} \cos mX \cos nY$$

Le terme restant s'obtient aisément :

$$\bar{\Phi}_t = -\frac{1}{4} \varpi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m \frac{b_{mn}}{\alpha_{mn}} \omega_{mn}^{mn}$$

ω_{ij}^{mn} sont les coefficients de Fourier définis par

$$(5) e^{\alpha_{mn} \eta(X,Y)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_{i0} \Delta_{j0} \omega_{ij}^{mn} \cos iX \cos jY$$

Ainsi le lagrangien moyen s'écrit :

$$\bar{L} = \frac{1}{32} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\alpha_{mn} + \alpha_{kl}} \left[\bar{\Omega}^{mnkl} \right]^t \left[\Theta^{mnkl} \right] + \frac{\kappa}{4} (R_{00} - 4) + \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0} \Delta_{n0} a_{mn}^2 - \frac{1}{4} \varpi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m \frac{b_{mn}}{\alpha_{mn}} \omega_{mn}^{mn}$$

Les inconnues a_{mn} et b_{mn} intervenant dans les solutions (1), (2) ont été déterminées en utilisant la méthode du lagrangien moyen de whitham. et les équations variationnelles à résoudre sont alors :

$$\frac{d\bar{L}}{da_{mn}} = 0 \quad ; \quad \frac{d\bar{L}}{db_{mn}} = 0$$

L'utilisation de cette méthode conduit au système d'équations algébriques suivant :

$$(6) \frac{1}{32} \sum_{m=1n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\alpha_{mn} + \alpha_{kl}} \left[\bar{\Omega}_{rs}^{mnkl} \right]^t \left[\Theta^{mnkl} \right] + \frac{1}{4} \Delta_{r0} \Delta_{s0} a_{rs} + \frac{\kappa}{16} \sum_{m=1n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{mn} \left| \bar{T}_{mnrs} \right|^t \left| \vartheta_{mnrs} \right| - \frac{\varpi}{16} \Delta_{r0} \Delta_{s0} \sum_{m=1n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m b_{mn} \bar{\omega}_{mnrs} = 0$$

$$(7) \frac{1}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{mn}}{\alpha_{mn} + \alpha_{rs}} \left[\bar{\Omega}^{mnrs} \right]^t \left[\Theta^{mnrs} \right] - \frac{\varpi}{4} \frac{r}{\alpha_{rs}} \omega_{rs}^{rs} = 0$$

$\bar{\omega}_{mnrs}, \left| \bar{T}_{mnrs} \right|$ et $\left| \vartheta_{mnrs} \right|$ sont données par les relations de l'annexe et $\left[\bar{\Omega}_{rs}^{mnkl} \right]$ correspond au tenseur :

$$\left[\bar{\Omega}_{rs}^{mnkl} \right] = \frac{\partial}{\partial a_{rs}} \left[\bar{\Omega}^{mnkl} \right]$$

Procédure numérique

Les séries (1) et (2) sont tronquées à l'ordre N. En conséquence, les sommations dans les équations (6) et (7) sont aussi limitées à cette valeur. Ainsi, le système d'équations qui en résulte peut être complété par la relation qui définit la cambrure utilisée comme paramètre de contrôle, soit :

$$(8) \quad \varepsilon = \eta(0,0) - \eta(0,\pi) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{2m+1,2n+1}$$

Le système d'équations algébriques non linéaires (6)-(7)-(8) peut être résolu en utilisant la méthode itérative de Newton. Les coefficients de Fourier intervenant dans les relations (3), (4) et (5) sont calculés par la transformation de Fourier rapide (F.F.T.) avec un échantillonnage adéquat.

Résultats

En pratique, pour des angles caractéristiques, des modes se propagent avec la même vitesse de phase que le fondamental de l'onde. Ces accrochages de phase génèrent des résonances appelées *résonances harmoniques* parce que le fondamental (1,1) résonne par interaction non linéaire avec un harmonique (j,k). Mathématiquement, ces résonances se traduisent par la présence de diviseurs nuls dans les coefficients des modes biharmoniques (j,k). Dans le cas de la profondeur infinie, ceci apparaît lorsque les paramètres de l'onde vérifient la relation :

$$(8) \quad \left(1 + \kappa \alpha_{j,k}^2 \right) \alpha_{j,k} - (1 + \kappa) j^2 = 0$$

Kimmoun [5] a interprété la relation (8) comme étant une généralisation des « rides de Wilton » au cas tridimensionnel. Nous nous proposons, ici, de produire une preuve numérique en calculant des solutions pour ces configurations critiques. Ainsi pour $j=k=2$, c'est-à-dire $\kappa = 1/2$, nous obtenons les profils illustrés par la figure 2, pour un angle $\theta = 45^\circ$. Dans ces représentations nous avons opacifié les plans $X = 0$ et $Y = 0$ pour bien observer la ressemblance des profils avec ceux des deux types de rides de Wilton connus. En l'absence de la tension de surface l'équation les résonances apparaissent pour des angles critiques θ_c tels que :

$$\cos^2 \theta_c = \frac{(j^4 - j^2)}{(k^2 - j^2)} \quad j, k = 0,1,2,,3,\dots$$

Avec la présente méthode le problème des diviseurs nuls ne s'est pas posé pour les configurations critiques. Lorsque calcul est initialisé avec les approximations à l'ordre 4 données par Iouallalen [7] on obtient, aux ordres supérieurs, les solutions correspondant aux formes orthorhombiques classiques. Dans ce cas, les coefficients de l'harmonique (m,n) ne subissent pas d'amplification susceptible d'être associée à la résonance (m,n).

Pour obtenir une solution de la plus forte résonance, (2,6), nous avons procédé comme suit : pour un premier calcul, à l'ordre 6 de troncature et une cambrure nulle, les approximations à l'ordre 4 données par Iouallalen [1993] calculées avec un petit paramètre μ qui remplace la cambrure ε et complétées par les données $b_{26} = \mu$ et, $a_{26} = \mu$, sont soumises au schéma de Newton . Pour les

calculs ultérieurs, nous avons utilisé comme paramètre de progression : $Q = 1 + \eta(0)$

La figure 3 montre le profil obtenu. Remarquons que dans une fenêtre de dimensions $2\pi \times 2\pi$ on a deux longueurs d'ondes suivant (OX) et six suivant (OY).

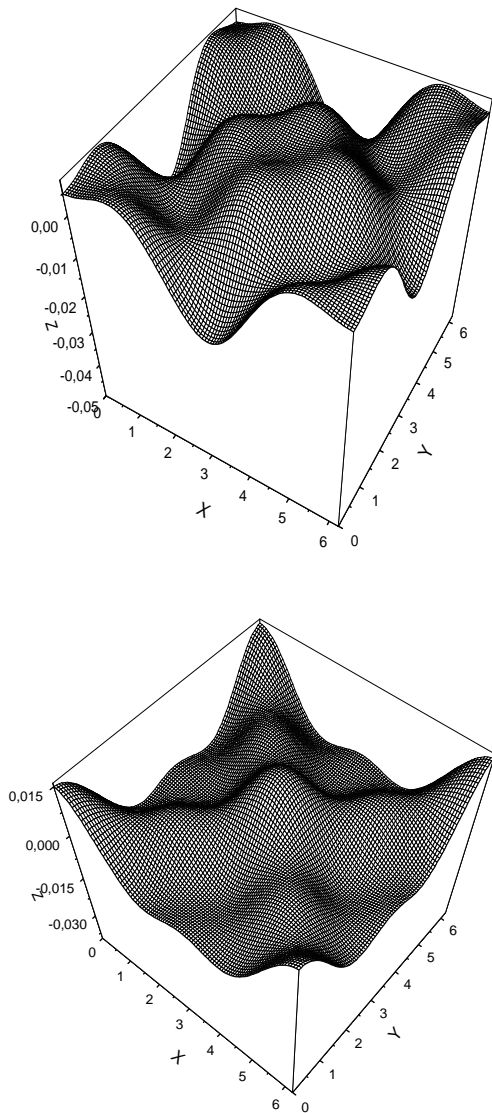


Figure 2 : les deux types de *profils obtenus pour* $\kappa = 1/2$

Références

- [1] CRAIG W., NICHOLLS D. P., (2000); Travelling two and three dimensional capillary gravity water waves. *SIAM J. Math. Anal.* **32**, 323–359.
- [2] IOOSS G., PLOTNIKOV P., (à paraître), Small divisor problem in the theory of three-dimensional water gravity waves
- [3] WHITHAM G.B., (1966); Nonlinear dispersion of water waves. *J. Fluid. Mech. Part 2* **27**, 399-412.
- [4] CRAPPER G.D., (1979), Energy and momentum integrals for progressive capillary-gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **94**, 13-24.
- [5] KIMMOUN O., (1997) ; Etude théorique et expérimentale des champs de vagues à courtes

crêtes, *PhD thesis. Université de la Méditerranée, Aix-Marseille, II, France.*

- [6] IOUALALEN M., (1993), Fourth order approximation of short-crested waves. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II* **316**, 1193-1200.

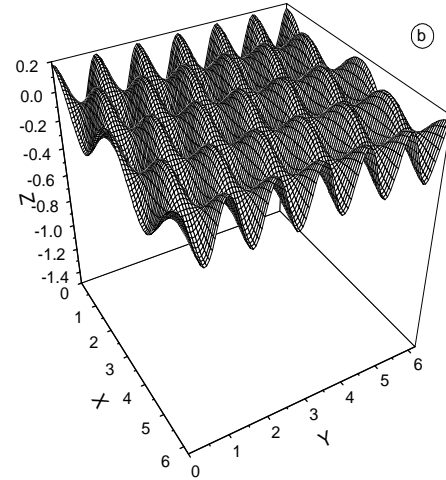


Figure 3 : *type de profil obtenu pour la résonance harmonique (2,6), en gravité pure.*

Annexe :

Nous donnons quelques relations sorties du texte par souci d'allègement

$$\overline{\omega}_{mnrs} = \omega_{r-m,s-n}^{mn} + \omega_{r-m,s+n}^{mn} + \omega_{r+m,s-n}^{mn} + \omega_{r+m,s+n}^{mn}$$

$$\left[\overline{T}_{mnrs} \right] = \begin{bmatrix} T_{r-m,s-n} \\ T_{r-m,s+n} \\ T_{r+m,s-n} \\ T_{r+m,s+n} \end{bmatrix}$$

$$\left[\overline{\vartheta}_{mnrs} \right] = \begin{bmatrix} \Delta_{n0} \Delta_{s0} P^2 m r + \Delta_{m0} \Delta_{r0} Q^2 n s \\ \Delta_{n0} \Delta_{s0} P^2 m r - \Delta_{m0} \Delta_{r0} Q^2 n s \\ -\Delta_{n0} \Delta_{s0} P^2 m r + \Delta_{m0} \Delta_{r0} Q^2 n s \\ -\Delta_{n0} \Delta_{s0} P^2 m r - \Delta_{m0} \Delta_{r0} Q^2 n s \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\overline{\nabla} \eta \right)^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0} \Delta_{n0} T_{mn} \cos mX \cos nY$$